



TRAITÉ

DE

MÉCANIQUE INDUSTRIELLE.

TRAITÉ

DE

MÉCANIQUE INDUSTRIELLE,

EXPOSANT

LES DIFFÉRENTES MÉTHODES POUR DÉTERMINER ET MESURER LES FORCES MOTRICES, AINSI QUE LE TRAVAIL MÉCANIQUE DES FORCES;

PAR

J. V. PONCELET,

Colonel du génie; membre de l'institut de France, académie des sciences; professeur de mécanique physique et expérimentale à la faculté des sciences de Paris; ancien professeur du cours de mécanique appliquée aux machines à l'école d'application de l'artillerie et du génie, membre de l'académie royale de Metz, de l'académie des sciences de Berlin, etc.

DEUXIÈME ÉDITION,

ENTIÈREMENT CORRIGÉE ET CONTENANT UN GRAND NOMBRE DE CONSIDÉRATIONS NOUVELLES.

—

TOME DEUXIÈME.

LIÉGE,

A. LEROUX, FILS, ÉDITEUR.

—

1845

DEUXIÈME PARTIE.

ÉQUILIBRE DES FORCES ET DYNAMIQUE.

I.

FORCES CONCOURANT EN UN POINT.

1. *Équilibre d'un corps.* — Jusqu'ici on n'a considéré que l'effet d'une force égale et directement appliquée à une autre force, et il arrive souvent que des forces appliquées d'une manière quelconque à un corps ont pour but de vaincre des résistances aussi quelconques par l'intermédiaire de ce corps. Quand un corps est ainsi soumis à l'action de plusieurs forces (*puissances* ou *résistances*), on dit qu'il y a équilibre entre toutes ces forces lorsque l'une d'elles détruit un certain effet que produiraient les autres sur le corps si la première n'existait pas. Le corps est lui-même en équilibre si les diverses forces qui lui sont appliquées le laissent en repos. Cette dernière espèce d'équilibre ne saurait jamais être absolue, parce que les corps participent au mouvement continuel de la terre et qu'il n'y a en réalité point de repos pour eux. Toutefois un corps sera pour nous en repos lorsque sa position restera la même par rapport à des objets tels que les montagnes, les maisons, etc., que nous regardons comme fixes. Ainsi, l'idée d'équilibre ne se rapporte pas uniquement au repos, et n'exclut nullement le mouvement. De là résulte la distinction de l'équilibre *Statique* et de l'équilibre *Dynamique*. On nomme *Résultante* de plusieurs forces, celle qui produit à elle seule le même effet que ces forces ; ces dernières sont dites *Composantes*.

2. *Résultante de forces appliquées selon la même direction.* — Lorsque plusieurs forces agissent sur une même droite et dans le même sens, leur effet équivaut à celui d'une force unique égale à leur somme et qui en est la résultante. Si ces forces agissent dans des sens opposés et toujours sur la même droite, leur résistance sera une force unique égale à l'excès de la somme des forces qui agissent dans l'autre sens, et elle agira dans le sens de la plus grande des deux sommes. C'est le cas où des efforts sont exercés sur la direction d'un même cordon. Remarquons que la tension du cordon est la même dans tous ses points, et qu'il n'est pas possible que ses deux bouts soient tirés avec des efforts différents. La différence obtenue pour ceux qui lui sont appliqués dans un sens et dans l'autre est purement arith-

métique, et indique que les efforts supérieurs pourraient développer une action plus grande que celle des efforts inférieurs.

3. *Parallélogramme des chemins.* — Lorsqu'un corps ou point matériel se ment de A en B (fig. 23) de manière à décrire le chemin AB supposé rectiligne, chacune des positions A et B peut être projetée sur les droites quelconques OM, ON, situées dans le même plan que la droite AB, par des parallèles à ces lignes ou axes ; ou plutôt la position A donne lieu aux deux coordonnées AA′, AA″, et la position B aura deux coordonnées BB′, BB″. Les positions A′, A″ sur les droites données sont simultanées avec le point A et celles B′, B″ avec le point B. Les chemins A′B′ et A″ B″, sur les directions OM, ON, sont donc décrits en même temps que le chemin véritable AB. Les premiers se nomment *Chemins estimés*, ou *Chemins relatifs* sur telle ou telle direction. Prolongeons les parallèles ou coordonnées des points A et B jusqu'à ce qu'elles forment le parallélogramme AEBF, et nous reconnaîtrons, à cause de AE = A′B′ et de AF = A″B″, ce principe : *qu'un chemin rectiligne parcouru peut toujours se décomposer en deux chemins relatifs sur deux directions quelconques, et que ces derniers sont les côtés parallèles à ces directions, d'un parallélogramme qui a pour diagonale le véritable chemin parcouru.* Réciproquement, quand on a les chemins relatifs dans deux directions quelconques, on en déduit le chemin véritable, au moyen de la diagonale du parallélogramme sur les deux premiers.

4. *Parallélogramme des vitesses.* — On a dit (1re partie, 16 et suiv.) que la vitesse d'un corps en mouvement est représentée par l'étendue du chemin décrit dans un même temps très-court, et qu'il n'y a que le cas du mouvement uniforme où le temps pendant lequel s'estime la vitesse puisse être pris aussi grand qu'on voudra. Or, le chemin AB étant décrit par le corps, en même temps que les chemins A′B′, A″B″, le premier pourra être regardé comme sa vitesse véritable, et les deux autres comme ses vitesses relatives. Ainsi, *la vitesse véritable d'un corps est la diagonale d'un parallélogramme construit sur ses deux vitesses relatives estimées dans des directions quelconques.*

5. *Cas du mouvement curviligne ou du mouvement varié.* — Si le mouvement est curviligne, la diagonale rectiligne AB ne peut plus représenter le chemin décrit. Si le mouvement était varié, cette même diagonale ne donnerait plus l'intensité de la vitesse, dans le cas où il s'agirait d'un intervalle fini de mouvement. Il convient alors de déterminer par une suite de temps infiniment petits et égaux, les chemins élémentaires décrits simultanément sur deux axes. Autant on aura de couples de ces petits chemins, autant on construira de parallélogrammes dont les diagonales donneront les véritables petits chemins élémentaires. Mais alors, comme les dispositions consécutives A et B (fig. 24) sont très-rapprochées, une diagonale telle que AB se confondra sensiblement avec la courbe et pourra être regardée comme la tangente

de cette dernière. Dans la construction de chaque parallélogramme on peut, pour plus de facilité, donbler, quintupler, etc., les deux chemins relatifs correspondants, sans que la direction de la diagonale soit altérée ; seulement, le chemin qu'elle donnera sera double, quintuple, etc., du chemin réel.

6. *Méthode de Roberval.* — Lorsque la loi du mouvement d'un point est connue dans deux directions quelconques, il est toujours possible, d'après ce qui précède, de mener une tangente à la courbe que décrit ce point. L'ellipse, par exemple, s'engendre en fixant à deux points F, F′ (fig. 25), que l'on nomme ses foyers, les extrémités d'un fil FAF′ d'une longueur égale à son grand axe, et en promenant une pointe A dans toutes les positions où le fil peut être tendu par cette pointe contre les foyers. Puisque dans les mouvements du point descripteur, la longueur du fil FA + F′A est toujours la même, il est évident que la portion FA s'allonge de la même quantité que celle dont se raccourcit l'autre portion correspondante F′A. Le point A tend donc à décrire ou décrit en effet deux chemins simultanés égaux sur les rayons vecteurs FA et F′A. Ainsi, prenant sur le prolongement de FA une partie quelconque AB, et snr F′A une partie AB′ = AB, construisons le parallélogramme ABCB′. La diagonale AC sera la tangente à l'ellipse en A. On observera que ce parallélogramme est ici un losange, et qu'à canse de l'égalité des angles BAC et CAB′, la tangente à l'ellipse jouit de la propriété que les angles qu'elle forme avec les deux rayons vecteurs sont égaux. Cette méthode, due à Roberval, est fort utile dans tous les cas où l'on connaît la description organique de la conrbe.

7. *Indépendance des vitesses simultanées dans un même corps.* — On a fait voir comment on pouvait décomposer nn mouvement en deux autres, et réciproquement, et cela parce qu'en réalité un corps peut être animé de deux ou plusieurs vitesses simultanées. Supposez que, pendant qu'un bateau chemine sur nne rivière, un homme se dirige d'un bord à l'autre de ce bateau, et que, partant de A (fig. 26) par exemple, il soit arrivé en B au moment où le bateau est parvenu dans une position telle que le point A soit en A′ et le point B en B′. Quoique l'homme n'ait parcouru que le chemin AB sur le bateau, il n'en a pas moins décrit par rapport aux rives le chemin AB′ ; car il est mû à la fois et de la vitesse qui lui est propre et de celle qui est propre au bateau. Cela posé, ce même espace AB′ serait encore décrit si le bateau marche d'abord de A en A′ et que l'homme se transporte ensuite de A en B′ ; ou si le bateau s'arrête pendant que l'homme va de A en B et qu'ensuite l'homme demeurant au repos en B, le bateau s'avance de A en A′. — *Autre exemple* : La terre tourne en même temps que le bateau précédent marche, et l'homme peut lui-même marcher sur ce bateau. Cet homme est ainsi animé de trois vitesses simultanées, dont on trouvera la résultante, en les composant les unes après les autres. — Considérons enfin un corps posé sur un certain nombre de feuilles de papier placées les unes au-dessus

des autres sur une table à roulettes. — On peut d'abord tirer la table, elle entraînera dans son mouvement les feuilles de papier et le corps de manière que le tont sera animé d'une vitesse commune. Si, outre ce mouvement général, un homme tire la feuille de papier inférieure, cette feuille sera, ainsi que toutes les autres et le corps, animée de deux vitesses composantes. Qu'un autre homme fasse encore mouvoir la deuxième feuille de papier, celle-ci et toutes celles qui lui sont superposées, recevront leurs vitesses qui se composeront en une seule. En un mot, quand un corps a plusieurs mouvements simultanés, le véritable mouvement est le même que si le corps recevait l'une après l'autre toutes les vitesses qu'il possède en même temps. De là cette règle : *la résultante de plusieurs vitesses simultanées s'obtient en construisant un polygone* (fig. 27) *dont les côtés sont égaux et parallèles aux vitesses composantes, et en joignant le point de départ à l'extrémité du dernier côté.*

8. *Indépendance de l'action des forces simultanées.* — L'action d'une force sur un corps, qu'il soit en repos ou qu'il soit déjà en mouvement, est toujours la même et lui imprime dans l'une et l'autre circonstance les mêmes degrés de vitesse. Que vous abandonniez, par exemple, un corps à son propre poids, la pesanteur lui imprimera les mêmes degrés de vitesse à chaque instant, si ce corps part de l'état de repos ou s'il a déjà reçu un mouvement quelconque de la part d'une autre force. Par exemple, quand une bombe décrit dans l'air une parabole ; la vitesse que le mobile possède à chaque instant est toujours la résultante MR (fig. 26) de la vitesse MQ qu'il a reçue à l'instant qui précède immédiatement l'instant que l'on considère, et du degré de vitesse très-petit MP que la pesanteur lui imprime pendant l'intervalle de temps aussi très-petit qui sépare ces deux instants consécutifs. Ainsi, lorsque deux forces seront appliquées à un même corps, elles lui imprimeront à chaque instant et simultanément les degrés de vitesse qui leur sont propres. Nous avons dit (1re partie, 71) que ces degrés étaient, d'après une loi générale de la nature, proportionnels aux intensités des forces.

9. D'après cela, soit un point matériel A (fig. 29) sur lequel agissent deux forces P et Q représentées en grandeur et en direction par les droites AB et AC. Il est visible qu'elles lui imprimeront simultanément, et dans leurs directions respectives, les mêmes petits degrés de vitesse Am, An, que si elles le tiraient chacune isolément. La vitesse totale qui en résulte sera d'ailleurs (2e partie, 8) donnée par la diagonale Ar du parallélogramme $Amrn$. Imaginons, dans une direction opposée à celle de cette diagonale, une force X qui détruise la vitesse résultante Ar. Le mouvement ne pourra plus alors naître, en sorte que la force X, détruisant ainsi l'effet de P et Q, fera équilibre à ces forces. Soit porté $AD = X$ sur la diagonale : on conçoit que AD produira le même effet que les deux forces P et Q, ou qu'elle sera leur résultante : or, leur force PQ et leur résultante AD

ou X sont proportionnelles aux degrés de vitesse A*m*, A*n* et A*r*, qu'elles impriment simultanément, c'est-à-dire aux côtés et à la diagonale du parallélogramme construit sur leurs directions. D'où résulte ce principe, connu sous la dénomination de parallélogramme des forces, que *la résultante de deux forces est représentée en grandeur et en direction par la diagonale du parallélogramme construit sur les intensités de ces forces.* Il ne faut pas oublier que l'intensité d'une force est représentée par une ligne prise dans sa direction, et contenant autant d'unités linéaires qu'il y a de kilogrammes dans la mesure de la force. On voit encore que les forces se combinent entre elles comme les chemins et les vitesses. C'est, au reste, ce que l'expérience confirme. Si, par exemple, on attache à une corde ACB (fig. 30), fixée à ses deux extrémités, un poids R de 15 kilog., il est possible de mesurer avec deux pesons les efforts qu'il exerce sur les directions CA et CB. Portant ensuite au-dessus du point C, et dans sa verticale, une longueur CD proportionnelle à 15, et construisant le parallélogramme C*a*D*b*, on trouve que les côtés C*a*, C*b* sont proportionnels aux efforts indiqués par les pesons.

10. *Décomposition d'une force en deux autres.* — De ce que deux forces appliquées en un même point donnent lieu à une force unique, réciproquement une force quelconque peut se décomposer en deux autres agissant sur deux directions données. Soit A*r* (fig. 31) une force appliquée en A, et que l'on veut décomposer en deux autres dirigées sur AB et AC ; on les obtiendra au moyen du parallélogramme A*mrn*. Le côté A*m* sera la première composante, et le côté A*n* la seconde. Si les composantes sont perpendiculaires entre elles et qu'on appelle PQ ces forces et R leur résultante, on a, à cause du triangle rectangle A*rm*, et de $rm = An$,

$$\overline{Ar}^2 = \overline{Am}^2 + \overline{An}^2, \quad \text{ou} \quad R^2 = P^2 + Q^2,$$

et, par suite,

$$R = \sqrt{P^2 + Q^2}.$$

Au lieu d'extraire la racine carrée pour obtenir la résultante des deux forces P et Q, qui sont perpendiculaires entre elles, on aura une valeur suffisamment approchée au moyen de cette formule qu'il faut admettre,

$$R = 0{,}96P + 0{,}4Q,$$

P étant la plus grande des deux composantes.

11. *Quantité de travail d'une force sur une résistance qui ne lui est pas immédiatement opposée.* — Jusqu'à présent on a supposé que la résistance était immédiatement opposée à la force destinée à la vaincre. Considérons maintenant le cas où la résistance a lieu dans une tout autre direction que celle de la puissance et où le point d'application de cette dernière ne peut se mouvoir que dans le sens de la résistance. Soit, par exemple, une force AR (fig. 32) appliquée sur le corps A et que nous nommerons R, et supposons que le corps A ne puisse se mouvoir que dans la direction AB. Décomposons la puissance R en deux autres forces : l'une P=AP, perpendiculaire

à AB, et l'autre $Q = AQ$, située sur la droite AB, et par conséquent immédiatement opposée à la résistance qu'il faut vaincre. Puisque le corps A ne peut céder dans le sens perpendiculaire à AB, la composante ne tendra qu'à presser le corps A sans le faire cheminer et par conséquent sans produire du travail. Quant à la composante Q, elle est immédiatement opposée à la résistance des corps, et, d'après ce qui est dit, si Aa est le chemin très-petit décrit par le corps sur la direction AB, qui est aussi celle de Q ou de la résistance, la quantité de travail élémentaire qui vaincra cette résistance sera mesurée par le produit $Q \times Aa$. Telle sera aussi la quantité de travail effectif produite par la force R. Si l'on abaisse du point a la perpendiculaire ar sur la direction de R, la distance ar ne sera que le chemin décrit par le point d'application de cette force et estimé dans sa direction. Or, les triangles AQR et Aar, étant rectangles et ayant un angle commun en A, sont semblables ; ce qui donne la proportion

$$Aa : Ar :: AR : AQ, \text{ ou } Aa : Ar :: R : Q;$$

d'où la force R est aussi égale au produit $R \times Ar$: ce qui apprend que la dépense de travail d'une force qui n'est point immédiatement opposée à la résistance, est égale au produit de cette puissance multipliée par le chemin que parcourt son point d'application et qui est estimé dans la direction propre de la puissance. Il serait facile de faire voir que le chemin Ar, estimé dans la direction propre de la force R, est en réalité le chemin que décrit le point d'application de cette force.

12. *Quantité de travail pour faire mouvoir un corps pesant sur une courbe.* — Lorsqu'un corps de poids P est assujetti à se mouvoir sur une courbe ABC (fig. 38), la quantité de travail élémentaire que la pesanteur dépense pour lui faire décrire un petit élément BC, est, d'après ce qui précède, égal au produit de P et du chemin $b'c'$ estimé sur la verticale. C'est aussi la mesure de la quantité de travail dépensée parallèlement à l'élément de la courbe. En ajoutant toutes les quantités de travail élémentaires en vertu desquelles le corps a décrit toute la courbe, on trouvera que la somme, ou la quantité de travail dépensée par la pesanteur, est égale au poids P multiplié par la somme de tous les petits chemins estimés verticalement, ou par la hauteur $AD' = H$, ou bien au produit $P \times H$. Ce produit est également le travail de la force qui agirait immédiatement dans le sens même du mouvement. Or, on sait (1[re] partie, 78) que le double de ce dernier travail est égal à la force vive du corps, c'est-à-dire au produit $\frac{P}{g} \times V^2$, V étant la vitesse qu'il possède dans le sens de la courbe au moment de la fin du travail. On aura donc

$$2P \times H = \frac{P}{g} \times V^2, \quad \text{ou} \quad V^2 = 2gH:$$

c'est-à-dire que la vitesse acquise par une courbe sur une certaine hauteur est la même que s'il tombait verticalement sur cette hauteur. On voit encore que la quantité de travail que doit dépenser un moteur pour faire

monter un corps pesant le long d'un plan ou d'une surface quelconque, est toujours mesurée par le produit du poids de ce corps et de la hauteur verticale du point où il doit monter.

13. On a démontré (2ᵉ partie, 11) que la quantité élémentaire de travail d'une force dont le point d'application est mû dans une direction différente de celle de la force, était mesurée soit par le produit de cette force et du petit chemin estimé, selon sa direction, soit encore par le produit du chemin réel décrit par le point d'application et de la composante de la force dans la direction du mouvement; et remarquons que cette composante n'est autre chose que la projection de la force sur le chemin parcouru. D'après cela, considérons les deux forces P et Q (fig. 34) appliquées au point A, R leur résultante, Aa le petit chemin parcouru par leur point commun d'application. Abaissons des points des P, Q, R sur la direction Aa les perpendiculaires PP′, QQ′, RR′; la projection de la force P où AP sera évidemment AP′, et celles de Q et R seront AQ′ et AR′. Quant au travail élémentaire de P, ce sera $Aa \times AP'$, et on aura pour ces deux forces Q et R les produits de $Aa \times AQ'$ et $Aa \times AR'$. Or,

$$AR' = AP - R'P',$$

et comme

$$R'P' = r'P = AQ',$$

et, par suite,

$$AR \times Aa = \overline{AP' \times Aa} - \overline{AQ' \times Aa}.$$

C'est ici le lieu d'observer que la composante AP′ de P est dirigée dans le sens du mouvement Aa, tandis que la composante AQ′ de Q est dirigée en sens contraire, de sorte que le travail effectif de ces forces ou leur travail total doit être ici la différence des travaux de chacune de ces deux forces. Ce même travail en eût été la somme si les composantes des deux forces P et Q, sur la direction du mouvement Aa, eussent été dirigées l'une sur l'autre dans le sens de ce mouvement. Quoi qu'il en soit, nous voyons que *le travail élémentaire de la résultante de deux forces est égal au travail des deux composantes, et ce dernier travail est la somme ou la différence des travaux que produisent chacune d'elles selon qu'elles agissent dans le même sens ou dans des sens opposés.*

14. *Moment de la résultante de deux forces.* — Le petit espace Aa peut être décrit de diverses manières. Si l'on suppose, par exemple, que le point a soit appliqué à une barre de manége AO (fig. 35), qui tourne autour d'un point O pris arbitrairement sur le plan des deux forces, l'espace élémentaire Aa devient un petit arc de cercle qu'il est permis de regarder comme une petite ligne droite perpendiculaire à AO. Les petits chemins estimés Ab, Adc, Ac, sur les directions des forces P, Q, et de leur résultante R, sont donnés par les pieds des perpendiculaires abaissées sur chaque force, de l'extrémité a du petit chemin décrit; et les quantités élémentaires de

travail qui sont aussi mesurées par le produit de la force et du petit chemin estimé sur sa direction, sont respectivement pour P, Q, R,

$$P \times Ab,\ Q \times Ad, \text{ et } R \times Ac.$$

On nomme bras de levier des forces P, Q, R, les perpendiculaires, telles que Op, Oq, Or, abaissées du centre de rotation O sur leurs directions. En examinant ce qui est relatif à la force P, on reconnaît que les deux triangles AOp et Aab sont semblables, attendu qu'ils sont rectangles en p et en b et que l'angle OAp de l'un est égal à l'angle Aab de l'autre. Ce qui donne la proportion

$$Ab : Aa :: Op : AO;$$

d'où

$$Ab = Op \times \frac{Aa}{AO}.$$

Ainsi, la quantité de travail de la force P, ou $P \times Ab$, devient $P \times Op \times \frac{Aa}{AO}$. On trouverait de même pour celle de Q, ... $Q \times Oq \times \frac{Aa}{AO}$; et pour celle de R, $R \times Or \times \frac{Aa}{AO}$. Mais nous avons fait voir (2[e] partie, 13) que la dernière était égale à la somme ou à la différence des deux premières, selon que les forces P, Q agissaient dans le même sens ou en sens contraires. On aura donc

$$R \times Or \times \frac{Aa}{AO} = \left(P \times Op \times \frac{Aa}{AO}\right) \pm \left(Q \times Oq \times \frac{Aa}{AO}\right)\ldots\ldots$$

ou bien, supprimant le facteur commun $\frac{Aa}{AO}$ et en désignant par r, p, q, les bras de levier des forces R, P, Q,

$$Rr = Pp \pm Qq.$$

On nomme moment d'une force le produit de cette force par son bras de levier. Ainsi, le moment de la résultante de deux forces qui concourent en un même point est égal à la somme ou à la différence des moments des deux composantes, selon que ces dernières agissent sur leur point commun d'application dans le même sens ou dans des sens différents.

15. *Deux points d'application de deux forces peuvent être ramenés à un seul.* — Jusqu'ici on a supposé que les deux forces étaient appliquées à un seul et même point, et cependant deux forces P et Q agissent pour l'ordinaire sur un même corps en deux points différents, tels que B et C (fig. 36). Quelle que soit leur action sur le corps, il est évident qu'elle ne sera pas changée si l'on traverse celui-ci par deux barres rigides AB et AC, situées dans les directions respectives des deux forces données. Ces deux barres iront concourir en un point A, et celui-ci leur étant invariablement lié, ainsi qu'au corps lui-même, il sera permis de regarder les forces P et Q comme appliquées à ce point A. La résultante AR s'obtiendra alors au moyen

de la diagonale du parallélogramme APRQ, où elle rencontrera la surface du corps au point D que l'on considérera ensuite comme le point d'application de la résultante R. Maintenant, si le corps tend à se mouvoir autour d'un point quelconque O, le point A, qui est le point commun d'application des deux forces PQ et de la résultante R, décrit un petit arc de courbe que l'on considérera comme une droite sur laquelle toutes ces forces pourront être projetées, et l'on sera amené à conclure encore que le travail de la résultante est égal au travail total des composantes. Pareillement on déduirait que le moment de la résultante R par rapport au point O équivaut au moment total des deux composantes P et Q par rapport au même point.

16. *Extension du théorème des moments.* — Les relations précédentes que nous venons d'établir, soit entre les quantités de travail, soit entre les moments des forces et de leur résultante, ont lieu de quelque manière que le point de rotation O ait été choisi dans le plan des forces; mais elles sont particulières au mouvement des points de concours de leurs directions considéré comme leur point d'application. Ces relations subsisteront-elles en ayant égard au mouvement des véritables points B, C et D, où les forces P, Q, R sont appliquées sur le corps. Remarquez que chaque moment respectif ne dépend que de l'intensité de la force et de la grandeur de la perpendiculaire abaissée du point O sur sa direction. Le moment de la force P, par exemple, sera le même, soit qu'on la suppose appliquée au point extérieur A, soit qu'on la suppose appliquée au point B, où sa direction rencontre la surface du corps. Par conséquent, le théorème des mouvements est vrai, lors même que les deux composantes P et Q ont des points d'application différents.

17. *Extension du théorème des quantités de travail.* — Si l'on parvient à démontrer que la quantité de travail d'une force est la même, quel que soit le point qu'on choisisse sur sa direction pour point d'application, il est évident que le théorème des quantités de travail évaluées d'après le mouvement du point de concours commun à deux forces et à leur résultante est également applicable lorsque les quantités de travail de ces forces sont mesurées d'après le mouvement de leur point respectif d'application : or, il peut arriver trois cas, selon que le corps a un mouvement de rotation, ou un mouvement de translation, ou un mouvement quelconque.

PREMIER CAS. — Le corps et par conséquent la direction AP d'une force quelconque étant supposé avoir un mouvement de rotation autour d'un point O (fig. 37), deux points quelconques A et B de cette droite décrivent autour de ce point des angles égaux et tels que les petits arcs Aa, Bb sont proportionnels à leurs rayons respectifs AO et BO. On aura donc $\frac{Aa}{AO}=\frac{Bb}{BO}$. Or la quantité de travail de P, estimée par le mouvement de son point d'application supposé en A, a pour mesure $P \times \frac{Aa}{BO} \times Op$. Estimée d'après

le mouvement d'un autre point B d'application, elle a pour mesure $P \times \frac{Bb}{BO} \times Op$; et ces deux quantités de travail sont égales, puisque leurs expressions se composent des mêmes facteurs P, Op et des facteurs égaux $\frac{Aa}{AO}$, $\frac{Bb}{BO}$, ...

DEUXIÈME CAS. — Si le corps n'a qu'un mouvement de translation, les deux points d'application quelconques A et B (fig. 38), pris, sur la direction de la force P, décrivent des chemins Aa et Bb qui sont égaux et parallèles. Par conséquent leurs projections Aa', Bb', sur la direction de P, sont égales, ainsi que les deux quantités de travail $P \times Aa'$ et $P \times Bb'$.

TROISIÈME CAS. — Le mouvement étant quelconque, supposons que la droite AP d'une force quelconque ait pris, en vertu de ce mouvement, la position A_1B_1, et que deux points quelconques A et B de la direction de la force se soient transportés en a et b, sur la droite A_1B_1 (fig. 39). Ce mouvement peut être regardé comme décomposé : 1° en un mouvement de rotation autour d'un point quelconque O, centre d'un cercle tangent aux deux positions infiniment voisines de la droite; 2° en un mouvement de translation qui s'opère sur la deuxième position. Ainsi, Aa et Bb étant les véritables chemins des deux points d'application quelconques A et B, ces chemins seront encore les véritables espaces décrits si ces deux points parcourent d'abord les petits arcs concentriques AA_1 et BB_1 autour de O, et si les mêmes points A et B se transportent ensuite en a et b par un mouvement commun de translation. Projetons ces divers mouvements sur la direction AP de la force. $P \times Aa'$ sera sa quantité de travail d'après le mouvement Aa du point d'application A, et $P \times Bb'$ celui de la même force estimé d'après le mouvement du point B. Or, on a

$$Aa' = A_1'a' - A_1'A, \text{ et } Bb' = B_1'b' - B_1'B.$$

En multipliant la force P par $A_1'a'$ ou par $B_1'b'$, les travaux élémentaires seraient ceux qui auraient lieu s'il n'y avait eu qu'un simple mouvement de translation dans le sens de AB, et nous avons démontré par le deuxième cas qu'ils seraient égaux. Donc, on a

$$A_1'a' = B_1'b'.$$

De même, les produits $P \times A_1'A$ et $P \times B_1'B$ sont égaux, attendu qu'ils mesurent les quantités de travail dues au mouvement de A et B dans l'hypothèse où la droite AB aurait un simple mouvement de rotation autour de O. D'où l'on tire

$$A'_1A = B_1'B,$$

et, par suite, $A_1'a' - A_1'A = B_1' - B_1'B$,

ou $Aa' = Bb'$, ou enfin $P \times Aa' = P \times Bb'$.

Ainsi, la relation qui a lieu entre la quantité de travail de la résultante et le travail total des composantes subsiste dans tous les cas, quels que soient

les points d'application de ces forces et la nature de leurs mouvements.

18. *Cas où le moment de la résultante est nul.* — Nous avons fait voir (2e partie, 14) que, r, p, q étant les bras de levier de la résultante R et de ses deux composantes P, Q, on avait $Rr = Pp \pm Qq$ (fig. 35). On remarquera d'abord que le moment de la résultante Rr ne peut être nul sans que les moments des composantes Pp et Qq ne soient égaux et de signes contraires. Or, le produit Rr devient 0, ou $R = 0$, ou pour $r = 0$. Dans le premier cas la résultante est nulle, et il est évident que l'équilibre du corps subsiste de lui-même. Dans le deuxième cas, la perpendiculaire r, abaissée du centre de rotation sur la direction de la résultante, étant réduite à zéro, cela indique que la direction de cette dernière passe par le point de rotation ou par le point fixe. D'un autre côté, l'égalité des moments des composantes revenant à l'égalité des quantités de travail de ces forces, et ces quantités s'entre-détruisant puisqu'elles sont de signe contraire, on voit que le corps est en équilibre, autour d'un point fixe, sous l'action de deux forces, lorsque leur résultante passe par ce point.

II.

FORCES PARALLÈLES.

19. *Analogie entre deux forces concourantes et deux forces parallèles.* — Les principes qui ont été exposés sur la combinaison de deux forces concourantes P et Q agissant contre un corps de forme quelconque nous ont appris, 1° que leur résultante R concourt au point O (fig. 40) d'intersection des deux composantes; 2° que le moment de la résultante pris par rapport à un point K quelconque, situé dans le plan des forces, est égal au moment total des composantes, c'est-à-dire à la somme ou à la différence de leurs moments, selon qu'elles tendent à faire tourner le corps autour d'un point K dans le même sens ou dans des sens différents. Les propriétés indépendantes du point de l'éloignement du point commun d'application O ne cessent point d'avoir lieu lorsque ce point de convergence est placé à une très-grande distance, ou lorsque les forces deviennent sensiblement parallèles. On peut même regarder ces forces comme telles dès que leur point de concours est suffisamment éloigné. On sait, par exemple, que l'action de la gravité converge vers le centre de la terre et que trois corps pesants liés entre eux par des barres rigides sont soumis à des forces analogues à des forces précédentes P, Q, R; toutefois on regarde ces forces de pesanteur comme parallèles, et alors nos théorèmes leur deviennent applicables. Ainsi, la résultante de deux forces parallèles est située dans leur plan et leur est parallèle; son moment par rapport à un point quelconque de leur plan est égal au moment total des deux composantes.

20. *Résultante de deux forces parallèles, croissant par rapport à un point.* — Passant ainsi à la limite de deux forces concourantes, considérons deux forces parallèles P et Q appliquées aux point A et B d'un corps (fig. 41). Soit pris sur leur plan un point arbitraire K, et une perpendiculaire à K abaissée de ce point sur ces forces. Enfin R est supposée être leur résistance. On aura

$$R \times Kc = \overline{P \times Kac} + \overline{Q \times Kb},$$

parce que les deux forces P et Q tendent à faire tourner le corps du même côté autour du point K. Ce résultat étant indépendant de la position de K, imaginons qu'il soit placé en a. On a

$$Ka = 0, K = ac \text{ et } Kb = ab,$$

l'expression précédente devient $R \times ac = Q \times ab$. Si le point K est transporté en b, on a $Kc = bc$, $Ka = ab$ et $Kb = 0$. Cette substitution étant faite dans l'égalité générale des moments, on a $R \times bc = P \times ab$. Ajoutant à cette dernière l'égalité particulière $R \times ac = Q \times ab$, on trouve $R(ac + bc) = P + Q)\, ab$, ou $R = P + Q$ à cause de $ac + cb = ab$. Donc la résultante de deux forces parallèles agissant dans le même sens est égale à leur somme. Supposons que le point K soit placé au point c; les forces P et Q tendront à faire tourner le corps en sens contraire autour. Les moments de P et Q seront alors de signes différents, et leur égalité générale deviendra $R \times Kc = \overline{P \times Ka} - \overline{Q \times Kb}$. D'ailleurs, dans la position du point K en c, on a $Kc = 0$, ou $R \times Kc = 0$, $Ka = ac$ et $Kb = bc$. Faisant ces substitutions dans l'égalité générale, on trouve $P \times ac = Q \times bc$; ce qui nous apprend que la résultante partage l'intervalle des points d'application des composantes en parties réciproquement proportionnelles à ces forces lorsque ces points sont situés sur une droite perpendiculaire à leur direction. Si les deux forces P et Q, au lieu d'être dirigées dans le même sens, sont dirigées dans des sens opposés, le moment de la résultante devient ici égal à la différence des moments des composantes, et enpassant par une série d'opérations analogues aux précédentes, on trouve que la résultante R est égale à $P - Q$, c'est-à-dire à la différence des composantes, et qu'elle agit dans le sens de la plus grande.

21. *Extension des propriétés des forces parallèles, leurs points d'application étant quelconques.* — Ces théorèmes ne sont encore démontrés que lorsque les points d'application des forces P, Q, R appartiennent à une même droite Kb, perpendiculaire à leur direction ; mais les deux composantes P et Q appliquées à un corps ont le plus généralement leurs points d'application sur une droite rigide AB, oblique par rapport à la direction de ces forces. Soit pris un point quelconque K′ (fig. 42) sur cette droite, et abaissons une perpendiculaire K′B″ à ces forces. Les points A″, B″, C″ des composantes et de la résultante R satisferont aux relations précédentes, et comme les par-

ties K′C″, K′A″ et K′B″ sont proportionnelles aux parties obliques K′C, K′A et K′B, on aura encore

$$R \times K'C = \overline{P \times K'A} + \overline{Q \times K'B}.$$

Quant au point d'application de la résultante sur le corps, après l'avoir déterminé en C sur la droite AB, on pourra supposer que la résultante est appliquée en c, à l'extérieur du corps. On remarquera que, dans l'égalité $R \times K'C = \overline{P \times K'A} + \overline{Q \times K'B}$, il ne s'agit plus seulement des perpendiculaires abaissées d'un même point sur les composantes parallèles et sur leur résultante ; elles sont ici remplacées par les simples distances de leurs points respectifs d'application à un point quelconque K′, situé comme eux sur une même ligne quelconque.

22. *Moment de deux forces parallèles par rapport à une droite.* — Lorsque deux forces sont parallèles, on ne prend pas seulement leurs moments par rapport à un point et on emploie souvent leurs moments par rapport à une droite. De tels moments sont le produit de chaque force et de la perpendiculaire abaissée de son point d'application sur la droite ou *axe des moments.* Ainsi, A, B (fig. 43) étant les points d'application des forces PQ et de leur résultante R, LK′ l'axe des moments qui rencontre en K′ la droite AB de leurs points d'application, on a

$$R \times K'C = \overline{P \times K'A} + \overline{Q \times K'B},$$

ou

$$R = \overline{P \times \frac{K'A}{K'C}} + \overline{Q \times \frac{K'B}{K'C}}.$$

Soient AA′, BB′ et CC′ les perpendiculaires abaissées de ces points sur LK′, on voit que ces perpendiculaires sont proportionnelles à K′A, K′B, K′C, et que l'on a

$$\frac{K'A}{K'C} = \frac{AA'}{CC'}, \text{ et } \frac{K'B}{K'C} = \frac{BB'}{CC'};$$

d'où

$$R = \overline{P \times \frac{AA'}{CC'}} + \overline{Q \times \frac{BB'}{CC'}},$$

et, par suite,

$$R \times CC' = \overline{P \times AA'} + \overline{Q \times BB'}.$$

Donc, le moment de la résultante par rapport à une droite est égal au moment analogue totale des composantes.

23. *Moment de deux forces parallèles par rapport à un plan.* — En abaissant des points d'application de deux forces parallèles et de leur résultante, des perpendiculaires à un plan que l'on nomme *Plan des moments*, on reconnaît, comme pour les moments par rapport à une droite, que le moment de la résultante par rapport à un plan est égal au moment total de ses composantes.

24. *Forces parallèles en nombre quelconque.* — Supposez que les forces parallèles soient en nombre quelconque, et que vous en ayez, par exemple,

cinq à six. Cherchez la résultante de deux quelconques d'entre elles ; composez cette résultante avec la troisième force, puis cette résultante des trois premières avec la quatrième, puis encore la résultante des quatre premières avec la cinquième, et ainsi de suite. La résultante totale ainsi obtenue est égale à la somme des forces composantes ou à la différence entre la somme de celles qui agissent dans un sens et la somme de celles qui agissent dans un sens opposé. De plus, son action a lieu du côté de la plus grande des deux sommes. On voit encore que le moment de la résultante totale est égal au moment total des composantes, etc. — Des hommes qui font effort sur des cordons parallèles, des chevaux qui tirent sur leurs traits attachés à des palonniers, sont des exemples de forces parallèles qui se présentent fréquemment dans la pratique.

25. *Travail de la résultante de plusieurs forces parallèles.* — Je suppose qu'un corps soit tiré dans un sens par un certain nombre de forces parallèles P, Q, R (fig. 44), et dans un autre sens par les forces parallèles aux premières P′, Q′, R′, et qu'il soit entraîné dans le sens des forces P, Q, R. Il est visible que le chemin décrit par le point d'application d'une force est ici le même quelle que soit la force ; et qu'ainsi son travail sera donné par le produit de cette force et du petit chemin commun à tous les points d'application. Le travail total est, comme on sait, égal à la somme des travaux des forces P, Q, R qui agissent dans un sens, diminuée de la somme des travaux des forces P′, Q′, R′ qui agissent dans le sens opposé, c'est-à-dire, qu'il équivaut au petit chemin commun multiplié par la somme ou la différence de toutes les composantes, ou enfin par la résultante. Or, le produit du petit chemin commun et de la résultante n'est autre chose que le travail de cette dernière. Donc le travail de la résultante d'un nombre quelconque de forces parallèles est égal au travail total des composantes.

26. *Emploi des moments pour trouver la position de la résultante.* — D'après les théorèmes sur les moments, on sait que le moment de la résultante par rapport à un plan est égal au moment total des composantes. Appelons K ce moment total, r la distance du point d'application de la résultante au plan. On a

$$R \times r = K \text{; d'où } r = \frac{K}{R}.$$

r est précisément la distance entre le plan des moments et un autre plan parallèle sur lequel la résultante est située. Si l'on connaissait encore le moment total des composantes par rapport à un autre plan, on aurait, comme précédemment, un nouveau plan devant contenir la résultante, en sorte que cette dernière serait à l'intersection des deux plans ainsi obtenus.

27. *Emploi de la romaine.* — La romaine consiste en un fléau qui tourne autour d'un axe C (fig. 45) suspendu à un point fixe et dont l'un des bras reçoit à son extrémité A le corps P dont on veut trouver le poids, tandis

que l'on applique sur l'autre bras un poids constant Q à une distance convenable BC. Pour qu'il y ait équilibre, il faut (2ᵉ partie, 18) que la résistance des forces P et Q passe par le point fixe C, ou que l'on ait $P \times AC = Q \times BC$. D'où $BC = \frac{P}{Q} \times AC$, et par suite $BC = P \times AC$. En supposant que le poids étalon Q soit de 1 kilogr., si le corps P pèse 1^k, 2^k, 3^k, 4^k, 5^k,... les distances auxquelles le poids constant lui fera équilibre seront AC, 2AC, 3AC, 4AC, 5AC,. Ainsi, la division de la romaine se borne à porter sur son bras le plus long des divisions égales au bras le plus court: si ce dernier est de 1 centimètre les divisions de l'instrument seront espacées entre elles de 1 centimètre. Ainsi, par exemple, lorsque le poids curseur sera à 15 centimètres du point C le corps pèsera 15 kilogr. La construction de la romaine est, comme on le voit, basée sur un principe fort simple; elle donne lieu néanmoins à des considérations délicates, sur lesquelles nous reviendrons quand il sera question du levier.

III.

CENTRE DE GRAVITÉ DES CORPS.

28. *Centre des forces parallèles.* — Quel que soit l'angle des deux forces parallèles P, Q avec la droite AB (fig. 46), qui passe par leur point d'application, l'intensité de leur résultante R et la position C de son point d'application sont les mêmes, parce que l'on a toujours $R = P + Q$, et $P \times AC = Q \times BC$. Par conséquent, ce point C demeurera invariable, si les composantes, restant parallèles entre elles, viennent à tourner autour de leurs points d'application respectifs. Pareillement, si l'on a trois forces P, Q, S, et que, joignant le point d'application C de la résultante R des deux premières au point D d'application de la troisième, on cherchera celui de la résultante des deux forces R et S, ou des trois forces données P, Q, S; on reconnaîtra que le point O où leur résultante T est appliquée, est indépendant de l'inclinaison des trois composantes autour de leur point d'application. On étendrait facilement ce raisonnement à un nombre quelconque de forces parallèles, lesquelles auront un point par lequel leur résultante passera constamment. Ce point est ce qu'on nomme *Centre des forces parallèles.*

29. *Centre de gravité.* — Un corps quelconque se compose d'une infinité de parties pesantes qui sont comme les points d'application d'autant de forces verticales ou parallèles. Leur résultante est ici une force égale à leur somme ou au poids total, et son point d'application s'obtiendra par la combinaison de ces forces parallèles entre elles. Ce point, qui doit appartenir au corps comme les points d'application des forces parallèles dues à la pesanteur, s'appelle CENTRE DE GRAVITÉ.

30. *Détermination pratique du centre de gravité d'un corps.* — Le centre

de gravité d'un corps étant le centre de toutes les forces verticales qui sollicite les molécules pesantes dont il se compose, il est évident qu'il doit demeurer invariable lorsque ces forces sans cesser d'être parallèles, s'inclinent autour de leur point d'application. Au lieu de faire tourner les forces, que l'on fasse au contraire tourner le corps. Dans ce mouvement les forces conserveront leur direction verticale, et leur résultante, c'est-à-dire le poids total, exercera toujours son action suivant une verticale passant par le même point, c'est-à-dire par le centre de gravité du corps. De là résultent deux moyens fort simples de le trouver quand le corps est invariable. Un corps suspendu à un fil s'arrange de telle sorte que l'effort pour le soutenir fait équilibre à la résultante de tous les points partiels des molécules de ce corps. Ainsi, la direction AC (fig. 47) du fil qui le supporte est immédiatement opposée à la verticale qui passe par le centre de gravité G, ou bien le point C par lequel le corps est suspendu au fil et le centre de gravité G appartiennent successivement à la verticale AC qui passe par le point d'attache extérieur A. Si l'on change le point du corps C par lequel il est suspendu au fil, on aura autant de lignes droites qui concourront au centre de gravité.

Par la même raison, il est possible de soutenir le corps sur une pointe (fig. 48) toutes les fois que la verticale de son centre se confond avec celle de la pointe, et toutes les positions du corps qui satisfont à cette condition donnent autant de lignes devant contenir le centre de gravité. Les points supérieur ou inférieur où deux de ces lignes percent respectivement la surface du corps étant connus, on conçoit que des ouvertures rectilignes pratiquées d'outre en outre donneraient le centre de gravité par leur intersection commune. Reste à trouver les points inférieur et supérieur où une même verticale concourant au centre de gravité d'un corps rencontre sa surface. Suspendez ce corps à un fil, alignez de part et d'autre deux fils à plomb sur le fil de suspension, et faites tracer sur la surface du corps, avec un crayon, la section comprise dans ce plan vertical. Recommencez l'opération par un nouveau plan vertical passant par le même fil de suspension, les deux sections ainsi obtenues se croiseront aux deux points cherchés.

31. *Recherche du centre de gravité par le calcul ou par la géométrie.* — Cette méthode devient impraticable pour les corps très-lourds, ou pour ceux qui sont fixes, ou pour ceux qui n'existent pas encore et dont la construction est seulement en projet. En général, lorsque la forme d'un corps est définie géométriquement ou par un dessin, voici comment on peut connaître son centre de gravité. Il faut diviser le corps par une suite de plans, chercher le moment du poids de chaque partie par rapport à un plan quelconque, et prendre la somme de tous ces moments; cette somme, d'après ce qu'on a vu dans la théorie des forces parallèles, est égale au moment du poids total, c'est-à-dire, au produit de ce poids multiplié par la distance

de son centre de gravité à un plan arbitraire. Partant cette distance sera donnée par le quotient de la somme des moments partiels divisée par le poids total. Si l'on opère de même par rapport à un deuxième et un troisième plan arbitraire, on aura deux nouvelles distances du même centre. Ainsi, ce dernier sera situé à l'intersection des trois plans respectivement parallèles à ceux des moments. Mais cette méthode, déjà fort longue en soi, peut être abrégée selon les circonstances, surtout quand il s'agit de trouver le centre de gravité des corps *homogènes.* On nomme ainsi ceux dont deux parties quelconques pèsent le même poids à égal volume.

32. *Centre de gravité des corps réguliers.* — L'expérience apprend qu'une barre AB (fig. 49) parfaitement homogène, en bois ou en fer, que l'on suspend par son milieu C à un fil, y demeure en équilibre. Le centre de gravité de cette barre est donc situé au milieu de sa longueur. On voit aussi sans difficulté qu'il doit être dans le milieu de l'épaisseur. Si la barre supporte à ses deux bouts une sphère M, elle demeure encore en équilibre quand elle est suspendue par son milieu. Le centre d'une sphère en est également le centre de gravité, car en la suspendant à un fil EA par un des points quelconques de sa surface, la verticale du fil passe constamment par le centre C de la sphère. C'est un principe général que le centre de gravité de tous les corps réguliers et homogènes se confond avec leur centre de figure. Voilà pourquoi un prisme droit, ou un cylindre droit ont leur centre de gravité sur le milieu de leur longueur, et que ceux d'un cercle ou d'une droite sont placés l'un au propre centre du premier, l'autre au milieu de la droite. C'est ici le lieu d'observer que le centre de gravité d'une surface n'est autre chose que celui d'un corps d'une très-petite épaisseur, et tel qu'une feuille de tôle, de papier, etc. La même considération s'applique à une ligne droite dont l'épaisseur et la largeur sont très-petites par rapport à sa longueur.

33. *Centre de gravité des corps symétriques.* — On dit qu'un corps homogène est symétrique par rapport à un plan, lorsque ce dernier coupe en deux parties égales toutes les perpendiculaires qui lui sont abaissées et qui sont terminées à deux extrémités opposées du corps. Il est symétrique par rapport à une droite, quand il a deux plans de symétrie passant par cette droite. Une surface plane est symétrique par rapport à une droite, lorsque celle-ci coupe également les perpendiculaires terminées de part et d'autre au contour de la surface. Dans tous les cas, *le centre de gravité de ces corps ou surfaces est situé dans leur plan ou dans leur droite de symétrie.* Considérons, par exemple, une courbe ayant AB (fig. 50) pour droite de symétrie, et pour laquelle on a déterminé les centres de gravité G et G′ des moitiés supérieure et inférieure. Ces deux moitiés, étant rabattues l'une sur l'autre, leurs centres de gravité G et G′ devront coïncider : ce qui revient à dire, qu'avant le rabattement ces mêmes centres étaient situés sur une droite GG′ perpendiculaire à AB et à des distances égales de cet axe. Cela posé, si

l'on concentre ces deux moitiés à leurs centres respectifs G et G′, GG′ n'est plus qu'une droite terminée par deux points matériels dont le centre de gravité est évidemment à son milieu O ou sur AB.—Un raisonnement analogue pourrait être appliqué à un corps à trois dimensions symétriques par rapport à un plan. Le centre de gravité d'une surface qui a deux axes de symétrie, est à l'intersection de ces deux axes. Le grand axe et le petit axe d'une ellipse sont des axes de symétrie qui se coupent au centre de l'ellipse. Ce qui indique pourquoi ce centre est aussi celui de gravité de l'aire plane contenue dans cette courbe. —Le rectangle a aussi son centre de gravité à l'intersection de ses diagonales, parce que cette intersection coïncide avec l'intersection des perpendiculaires qui passent par les milieux des côtés opposés. Lorsqu'un volume a une droite de symétrie ou deux plans de symétrie, nous avons dit que son centre de gravité devait se trouver sur cette droite. — Le cylindre droit à base elliptique a deux plans de symétrie déterminés par les grands et petits axes de ses deux bases opposées. Son centre de gravité se trouve donc sur la droite qui joint leur centre G (fig. 51), et il est évident qu'il sera en même temps au milieu de cette droite.

D'autres corps sont partagés symétriquement d'une infinité de manières. Telle est la sphère dont tous les plans de symétrie passent par le centre; c'est pourquoi ce dernier en est aussi le centre de gravité.

34. *Centre de gravité des corps réguliers non homogènes.* — Si le corps régulier n'est pas homogène, on le regarde d'abord comme tel, et le centre de gravité O (fig. 52), obtenu dans cette hypothèse, donne lieu à une première approximation. On supposera ensuite que le poids du corps, supposé homogène, y soit concentré; après quoi, retranchant ce poids p du poids total P, on observera que la différence $P - p$ est le reste du poids négligé jusqu'alors à l'égard de la partie plus pesante. Soit O′ le centre de gravité du volume de cette dernière, il faudra partager la droite OO′ par un point K, tel que l'on ait

$$p \times OK = (P - p)\, KO',$$

et le point K sera le centre de gravité réel.

35. *Centre de gravité des corps coupés par tranches parallèles.* — Quand on peut partager un corps en une suite de tranches parallèles et connaître le centre de gravité de chacune d'elles, le centre de gravité de tout le corps est sur la ligne qui contient les centres de toutes les tranches. En effet, composez deux de ces tranches entre elles, puis leur résultante avec une troisième et ainsi de suite, et vous reconnaîtrez que le centre de gravité total doit appartenir à cette ligne.

36. *Parallélogramme, parallélipipède cube.* — Soit, par exemple, le parallélogramme ABCD (fig. 53), décomposé en une suite de tranches trèsétroites et parallèles au côté AB, le centre de gravité de chacune d'elles étant à leur milieu, et tous ces milieux étant situés sur la droite EF qui

passe par les milieux des côtés opposés AB et DC, il en résulte que le centre de gravité du parallélogramme doit se trouver sur cette droite, et comme on peut voir aussi de la même manière qu'il est contenu sur la droite HI qui joint les milieux des deux autres côtés opposés AD et BC, il est donc à leur intersection O. — Un raisonnement analogue conduirait à prouver que le centre de gravité d'un cube ou d'un parallélipipède quelconque est à l'intersection des trois droites qui passent respectivement par le centre de gravité de deux faces opposées.

37. *Triangle.* — Le triangle ABC (fig. 54) étant partagé en tranches très-minces et parallèles au côté AC, on reconnaît comme précédemment que les centres de ces tranches sont tous compris sur la ligne BD qui va du sommet B au milieu D du côté AC, et qu'ainsi cette droite doit contenir le centre de gravité du triangle. Ce même centre, par une raison analogue, doit également appartenir aux deux droites qui joignent chacun des deux autres sommets A et C aux milieux F et E des côtés opposés BC et AB. Donc enfin le centre de gravité d'un triangle est à l'intersection commune des trois droites menées de chaque sommet au milieu du côté opposé. Il est aussi celui du système de trois boules égales placées aux sommets du même triangle; car le centre particulier de gravité de deux boules placées aux extrémités de la droite AC est sur le milieu D de cette droite, et ce dernier point sera tel qu'on pourra y concentrer les deux boules. Joignons le point D à la troisième boule B par une droite BD : celle-ci contiendra évidemment le centre de gravité des trois boules ; et comme on reconnaîtrait semblablement que ce même centre appartient encore aux droites CE et AF, on voit qu'il coïncide avec celui du triangle. Remarquons que, puisqu'il y a deux boules à l'extrémité D de la droite BD, et une seule au sommet B, le centre de gravité G de toutes trois partagera la ligne BD en deux parties, telles que

$$DG = \tfrac{1}{2}\,BG = \tfrac{1}{3}\,AB.$$

Donc enfin le centre de gravité d'un triangle est situé sur la droite qui passe par le milieu de sa base et par le sommet opposé; il se trouve sur le premier tiers de cette droite à partir de la base. On voit encore que sa hauteur au-dessus de la base est le tiers de la hauteur du sommet opposé.

38. *Quadrilatère quelconque.* — La règle suivante a pour but de trouver le centre de gravité d'un quadrilatère quelconque ABDC (fig. 55). Menez les deux diagonales AD et BC qui se coupent en F; portez la partie la plus courte AF de l'une d'elles AD sur elle-même de D en H, et après avoir joint le point H au milieu E de l'autre diagonale BC, divisez l'intervalle EH en trois parties. Le centre de gravité G du quadrilatère sera au premier tiers de cet invervalle à partir du milieu de la deuxième diagonale.

39. *Pyramide triangulaire.* — Une suite de plans parallèles à la base ABC de la pyramide triangulaire SABC (fig. 55 *bis*) donne lieu à des tranches triangulaires parfaitement semblables à cette base, et tous leurs centres de gravité seront sur la droite SG′ qui va du sommet S au centre de gravité G′

de la face ABC, parce qu'ils sont les uns et les autres semblablement placés. Ainsi la droite SG′ doit contenir le centre de gravité de la pyramide. Comme il y a quatre sommets et quatre bases dans la pyramide triangulaire et que celle-ci peut se décomposer en tranches parallèles à toutes ces bases, on voit que *son centre de gravité est à l'intersection des quatre droites qui joignent chaque sommet au centre de gravité de la base opposée.* Ce centre de gravité est aussi celui de quatre boules égales respectivement placées au sommet de la pyramide. Car on reconnaît sans peine que le centre de gravité des trois premières A, B, C coïncide avec celui du triangle ABC, et que celui de toutes quatre appartient à la droite qui joint le sommet S au centre de gravité de la base ABC. Maintenant que nous savons que le centre de gravité de la pyramide est précisément celui des quatre boules égales, nous pouvons en trouver la position sur SG′ en observant que trois d'entre elles peuvent être considérées comme concentrées en G′ et que la quatrième est seule située sur l'autre extrémité S de la droite. Ainsi le point G doit partager la droite SG′ en parties réciproquement proportionnelles aux poids que ses deux bouts supportent et qui sont triples l'un de l'autre ; donc, on a

$$GG' = \tfrac{1}{3}\,SG, \text{ ou } GG' = \tfrac{1}{4}\,S'G' ;$$

d'où il résulte que *le centre de gravité d'une pyramide triangulaire est sur la droite qui joint un sommet au centre de gravité de la base opposée et au premier quart de cette droite à partir de la base.* Il est encore évident que la hauteur de ce même centre de gravité au-dessus de la base est le quart de la hauteur du sommet opposé.

40. *Pyramide à base quelconque.* — La proposition précédente est également applicable à une pyramide dont la base est un polygone (fig. 56). Non-seulement son centre de gravité est sur la droite qui joint le centre de gravité de la base au sommet, mais encore on peut décomposer la base en une suite de triangles qui serviront eux-mêmes de bases à pareil nombre de pyramides triangulaires dont la somme forme la pyramide totale. Ces pyramides ayant pour sommet commun celui de la pyramide donnée, on voit que tous leurs centres de gravité, ainsi que celui de cette dernière, seront situés sur un plan parallèle à celui de la base et élevés du quart de la hauteur de celle du sommet. Donc, enfin, *le centre de gravité cherché est au premier quart à partir de la base sur la droite qui joint le centre de gravité de la base au sommet opposé.* De la pyramide on passe au cône à base quelconque. Pour avoir le centre de gravité de celui-ci il suffit de joindre le centre de gravité de la base au sommet par une droite et de déterminer, à partir de la base, le premier quart de cette droite.

41. *Polyèdre quelconque.* — Puisque tout polyèdre se décompose en pyramides triangulaires et qu'en vertu du théorème des moments, le moment du poids ou du volume de ce polyèdre, par rapport à un plan, est égal à la somme du moment des poids ou des volumes de ces pyramides, il est tou-

jours possible de trouver la position du centre de gravité de ce polyèdre par rapport à trois plans quelconques.

42. *Corps de forme quelconque.* — Lorsqu'un corps est terminé par des surfaces courbes, ou une aire plane par une courbe quelconque, il faut décomposer le corps ou la surface en petites parties de forme analogue aux précédentes, calculer chaque moment partiel par rapport à un plan ou à une droite, et diviser la somme de ces moments par le volume total ou par la surface que l'on considère. S'il s'agit, par exemple, d'obtenir le centre de gravité de l'aire plane quelconque C*abDdc* (fig. 57), tirons dans son plan une droite quelconque AB, et partageons cette aire en une suite de tranches très-minces et perpendiculaires à cette droite. La tranche *abcd* pourra être regardée comme un rectangle dont le centre de gravité g est à son milieu. Son moment partiel sera égal à $abdc \times gi$, gi étant la longueur de la perpendiculaire abaissée de ce centre de gravité, ou une moyenne entre les distances af et cf des extrémités de la tranche à la droite AB. Prenant ensuite la somme de tous les moments partiels trouvés de la même manière, on la divisera par l'aire totale mesurée d'après la méthode de Thomas Simpson, et le quotient donnera la distance du centre de gravité cherché à la droite AB. On recommencera l'opération par rapport à une autre droite, pour que la position de ce centre de gravité soit complètement arrêtée.

43. *Utilité du centre de gravité pour la mesure de certains volumes.* — La considération du centre de gravité est très-utile pour la cubature de certains volumes, fort difficiles à évaluer par les méthodes ordinaires. Tels sont la vis, l'échiffre d'un escalier. Telle est encore la surface de révolution engendrée par le mouvement d'une courbe plane CDE (fig. 58) autour d'une droite AB situé dans son plan. Supposez cette courbe découpée en petites parties rectangulaires dont les côtés soient perpendiculaires et parallèles à l'axe. Chaque rectangle engendrera autour de l'axe un petit anneau partiel, et la somme de tous ces anneaux réunis donnera le volume total de la surface de la révolution. Soit r la distance depuis l'axe jusqu'au centre d'un petit rectangle quelconque. On sait que le volume d'un anneau dont le profil est un rectangle a pour mesure l'aire a de ce rectangle multipliée par la circonférence moyenne de l'anneau, laquelle est ici $2\pi r$ (*π est le rapport $\frac{22}{7}$ de la circonférence au diamètre*) : car la base circulaire d'un tel anneau étant développée en ligne droite forme un trapèze dont la longueur moyenne est précisément celle de la circonférence moyenne $2\pi r$ développée. Donc, enfin, le volume de l'anneau élémentaire engendré par le rectangle que l'on considère est exprimé par le produit $2\pi r \times a$, ou $2\pi \times ar$. Les anneaux qu'engendrent d'autres parties rectangulaires a', a'',.... ont de même pour expression de leurs volumes respectifs, $2\pi \times a'r'$, $2\pi \times a''r''$. Partant le volume total de la surface de la révolution sera égal à

$$2\pi\,(ar + a'r' + a''r'' + \ldots.).$$

Or, le produit ra étant le moment d'un élément plan par rapport à l'axe, la somme $ar + a'r' + a''r''$ sera égale au moment de l'aire totale A de la courbe, ou au produit de cette aire et de la distance R de son centre de gravité à l'axe. Par conséquent le volume total devient $2\pi R \times A$; ce qui indique que le volume d'une surface de révolution est donné par le produit de l'aire de sa courbe génératrice et de la circonférence qu'a décrite le centre de gravité de cette aire. Si, au lieu d'une circonférence, le centre de gravité n'en décrivait que le dixième, le quinzième, etc., le volume engendré serait réduit au dixième, au quinzième, de celui qui aurait lieu pour une circonférence complète; mais ce volume partiel n'en serait pas moins donné par le produit de l'aire totale de la courbe et du chemin qu'a parcouru son centre de gravité. — Cette dernière remarque s'applique aux corps à profil constant, aux échiffres d'escalier, toutes les fois que ce profil demeure perpendiculaire à une certaine ligne droite ou courbe dans toutes ces positions. Car, chaque portion du corps compris entre deux profils voisins est une véritable surface de révolution qui a le profil pour aire génératrice et dont l'axe est à l'intersection des deux profils, en sorte que ce volume partiel sera donné par le produit du profil et du petit chemin qu'a décrit son centre de gravité dans l'intervalle des deux positions. D'où l'on voit que le volume total se compose du produit de l'aire du profil multiplié par la somme de tous les petits chemins ou par le chemin total que le centre de gravité de l'aire a parcouru. Veut-on avoir le volume d'un échiffre d'escalier contourné en hélice? on calculera l'aire de la section perpendiculaire à l'hélice moyenne (fig. 59), c'est-à-dire, à l'hélice engendrée par le centre de gravité de la section verticale et rectangulaire de l'échiffre. Puis on multipliera l'aire de la section par la longueur de cette hélice, et ce produit sera le volume cherché. — Les déblais d'un fossé en excavation sont ordinairement des volumes dont les profils sont constants. On les évalue en multipliant l'aire du profil constant par le chemin de son centre de gravité.

IV.

MOUVEMENT DE TRANSPORT PARALLÈLE D'UN CORPS OU D'UN SYSTÈME DE CORPS.

44. *Force totale de l'inertie d'un corps ou d'un système de corps dans un mouvement de transport parallèle.* — Le mouvement d'un corps ou d'un système de corps est dit de *transport parallèle*, lorsque tous ses points ou toutes ses parties décrivent simultanément et dans un très-petit temps des chemins égaux et parallèles. Appelons v le degré de vitesse commun imprimé à toutes les parties par les forces motrices pendant le temps t. La force d'inertie f de

l'une d'elles dont le poids est p sera mesurée par $\frac{p}{g} \times \frac{v}{t}$. Quant à la force d'inertie f' d'une autre partie du poids p', elle sera $\frac{p'}{g} \times \frac{v}{t}$, attendu que le degré de vitesse imprimé à cette dernière est le même que celui qui a été imprimé à la première pendant le temps t. De plus, comme chaque force d'inertie partielle est située dans la direction du mouvement propre de chaque partie et que tous ces mouvements sont eux-mêmes parallèles, on voit que toutes les forces d'inertie partielles $f, f', \ldots$ seront aussi parallèles, et que leur résultante, c'est-à-dire la force d'inertie totale F du corps ou du système, sera égale à la somme $f + f' + f''$, ou à. . . . . $\frac{v}{t}\left(\frac{p + p' + p'' \ldots}{g}\right)$; leurs poids $p + p' + p'' + \ldots$ le poids total P, et $\frac{P}{g}$ la masse totale M. Donc, enfin, on aura

$$F = M \times \frac{v}{t}.$$

Reste à trouver le point d'application de la force F. Or, il faut remarquer que les forces d'inertie partielles $f, f', f'', \ldots$ seront proportionnelles aux poids $p, p', p'', \ldots$ des parties auxquelles elles sont appliquées, et qu'ainsi le point d'application de la résultante F devra se confondre avec le centre d'application des poids $p, p', p'', \ldots$ c'est-à-dire avec le centre de gravité du poids entier du système. Donc, la force totale d'inertie d'un corps ou d'un système de corps mus d'un mouvement parallèle se mesure par la masse entière du corps que l'on multiplie par le rapport du petit degré de vitesse imprimé et du petit temps pendant lequel il a été communiqué. Enfin, cette force totale d'inertie a son point d'application au centre même de gravité du corps ou du système de corps. C'est par ce motif qu'Euler avait aussi nommé le centre de gravité, *centre d'inertie*. Toutefois ces deux points ne coïncident que quand les mouvements sont parallèles, et cette coïncidence cesse pour toutes les autres circonstances de mouvement.

45. *Quantité totale de mouvement d'un corps.* — En désignant par V la vitesse du mouvement parallèle d'un corps supposé uniforme dans un instant quelconque ; on sait que la quantité de mouvement d'une de ses parties de poids p est $\frac{p}{g} \times V$. Pour une autre partie de poids p', cette quantité de mouvement serait $\frac{p'}{g} \times V$, et comme toutes ces quantités de mouvement sont parallèles, leur somme donnera la quantité de mouvement totale du corps, laquelle aura pour expression $\left(\frac{p + p' + p'' + \ldots}{g}\right) V$, ou $M \times V$. Ainsi, la quantité de mouvement totale d'un corps mû parallèlement à lui-

même est égal à la masse de ce corps multipliée par la vitesse commune à tous ses points.

46. *Mouvement d'un corps lorsque la force motrice est appliquée à son centre de gravité.* — Lorsqu'un certain degré de vitesse v est appliqué à tous les points d'un corps pendant un très-petit temps t, on peut calculer (2e partie, 44) la force d'inertie totale F de ce corps, puisque, M étant la masse de ce dernier, on a

$$F = M \times \frac{v}{t}.$$

Nous savons en outre que cette force d'inertie est appliquée selon la direction commune du mouvement, au centre de gravité du corps. Par conséquent, si l'on suppose qu'à l'instant où le degré v de vitesse va naître, on applique en sens contraire du mouvement et au centre de gravité une force précisément égale à F, il est évident que cette force introduite arrêtera le mouvement. Cela posé, si l'on applique au centre de gravité d'un corps une force motrice X (fig. 60), elle lui imprimera un mouvement de transport parallèle. Car cette force X sera égale et directement contraire à la force d'inertie totale F qu'elle fait naître. Autant il y aura de parties du corps, autant il y aura de petites forces partielles f, f', f'',.... dans lesquelles la force F se subdivisera et qui toutes seront proportionnelles aux poids de ces parties. Ainsi, $f = \frac{m}{M} F$, $f' = \frac{m'}{M} F$. Les degrés de vitesse que chacune d'elles imprimeront à leurs parties respectives seront $\frac{f \times t}{m}$, $\frac{f' \times t'}{m'}$, $\frac{f'' \times t''}{m''}$, ou simplement $\frac{F \times t}{M}$, en remplaçant f, f', f'', ... par leurs valeurs $\frac{m}{M} F$, $\frac{m'}{M} F$, ... et comme $\frac{F \times t}{M}$ est précisément le degré de vitesse qu'imprime au centre de gravité la force F ou la force X qui lui est égale, on reconnaîtra que *pour qu'un corps reçoive un mouvement de transport parallèle, il faut que la force motrice ou la résultante des forces motrices qui lui sont appliquées passe par son centre de gravité.*

47. *Mouvement d'un corps lorsque la force motrice ne passe plus par le centre de gravité.* — Si la force motrice X était dirigée suivant une droite AB (fig. 61) en dehors du centre de gravité G du corps, on peut prévoir que le mouvement ne sera plus de transport. En effet, si ce mouvement était parallèle dans tous les points, il naîtrait des forces d'inertie partielles dont la résultante passerait par le centre de gravité G, et si on remplace cette dernière par une force F contraire au mouvement, cette force F appliquée en G devrait l'arrêter et produire l'équilibre ; mais il est impossible que deux forces telles que F et X appliquées aux extrémités d'une droite ou barre AG, puissent s'entre-détruire à moins qu'elles n'exercent leur action dans la di-

rection de la barre. En général, si des forces agissent d'une manière quelconque sur un corps libre, ce dernier reçoit un mouvement compliqué d'un mouvement de translation au centre de gravité, et d'un mouvement relatif ou de rotation autour de ce centre. Les géomètres ont de plus trouvé que, quel que fût le mode d'action des forces, le mouvement du centre de gravité était le même que si toutes les forces y étaient transportées parallèlement. Ainsi, d'après la composition de ces forces, on peut toujours trouver le mouvement du centre de gravité, et c'est surtout ce qu'il importe de connaître. Le centre de gravité de la bombe qui décrit une trajectoire dans l'air, a une vitesse bien autrement rapide que la vitesse relative des autres points autour de ce centre, en sorte que ce mouvement de rotation n'exerce qu'une très-faible influence. La loi du mouvement du centre de gravité est, d'après ce qui précède, facile à trouver. Car si on appelle X la résultante de toutes les forces motrices transportées à ce centre parallèlement à elles-mêmes, F la force d'inertie totale, on a $X = F$. D'ailleurs

$$F = M \times \frac{v}{t} \text{ (2}^{e}\text{ partie, 44);}$$

d'où l'on tire

$$v = \frac{X \times t}{M}.$$

v sera le petit degré de vitesse imprimée à un instant quelconque pendant le très-petit temps t. Enfin, de ce petit degré de vitesse on passe aux vitesses acquises au bout d'un temps quelconque et de là aux espaces décrits.

48. *Force vive totale imprimée à un corps mû parallèlement à lui-même.* — Ce que nous avons dit précédemment s'applique encore à la force vive totale que possède un corps lorsque toutes ses parties ont un mouvement de transport parallèle. En effet, V étant la vitesse générale, $\frac{p}{g} \times V^2$ sera la force vive de la partie dont le poids est p, $\frac{p'}{g} \times V^2$ celle de la partie de poids p', etc.; de sorte que la somme de toutes ces forces vives, c'est-à-dire la force vive totale, sera $V^2\left(\frac{p + p' + \ldots}{g}\right)$, ou $M \times V^2$. Ce dernier résultat prouve qu'on a eu raison dans l'estimation de la force vive de la voiture du roulier, de l'évaluer d'après la masse de la voiture en bloc, au lieu de rechercher séparément les forces vives des roues, du corps de la voiture, etc.

49. *Conclusion relative au mouvement de transport.* — Les considérations que nous venons de développer font voir que dans les mouvements de transport d'un corps ou d'un système de corps, les calculs pourront être simplifiés, puisqu'il est permis de faire abstraction de la forme extérieure des corps, de concentrer leur masse totale autour du centre de gravité, et de raisonner sur ce point comme sur la masse totale.

TRAVAIL DE LA PESANTEUR DANS LE MOUVEMENT D'UN CORPS OU D'UN SYSTÈME DE CORPS. — DIVERS ÉQUILIBRES DE CES CORPS.

50. *Théorème général sur le travail de la pesanteur.* — Jusqu'ici nous avons justifié la concentration de la masse d'un corps autour de son centre de gravité, seulement lorsqu'il s'agit d'un mouvement de transport parallèle. Ajoutons que cette concentration devient, en général, impossible lorsque toutes les parties de ce corps reçoivent des mouvements différents les uns des autres. En effet, les forces d'inertie partielles ne sont plus parallèles entre elles, et leur résultante, c'est-à-dire la force d'inertie totale, ne peut plus être égale à leur somme. Mais, si dans ces mouvements divers on veut évaluer le travail de la pesanteur pendant un temps quelconque, les actions exercées par cette force sur toutes les parties du corps ne cessent pas d'être parallèles et verticales, et, comme leur résultante, et le poids total, passe constamment par le centre de gravité, on raisonnera sur le mouvement de ce point comme si la masse y était concentrée, en faisant abstraction du mouvement de rotation de toutes les autres parties du corps; puis on évaluera la quantité de travail dépensée par la pesanteur d'après le produit du poids total et du chemin parcouru par le centre de gravité dans le sens vertical. Si, par exemple, le centre de gravité d'un corps animé d'un mouvement quelconque va de la position G à la position G′ (fig. 62) en décrivant une courbe quelconque, on multipliera le poids P de ce corps par la hauteur verticale G′R dont aura monté le centre de gravité, afin d'obtenir le travail dépensé par la pesanteur dans l'intervalle des deux positions. Ce théorème, à l'égard du travail de la pesanteur, loin d'être particulier au mouvement d'un seul corps, s'étend à l'ensemble des pièces liées entre elles, et telles que les roues, les barres, les leviers, etc., dont une machine est pour l'ordinaire composée. Si vous calculez la somme des quantités de travail dépensée sur chaque pièce par la pesanteur, vous reconnaîtrez que cette somme est la même que la quantité de travail dépensée sur le centre général de gravité de tout le système. En général, soient p, p', p'',.... les poids de diverses pièces liées entre elles; h, h', h'',.... les hauteurs dont leurs centres de gravité particuliers montent ou descendent dans le passage d'une position à une autre, en vertu de leurs mouvements respectifs d'ailleurs quelconques; P la somme de tous ces points, et z la hauteur dont le centre de gravité général est monté ou descendu. On aura

$$Bz = pk + p'h' + p''h'' + \ldots.$$

Dans cette égalité, il faudra ajouter entre eux tous les travaux dépensés par la pesanteur sur les centres de gravité qui ont un mouvement ascendant, et retrancher au contraire de cette somme les quantités de travail relatives aux centres de gravité qui se sont abaissés. Cela résulte de ce prin-

cipe, déduit de la résultante des forces parallèles (2e partie, 25), que la quantité de travail de leur résultante est égale à la somme des quantités de travail des composantes qui agissent dans un sens, diminuée de la somme des quantités de travail de celles qui agissent dans le sens opposé. On peut en voir la démonstration directe, en rapportant, dans chaque position, à un même plan de niveau AB (fig. 63), des centres de gravité des différents corps, par des perpendiculaires abaissées sur ce plan. Soient H, H', H'',.... les distances perpendiculaires à AB des centres de gravité des poids p, p', p'',.... lors de la première position du système, P la somme de ces poids, Z la distance au même point pour la même position du centre de gravité général, on aura, en vertu du théorème des moments,

$$PZ = pH + p'H' + p''H'' + \ldots ;$$

pour la deuxième position du système, on aurait encore

$$PZ_1 = pH_1 + p'H'_1 + p''H_1'' + \ldots$$

Les deux égalités étant retranchées terme à terme l'une de l'autre, leur différence donnera

$$P(Z_1 - Z) = p(H_1 - H) + p'(H_1' - H') + p''(H'' - H'') + \ldots$$

En supposant que le plan de niveau AB demeure inférieur à tous les points partiels, on remarquera que $Z_1 - Z$ est la hauteur z dont le centre de gravité général a monté ou descendu, selon que Z_1 est plus grand ou plus petit que Z; qu'il en est de même des différences $H_1 - H$, $H_1' - H'$,.... lesquelles sont égales aux quantités h, h', h'',.... et sont positives ou négatives selon que le centre de gravité des points particuliers p, p' p'',.... ont monté ou descendu. De plus, les quantités $P(Z_1 - Z)$, $p(H_1 - H)$, $p'(H_1 - H')$,.... sont les produits des forces par les chemins parcourus dans leurs directions propres, c'est-à-dire les quantités de travail partielles dues à la pesanteur. Ainsi, *le travail total dû à la pesanteur sur un système de corps pesants en mouvement, est égal à la somme des travaux des poids qui montent, diminuée de celle des travaux des poids qui descendent.*

51. *Équilibre des corps pesants.* — Si le système des corps pesants est dans une position telle qu'en passant à une position voisine, le centre de gravité général demeure sur une même ligne de niveau, ou que l'on ait $Z_1 = Z$, dans ce cas la quantité de travail $P(Z_1 - Z)$ devient nulle et l'on a

$$ph + p'h' + p''h'' + \ldots = 0.$$

Donc, dans une semblable position, la quantité de travail à dépenser pour en déplacer le corps est nulle, les quantités de travail partielles de la pesanteur sur chaque corps s'entre-détruisent, et il y a équilibre dans le système. Telle est la condition d'équilibre des corps pesants qui sont seulement soumis à la gravité. Toutefois, cet équilibre se présente sous divers états,

selon la nature des positions du système. Si, après avoir dérangé un peu l'ensemble du système des pièces, le centre de gravité général descend, on conçoit qu'il tendra à descendre de plus en plus et qu'il faudrait dépenser une certaine quantité de travail pour le ramener à sa position primitive. Un tel équilibre est dit *instable*, parce que le système tend évidemment à s'en écarter. Au contraire, si, en déplaçant un peu l'ensemble des pièces, le centre de gravité général s'est élevé, c'est une preuve que ce déplacement a exigé une certaine quantité de travail que la pesanteur tend à restituer; l'équilibre est alors *stable ;* parce que le système est sollicité à y revenir, quand on l'abandonne à lui-même. Enfin si, après un dérangement analogue au précédent, le centre de gravité général ne monte ni ne descend, la quantité de travail dépensée est toujours nulle; le système n'a aucune tendance ni à revenir à sa première position, ni à s'en écarter. En un mot l'équilibre est *indifférent*.

52. *Exemples des diverses espèces d'équilibre.* — Considérons, par exemple, nne tige tournant autour d'un point fixe A (fig. 64) et supportant à sa partie inférieure un corps symétrique par rapport à la ligne milieu qui va du centre de rotation au centre de gravité général G. Il est évident qu'il y aura équilibre, lorsque la tige occupera la position verticale AG. Je dis de plus, que l'équilibre est ici stable; car, en éloignant le système de la position AG, le centre de gravité monte de G en G′ en décrivant l'arc GG′, et il a fallu dans ce déplacement dépenser une quantité de travail que la pesanteur va restituer aussitôt qu'on abandonnera la tige à elle-même. A la vérité elle fera une suite d'oscillations autour de AG, mais leur amplitude diminuera par suite de la tendance de la ligne à occuper sa position primitive AG. Supposer la tige dans une situation opposée à laprécédente (fig. 65) : si elle est encore parfaitement verticale, la résultante de toutes les forces de pesanteur ou du poids total passe par le point d'appui; il n'y a point de raison pour que le corps s'incline plus à droite qu'à gauche, attendu sa symétrie par rapport à la ligne AG. Toutefois cet équilibre est instable; car, pour peu que le système soit dérangé, le centre de gravité descend de G en G′, et il faudrait ensuite une certaine quantité de travail pour le ramener à la position AG.

Quand un cône (fig. 66) est posé sur sa base et qu'on vient à l'incliner, le centre de gravité de ce cône décrit un arc qui l'élève; partant, ce corps, abandonné à lui-même, revient à sa première position. Si, au contraire, on appuie le cône sur sa pointe rationnellement, il y a encore équilibre comme lorsque ce corps reposait sur sa base; mais le plus petit mouvement suffit pour faire descendre le centre de gravité. La première position du cône correspond à l'état d'équilibre stable, et la deuxième à celui d'équilibre instable.

Un cylindre elliptique placé sur un plan de niveau est en équilibre stable

ou non stable, selon que le grand axe ou le petit axe de sa base elliptique est parallèle à ce plan (fig. 67). Une boule sphérique qui se meut sur un plan de niveau offre l'exemple d'un équilibre indifférent. Le centre de gravité ou le centre de figure de cette boule demeure à la même hauteur au-dessus du plan, et la quantité de travail employée à le déplacer à chaque instant est toujours nulle, de sorte que le corps dans toutes ses positions a plus de tendance à s'arrêter qu'à s'éloigner. Un cylindre parfaitement circulaire est encore dans ce cas.

Les ponts-levis ne sont autre chose qu'un système de pièces à l'état d'équilibre indifférent, ou qui demeure en équilibre pour toutes les positions possibles. Pour que cette condition soit remplie, il suffit de s'assurer que le centre de gravité général de la bascule et du tablier, dans toutes les positions possibles, à la liaison de ces corps est à la même hauteur ou parcourt un même plan de niveau.

Les chariots, les voitures ne doivent, à proprement parler, exiger aucune quantité de travail dans leur transport horizontal, et par conséquent leur centre de gravité total ne doit ni monter ni descendre pendant leur mouvement.

Si certaines roues de moulin tantôt se ralentissent et tantôt s'accélèrent, c'est qu'elles ne sont pas cintrées, ou que leur centre de gravité G est en dehors du centre A des tourillons (fig. 68). Cette roue devient analogue au pendule qui offre alternativement les caractères de l'équilibre stable et non stable : d'abord l'équilibre est *stable* lorsque le centre de gravité de la roue occupe la position la plus basse ; puis ce centre de gravité monte en s'écartant de la verticale AB, et la pesanteur pendant ce mouvement ascendant diminue sa vitesse par petits degrés successifs ; arrivé au point le plus haut, le centre de gravité G prend de nouveau une position d'équilibre qui est *instable*, parce qu'au delà la pesanteur accélère la vitesse jusqu'au point le plus bas que nous avons pris pour point de départ, et dans lequel la vitesse redevient la même.

La balance consiste principalement dans un fléau à bras égaux AC et CB (fig. 69), armé de couteaux dont l'arête D repose dans l'œil d'une chape double suspendue en E. Les deux extrémités du fléau portent deux bassins extrêmement égaux qui doivent contenir, l'un le corps à peser, et l'autre les poids étalons. Une balance peut être *sourde*, *folle*, ou *paresseuse*, selon qu'elle tend à revenir vers sa position horizontale ou à s'en écarter, ou qu'elle demeure en équilibre ou en repos sous toutes sortes de positions. Prenez en particulier le moment du poids de chaque pièce dont la balance se compose par rapport à un plan de niveau AB, et divisez la somme de tous ces moments par le poids total de la balance. Le quotient vous donnera la hauteur du centre de gravité G au-dessus de ce plan. Sa position sera déterminée, attendu que ce centre doit être compris dans l'axe de symétrie

CF du système. Lorsque le centre de gravité sera au-dessous du point d'appui D des couteaux, la balance sera *sourde*, parce que l'équilibre est stable ; s'il est au-dessus, la balance est *folle* et l'équilibre instable ; enfin, l'équilibre est indifférent et la balance *paresseuse*, lorsque le centre de gravité de la balance et le point d'appui des couteaux du fléau sur la chape se confondent. Les bonnes balances sont celles dont le centre de gravité est placé au-dessous du point d'appui sans en être ni trop près ni trop loin.

V.

ÉQUILIBRE ET MOUVEMENT D'UN CORPS SOLIDE LIBRE.

53. *Équilibre d'un corps libre.* — Quand des forces appliquées à un corps se font équilibre sur ce corps, ou qu'elles ne changent point l'état de son mouvement, ou quand elles s'entre-détruisent, il est nécessaire que la somme des quantités de travail des forces qui entraînent le corps dans un sens soit égale à la somme des quantités de travail des forces qui l'entraînent en sens contraire. Pour se rendre raison de ce principe, concevons que l'on ait composé les premières forces qui agissent d'un côté en une seule, et qu'on ait fait de même à l'égard de celles qui agissent de l'autre côté : le système des forces sera ainsi réduit à deux forces uniques qui devront se faire équilibre ; et cet équilibre aura lieu quand les deux forces seront égales et directement opposées. Mais lorsque deux forces sont égales et contraires, la quantité de travail de l'une est égale à la quantité de travail de l'autre, et si d'ailleurs on admet que la quantité de travail de chacune d'elles est égale à la somme des quantités de travail des forces données dont elle est composée, on reconnaîtra ainsi la condition d'équilibre que nous avons énoncée ci-dessus (1).

(1) Voici une démonstration plus rigoureuse pour les lecteurs qui ne se contenteraient pas de celle du texte. Soient $P, Q, R, S, \ldots$ (fig. 70) des forces appliquées à un corps solide de forme quelconque. Prenons dans l'intérieur de ce corps trois points quelconques a, b, c, que nous regarderons comme les sommets d'un triangle invariable abc, et décomposons chaque force en trois autres selon les droites Aa, Ab, et Ac, dirigées du point d'application A de la force à chaque sommet. De cette manière nous obtiendrons trois groupes de composantes qui concourront respectivement aux points a, b, c, et qui auront pour résultantes, le premier de la force Z, le deuxième la force X, et le troisième la force Y. L'équilibre est ainsi réduit à celui des trois forces X, Y, Z, et il ne sera pas troublé si l'on suppose que les côtés ab, ac, bc, deviennent fixes tour à tour. Dans l'hypothèse du côté fixe ab, les deux forces Z et X sont détruites par la résistance de ce côté, et si la troisième force Y n'était pas située dans le plan abc, elle le ferait tourner autour de ab. On démontrerait semblablement que les forces X et Z doivent être comprises dans ce même plan abc

34. *Équilibre et mouvement des machines.* — Considérons une machine composée de roues qui sont soutenues par des appuis et qui se communiquent le mouvement, soit par des dents, soit par des chaînes ou par des courroies. Imaginons qu'une force ou puissance fasse tourner la première roue, celle-ci éprouvera une réaction de la part de la deuxième. Cette réaction à son tour devient pour la deuxième une puissance qui tend à la faire marcher; mais cette deuxième éprouve sur les appuis qui la lient à la troisième, une réaction qui est une véritable résistance à son propre mouvement, et qui devient puissance pour cette troisième roue. Remplaçons maintenant les appuis de deux pièces voisines par les efforts de réaction qui y sont exercés : chaque pièce deviendra un corps libre, et pour qu'il y ait équilibre autour de ce corps, il faudra que la quantité de travail des forces qui tendent à faire marcher le corps dans un sens, soit égale à celle des forces qui le font marcher en sens contraire. A l'égard d'une pièce particulière, cela revient à dire que le travail de la puissance qui la fait mouvoir, est égal à celui de la résistance opposée par la pièce suivante; en raisonnant de proche en proche, depuis la pièce qui reçoit l'action du moteur jusqu'à celle qui fait l'ouvrage et qu'on nomme *outil*, on reconnaît que la quantité de travail de la puissance équivaut à celle de l'outil. En un mot, quand des forces travaillent à l'aide de machines, ou par l'intermédiaire de corps sur d'autres corps, il faudra distinguer les puissances des résistances, et on trouvera que le travail des unes est toujours égal à celui des autres. Si les corps se pressent, s'étendent ou se frottent, les nouvelles résistances qui résultent de ces actions seront comprises parmi les résistances, bien que ces actions soient inutiles au travail que l'on veut obtenir. L'équilibre peut avoir lieu, soit que le corps reste en repos ou qu'il soit en mouvement. Dans le premier cas, les quantités de travail sont celles qui seraient produites par un petit dérangement du système. Dans le deuxième cas, les

comme la force Y. Maintenant, pour que ces trois forces se fassent équilibre dans ce plan, il faut que l'une d'elles soit directement égale et opposée à la résultante des deux autres, ou que la résultante de toutes trois soit nulle, condition qui entraîne celle que les trois forces concourent en un même point. Si la résultante des trois forces X, Y, Z est zéro, la somme de leur quantité de travail est nulle. La quantité de travail de chacune d'elles est d'ailleurs égale à la somme des quantités de travail d'un même groupe, et la chose est évidente puisque ces composantes ont un même point d'application. Ainsi, la somme des quantités de travail des forces X, Y, Z peut être remplacée par la somme des quantités de travail de toutes les forces groupées autour de a, b et c. Mais ces dernières, ajoutées trois par trois, donnent la quantité de travail de chacune des forces proposées, P, Q, R, S. En sorte que la somme des quantités de travail des forces X, Y, Z n'est autre chose que la quantité de travail des forces P, Q, R, S. D'où l'on voit que dans l'équilibre d'un corps solide, la quantité *totale* de travail des forces qui le sollicitent est égale à zéro.

corps ne peuvent avoir qu'un mouvement uniforme, leur inertie n'étant point alors mise en jeu; les quantités de travail sont mesurées uniquement d'après le mouvement de chaque point d'application des forces, sans que l'inertie entre pour rien dans la comparaison de ces quantités. On conçoit, par exemple, que quand une roue tourne régulièrement, l'inertie est tout à fait nulle. Il n'en est plus de même quand la vitesse varie ou que le mouvement ne demeure pas constant. L'inertie lui est contraire ou favorable selon que la vitesse s'accélère ou diminue : on doit alors, dans ces circonstances, comprendre l'inertie parmi les résistances ou les puissances. Mais la la condition du mouvement est toujours la même, c'est-à-dire que le travail des puissances est encore égal au travail de toutes les résistances augmenté du travail de l'inertie, lorsque le mouvement s'accélère, ou diminué de ce même travail si le mouvement se ralentit.

33. *Relation entre le travail des forces sur un corps libre et sa force vive. Exemple sur les trajectoires d'un corps pesant.*—Toutes les fois que des forces appliquées à un corps libre font accélérer ou retarder son mouvement, l'inertie de ce corps se développe, et en vertu du principe de l'action égale à la réaction, elle doit être en équilibre avec les forces qui sollicitent le corps; ou bien sa quantité de travail sera égale à la somme des quantités de travail simultanées des forces qui poussent le corps dans un sens, diminuée des quantités de travail qui poussent ce corps dans un sens opposé. Mais on a vu (1re partie, 85) que quand un corps prend deux vitesses à deux instants quelconques, le travail de l'inertie est encore mesuré par la moitié de la différence des forces vives que le corps possède au premier et deuxième instant, ou par la force vive qu'il gagne ou qu'il perd selon que le mouvement s'accélère ou se ralentit. Donc *le travail total de plusieurs forces sur un corps dans un temps quelconque est toujours égal à la moitié de la force vive gagnée ou perdue par ce corps au bout du même temps.*

Soit, par exemple, une bombe dont P est le poids et qui part du point A (fig. 71) avec une vitesse initiale V. Si la pesanteur n'agissait pas sur ce projectile, il suivrait la direction primitive AT. Mais, en vertu de cette force verticale qui est unique dans le cas où le mouvement a lieu dans le vide, la bombe est continuellement détournée de sa direction, et décrit en définitif une ligne courbe ABD, et nous savons (2e partie, 12) que pour un corps qui décrit un espace quelconque de courbe et qui n'est soumis qu'à l'action de la gravité le travail est égal au produit de son poids et de la projection verticale de cette portion de courbe. Ainsi, à l'égard de la bombe, pendant qu'elle sera transportée de A en B, le travail dépensé par la gravité sera $P \times BC$, ou $P \times H$ en faisant $H = BC$. Enfin, appelant V′ la vitesse que possède la bombe en B, $\overline{\frac{P}{g} \times V^2}$ sera sa force vive en A, $\overline{\frac{P}{g} \times V'^2}$ sa force vive en B, et $\frac{P}{g} \times V^2 - \frac{P}{g} \times V'^2$ la force vive qu'il aura perdu pendant

son passage de A en B, dont la moitié doit-être la quantité de travail développée dans le même intervalle par la force extérieure qui est ici celle de gravité. On aura donc

$$\frac{1}{2}\left(\overline{\frac{P}{g}\times V^2}-\overline{\frac{P}{g}\times V'^2}\right)=P\times H.$$

Divisant les deux membres de cette égalité par le facteur commun P et les multipliant par $2g$, on trouve

$$V^2 - V'^2 = 2gH.$$

Donc la différence des carrés des vitesses dans deux positions quelconques de la bombe qui se meut dans le vide est égale à la différence de niveau des deux positions multipliée par le double de la vitesse g que la pesanteur imprime au bout de la première seconde. Supposez que la bombe arrive à terre en D, alors sa hauteur H sera nulle. D'où $V^2 - V'^2 = 0$, ou $V = V'$. Donc, une bombe dans le vide, tombe à terre avec une vitesse précisément égale à celle qu'elle a reçue au commencement du mouvement. On remarquera encore que tant que le projectile monte la pesanteur ralentit de plus en plus la vitesse, et que quand le projectile descend elle restitue à la vitesse ce qu'elle lui avait d'abord enlevé, de sorte qu'à des points également élevés sur les branches ascendantes et descendantes, la vitesse redevient la même. La description de la trajectoire dans le vide s'obtient par des considérations fort simples et fondées sur l'indépendance des mouvements divers d'un même corps et des actions dues aux forces qui le sollicitent dans les directions de ces mouvements (2e partie, 5 et 8). En effet, on peut regarder le corps comme animé de deux mouvements, l'un horizontal selon l'axe Ax, et l'autre vertical selon l'axe Ay. Les vitesses initiales dans le sens de ces mouvements seront les composantes de la vitesse initiale, estimée d'après le principe du parallélogramme des vitesses. Comme dans le sens horizontal il n'y a aucune force motrice, le corps décrira dans cette direction de petits espaces égaux pendant une suite de petits temps égaux élémentaires. Mais dans le sens vertical la pesanteur pendant ces mêmes petits temps égaux diminue la composante de la vitesse initiale, de petits degrés égaux de vitesse, de sorte que la loi des vitesses verticales acquises par le corps au bout de ces petits temps égaux est facile à connaître, ainsi que les espaces décrits. Quant aux véritables positions de la bombe qui ne sont que des points de la courbe, elles seront données par l'intersection des parallèles aux deux axes, menées à des distances de l'origine A égales aux espaces décrits simultanément dans le sens horizontal et dans le sens vertical. Si la trajectoire est décrite dans l'air, la résistance de ce fluide diminue considérablement les vitesses des mobiles. La description de la courbe peut encore se faire, pourvu que l'on ait des tables indiquant en poids les résistances qui corres-

pondent à telle ou telle vitesse et au calibre du projectile. Ainsi, connaissant la vitesse initiale et deux composantes, on aura en poids la valeur de la résistance initiale, et par suite les composantes horizontale et verticale de cette force au commencement du mouvement. De ces composantes, l'une est la force motrice de la bombe dans le sens horizontal, et elle diminue la vitesse horizontale primitive, d'un petit degré facile à évaluer pour un petit temps, ce qui donne ainsi la vitesse horizontale acquise au bout de ce même petit temps. L'autre composante de la résistance ajoutée au poids de la bombe donne la force motrice dans le sens vertical; on déduit de cette dernière le plus petit degré de vitesse dont la vitesse verticale primitive est diminuée pendant le même petit temps que nous avons choisi, ainsi que la vitesse verticale acquise au bout du dit petit temps. La résultante des deux nouvelles vitesses acquises horizontalement et verticalement donnera lieu à une nouvelle résistance que l'on trouvera dans les Tables et que l'on décomposera en deux autres forces horizontale et verticale. Les intensités de ces deux forces s'obtiendront, d'ailleurs, en les considérant, ainsi que leur résultante, comme proportionnelles aux vitesses acquises déjà déterminées. Puis on cherchera le petit degré de vitesse dont la vitesse horizontale s'est accrue ou diminuée au bout d'un temps petit, égal au premier, par la nouvelle composante horizontale à la résistance; on en fera de même dans le sens vertical, en prenant pour force motrice le poids de la bombe augmenté de la composante verticale de la nouvelle résistance. On voit que de cette manière on parviendra aux vitesses acquises au bout du deuxième petit temps, tant dans le sens horizontal que dans le sens vertical. En continuant ainsi on déterminera la loi de toutes les vitesses acquises, ainsi que tous les espaces parcourus. Au moyen des espaces parcourus simultanément suivant les directions horizontales et verticales, on construira la trajectoire de la même manière qu'il a été procédé dans le vide. Quant aux espaces réels décrits, ils serviront à faire connaître le développement de la trajectoire.

VI.

MOUVEMENT D'UN CORPS AUTOUR D'UN AXE.

56. *Le travail de forces quelconques faisant tourner un corps autour d'un axe est réduit à celui de leurs composantes dans un plan perpendiculaire à cet axe.* — Le principe démontré (2e partie, 13) du travail des forces sur un corps peut s'étendre à des cas quelconques. Nous allons l'appliquer à celui où un corps tourne autour d'un axe fixé et lié invariablement à ce corps. Imaginons une force R s'exerçant en un point A (fig. 72) d'un corps qui

tourne autour de LM, et décomposons cette force en deux autres, l'une Q parallèle à LM, et l'autre P dans un plan perpendiculaire à cette même droite et passant par son point d'application A. On remarquera que P est la projection de la force R dans ce plan, et que les composantes de cette dernière peuvent s'obtenir par le procédé indiqué (2ᵉ partie, 10). En agissant de la même manière à l'égard des autres forces appliquées au corps, on les réduira à deux groupes dont l'un se composera de forces parallèles à l'axe et l'autre de forces situées dans des plans qui lui sont perpendiculaires; et de plus la somme des quantités de travail de ces deux groupes sera précisément égale au travail total des forces données. Or, le travail du premier groupe est égal au produit de la résultante des forces parallèles qui le composent multiplié par le chemin que parcourt le corps selon leur direction, c'est-à-dire dans le sens de l'axe; et comme le corps ne peut cheminer sur cet axe auquel par hypothèse il est lié invariablement, on voit que le chemin décrit par les points d'application des forces parallèles est nul, et qu'il en est de même à l'égard de leur travail. Ainsi, le travail total des forces données se réduit, en définitif, à celui de leurs composantes, ou de leurs projections dans des plans perpendiculaires à l'axe de rotation et qui passent par leurs points respectifs d'application.

57. *Travail des forces qui font tourner un corps autour d'un axe.* — La quantité de travail des forces appliquées à un corps qui peut prendre un mouvement de rotation se réduisant à celle de leurs projections sur des plans perpendiculaires à l'axe, il reste encore à déterminer le travail de ces dernières. Soient P (fig. 73) l'une de ces composantes, A son point d'application sur le corps, et C le point où l'axe coupe le plan perpendiculaire qui contient la composante P. Abaissez du point C la perpendiculaire CD à AP, et observez que l'on a démontré (2ᵉ partie, 17) que la quantité de travail d'une force est toujours la même, quelque soit le point sur sa direction, dont on considère le chemin parcouru. Ainsi, la quantité de travail de la force P, estimée d'après le chemin du point D, est la même que pour le point A. Or, le point D décrit dans un très-petit temps t un arc S dont CD est le rayon. Ainsi, la quantité de travail de P sera $P \times S$. Mais on n'a pas besoin de mesurer immédiatement pour chaque composante le petit arc que décrit le pied de la perpendiculaire abaissée de l'axe sur sa direction, parce que quand un corps tourne, tous les points qui lui sont attachés invariablement, décrivent simultanément des angles égaux, et par suite des arcs proportionnels à leurs distances de l'axe. En appelant, par exemple, S′ l'arc décrit par le point D′ autour de C, on aura

$$S : S' :: CD : CD';$$

d'où

$$S = \frac{S' \times CD}{CD'};$$

en sorte que connaissant S′ on connaîtra aussi S. Au lieu de prendre l'arc

décrit par un point arbitraire, on prend ordinairement celui qui est décrit par un rayon égal à l'unité; si CD′ est cette unité on aura

$$S = S' \times CD;$$

en appelant r la grandeur de la perpendiculaire CD, et désignant l'arc de CD′ par S_1, afin de se souvenir que cet arc a pour rayon l'unité, on aura enfin

$$S = rS_1.$$

Pour une autre composante P′ dont la perpendiculaire abaissée de l'arc a pour longueur r', on trouverait de même

$$S' = rS'_1.$$

Ainsi, les quantités de travail des composantes perpendiculaires à l'axe sont $P \times rS_1$ et $P \times r'S_1$, et l'on remarquera que les produits $P \, . \, r$ et $P \, . \, r'$ ne sont que les moments de ces composantes. Donc, le travail des composantes, et par suite celui de la force donnée qui lui correspond, est égal à l'arc commun S_1 multiplié par le moment de la composante. Sachant en outre que le travail total des forces données est égal à la somme des travaux de celles qui agissent dans un sens, diminuée de la somme des travaux de celles qui agissent en sens contraire; on en conclut que leur travail total pour faire tourner un corps est égal à l'unité de distance de l'axe, multipliée par la différence de la somme des moments de leurs perpendiculaires à l'axe et qui font tourner le corps dans un sens, et de la somme des moments de ces mêmes composantes qui font tourner le corps dans l'autre sens.

58. *Équilibre d'un corps autour d'un axe.* — Si les forces données se font équilibre autour de l'axe, leur travail total est nul, ce qui ne peut avoir lieu qu'autant que la somme des moments des composantes perpendiculaires à l'axe qui agissent dans un sens, est égal à celle des moments des composantes qui font tourner le corps dans un sens opposé.

59. *Extension du principe des forces vives au mouvement de rotation.* — Lorsque des forces sont appliquées à un corps qui tourne autour d'un axe de rotation, le mouvement qu'il prend ne peut être que perpendiculaire à cet axe; si les forces ne font pas équilibre, le mouvement s'accélère ou se retarde, et il naît, sur chaque partie du corps, des forces d'inertie qui agissent dans la direction du mouvement, et dont les quantités de travail forment une même somme que celles qui sont développées dans le même temps par les forces motrices. Quand tous les points du corps sont animés de vitesses simultanées qui sont égales, rien n'est plus facile que d'évaluer le travail total de l'inertie pendant un intervalle de temps quelconque : il est égal à la moitié du produit de la masse totale du corps, multipliée par la différence entre les carrés de la vitesse commune qui a lieu au commencement de l'intervalle et de celle qui a lieu à la fin. Mais, lorsque toutes ces parties sont animées de vitesses différentes en même temps (et c'est ce qui arrive dans un moment de rotation), il faut estimer, au commencement et

à la fin de l'intervalle, la force vive de chaque partie du corps, faire la somme de toutes celles que possèdent ces parties au commencement de l'intervalle, et la somme de toutes celles que ces parties possèdent à la fin; puis retrancher ces deux sommes l'une de l'autre pour avoir l'accroissement total des forces vives. La moitié de ce résultat étant le travail de l'inertie, et ce dernier devant être égal au travail développé par les forces données, ou plutôt (2e partie, 57) par leurs composantes perpendiculaires à l'axe, on peut dire que dans tout mouvement de rotation d'un corps, le travail des composantes perpendiculaires à l'axe de rotation est égal à la moitié de l'accroissement des forces vives du corps. Afin de tirer parti de cette relation, il faut une méthode pour obtenir la somme de toutes les forces vives que possèdent au même instant les parties d'un corps qui tourne autour d'un axe de rotation.

60. *Méthode pour estimer la force vive totale d'un corps qui tourne autour d'un axe.* — Considérons, par exemple, une petite partie m (fig. 74) située à une distance r de l'axe de rotation LM. Soient V la vitesse qu'elle possède à un instant quelconque, p son poids; m sa masse, ou $\frac{p}{g}$; la force vive de cette partie sera $\frac{p}{g} \times V^2$, ou $m \times V^2$. Si l'on en fait autant pour toutes les autres parties et qu'on ajoute toutes les forces vives qui ont lieu dans un même instant, on observera que la vitesse V de chaque partie différera selon sa distance r à l'axe. Elle lui sera d'ailleurs proportionnelle, attendu que toutes les parties du corps tournent simultanément; en un mot on pourra trouver les vitesses comme les petits chemins simultanés décrits. Or, on a vu que S étant le chemin décrit par la partie m,

on a $$S = r \times S_1.$$

Divisant cette égalité par t, ou par le petit temps employé à décrire S,

on tire $$\frac{S}{t} = r \times \frac{S_1}{t}.$$

On sait que la vitesse, dans un mouvement quelconque, est égale à un très-petit chemin du mobile, divisé par le temps employé à le décrire. Ainsi, $V = \frac{S}{t}$. On aura de même $\frac{S_1}{t} = V_1$. La vitesse V^1, qui n'est autre chose que la vitesse relative au chemin S_1, ou à celui qui est à l'unité de distance, est ce qu'on nomme *vitesse angulaire* du corps. Enfin, de la relation $\frac{S}{t} = r \times \frac{S_1}{t}$ on tire cette autre, $V = rV$, qui indique que la vitesse d'un point quelconque possédant un mouvement de rotation, est égale au produit de sa distance à l'axe par la vitesse angulaire du corps. Par conséquent, la force vive de la partie m du corps sera $mr^2 V_1^2$. La force vive simultanée de la masse m' serait de même $m'r'^2 V_1^2$. Enfin, la somme de toutes

ces forces vives, c'est-à-dire la force vive totale, sera, à cause que V_1^2 est facteur commun, $V_1^2 (mr^2 + m'r'^2 + m''r''^2 + \ldots)$. Remarquons que si le mouvement vient à changer, il n'y a que la vitesse angulaire V_1 qui varie, tandis que le facteur. . . . . $mr^2 + m'r'^2 + m''r''^2 + \ldots$ se reproduit encore dans l'évaluation de la nouvelle force vive. Cette quantité, que les géomètres ont désignée par *moment d'inertie*, je l'appellerai I, en sorte que la force vive du corps devient $V_1^2 \times I$. Donc. *la force vive d'un corps qui tourne autour d'un axe, est égale au carré du produit de sa vitesse angulaire, multiplié par son moment d'inertie.* Supposez maintenant que par suite d'une accélération causée dans le mouvement, la vitesse angulaire V_1 soit, au bout d'un certain intervalle de temps, devenue V_1', la force vive à ce dernier instant sera $V_1'^2 \times I$, parce que I ne dépend nullement de la vitesse. On aura donc. . . . . $\overline{I \times V_1'^2} - \overline{I \times V_1^2}$ pour l'accroissement de force vive produite pendant cet intervalle, lequel doit être égal au double des quantités de travail des forces données, ou même au double de celles que produisent leurs composantes selon des plans perpendiculaires à l'axe. Supposons encore que ces composantes soient réduites à une seule force F, et que le chemin estimé dans sa direction, et parcouru pendant l'intervalle de temps que l'on considère, soit B, on aura

$$\overline{I \times V_1'^2} - \overline{I \times V_1^2} = 2FE.$$

61. *Détermination du mouvement d'un corps qui tourne et qui est sollicité par une force.* — A l'aide du principe précédent on est à même de trouver l'intensité de la force motrice qui fait tourner un corps, quand on connaît la vitesse angulaire de ce corps à deux instants, et le chemin décrit par le point d'application de la force pendant l'intervalle qui sépare ces instants. Réciproquement, si une force analogue à la précédente est donnée, ainsi que le chemin donné par son point d'application, on peut conclure l'accélération de la vitesse angulaire du corps. Supposons, par exemple, une roue montée sur un arbre horizontal et qui tourne autour de son centre (fig. 75); un poids P est suspendu à une corde enroulée autour de l'arbre. On demande la vitesse que la roue prendra, lorsqu'à partir du repos, la corde ou le poids sera descendu de la hauteur H, et par I le moment d'inertie de la roue; $I \times V_1^2$ sera la force vive acquise et on aura

$$I \times V_1^2 = 2P \times H,$$

d'où

$$V^2 = \frac{2P \times H}{I},$$

et par suite,

$$V_1 = \sqrt{\frac{2PH}{I}}.$$

62. *Application aux volants.* — Un volant consiste dans une roue ou pièce qui tourne autour d'un arbre horizontal et dont les jantes en fonte,

tennes à une assez grande distance de l'axe de rotation, sont liées par des bras à ce dernier. Imaginons que des forces soient appliquées à cette roue entre deux instants pour lesquels la vitesse angulaire du mouvement soit successivement V_1 et V_1' : il faudra qne l'accroissement de la force vive de la masse du volant soit égal au double du travail total des deux forces, ou que l'on ait

$$I(V_1'^2 - V_1^2) = 2FE,$$

ou

$$V_1'^2 - V_1^2 = \frac{2FE}{I};$$

ce qui donne la différence des carrés des vitesses. Si la quantité de travail développée par les forces demeure la même pour l'intervalle de temps compris entre les instants où la vitesse angulaire du volant devient V_1 et V_1' et que l'on augmente son moment d'inertie I, la fraction $\frac{2FE}{I}$ diminuera, et par conséquent ces vitesses angulaires différeront d'autant moins. Et, comme le moment d'inertie est en raison composée et de la masse du volant et de la distance à laquelle cette masse est rejetée loin de cet axe, on voit qu'il est toujours possible de disposer ce volant de manière que le mouvement soit très-peu irrégulier, lors même que la quantité totale de travail développée par les puissances serait très-grande. Remarquons encore que si les puissances agissent entre elles de manière qu'elles accélèrent le mouvement, cet excédant de quantité de travail devient une force vive qu'emmagasine le volant. Si, au contraire, de nouvelles résistances surviennent et que le mouvement se relentisse, l'inertie du volant s'ajoutera au travail des forces qui favorisent le mouvement pour vaincre ces résistances. Ainsi, l'utilité dn volant consiste à absorber l'excès du travail de la puissance sur la résistance pour le restituer ensuite à la puissance, quand le travail de celle-ci devient inférieur. Aussi y a-t-il certaines machines où sans un volant le moteur ne saurait faire marcher l'outil. Si, par exemple, un moteur est destiné à faire marcher une scie, il est évident que le travail de cette dernière n'est pas le même pendant sa montée et pendant sa descente, parce que la scie ne mord dans le bois que quand elle descend. Ainsi le travail du moteur, supérieur à celui de l'outil pendant une demi-oscillation, doit lui devenir inférieur pendant la demi-oscillation contraire. Dans le premier cas le volant s'accélère et absorbe de la force vive; dans l'autre cas, au contraire, cette force vive est restituée et ajoutée à celle du moteur, pour vaincre le travail de la résistance devenu alors plus grand.

63. *Distance de l'inertie d'un corps qui tourne autour d'un axe.* — On sait que si une masse m reçoit dans un très-petit temps t le degré de vitesse v, la mesure de la force d'inertie f est $\frac{m \times v}{t}$. Pour une autre

masse m' on n'aurait $f' = \frac{m' \times v'}{t}$, et $f'' = \frac{m'' \times v''}{t}$. Si de plus les masses m, m', m'', font partie d'un même corps qui tourne autour d'un axe, leurs petits degrés de vitesses respectifs sont évidemment proportionnels à leurs distances r, r', r''. Donc, en désignant par v_1 le petit degré de vitesse imprimé à l'unité de distance de cet axe, on a

$$v = rv_1,\ v' = r'v_1,\ v'' = r''v_1,$$

d'où

$$f = mr \times \frac{v_1}{t},\ f' = m'r' \times \frac{v_1}{t},\ \text{et}\ f'' = m''r'' \times \frac{v_1}{t}, \ldots.$$

Mais si cet accroissement de vitesse angulaire v_1 a été produit sur le corps par la force motrice F perpendiculaire à l'axe et appliquée à une distance R de cet axe, cette force est la mesure de l'inertie du corps et doit faire équilibre à toutes les forces d'inertie partielles f, f', f'', ... en sorte que le moment FR sera égal à la somme des moments fr, $f'r'$, $f''r''$ + ...
Substituant à f, f', f'', ...

leurs valeurs $mr \times \frac{v_1}{t}$, $m'r' \times \frac{v_1}{t}$, $m''r'' \times \frac{v_1}{t}$, ... on aura enfin

$$\text{FR} = \frac{v_1}{t}(mr^2 + m'r'^2 + m''r''^2),$$

ou

$$\text{FR} = \frac{v_1}{t} \times \text{I}.$$

Donc, le moment de l'inertie totale du corps qui a un mouvement de rotation est égal au *moment d'inertie* de ce même corps par rapport à l'axe, multiplié par le quotient du petit degré de vitesse angulaire imprimé et du petit temps pendant lequel ce petit degré a été communiqué. Malgré l'analogie qui existe entre le moment de l'inertie d'un corps, et ce que nous avons nommé son moment d'inertie, on reconnaît qu'il ne faut pas les confondre l'un avec l'autre. La même équation

$$\text{F} \times \text{R} = \frac{v_1}{t} \times \text{I},\ \text{ou}\ v_1 = \frac{\text{FR} \times t}{\text{I}}$$

nous apprend que quand on connait la force motrice F qui imprime à un corps un mouvement de rotation autour d'un axe perpendiculaire à sa direction, on trouvera à chaque instant le petit degré de vitesse angulaire v_1 communiqué, pourvu que l'on calcule le moment d'inertie du corps par rapport à l'axe. De là, il est possible, au moyen d'une courbe qui a pour abscisses une suite de petits temps t égaux, et dont les ordonnées sont les vitesses acquises, de déterminer la loi de ce mouvement.

64. *Théorème sur le moment d'inertie d'un corps par rapport à un axe quelconque.* — Le moment d'inertie d'un corps par rapport à un axe quelconque, moment que, dans tout ce qui précède, nous avons représenté par la lettre I, n'est autre chose que la somme des produits des diverses

masses qui composent le corps, multipliée par le carré de leurs distances respectives à l'axe. De tous les moments d'inertie d'un même corps, les plus faciles à obtenir sont ceux que l'on prend par rapport à un axe qui passe par son centre de gravité. Il est donc important de trouver le moment d'inertie par rapport à un axe quelconque, au moyen de celui qu'on détermine par rapport à nn axe parallèle passant par le centre de gravité. Soient GH (fig. 76) ce dernier axe, LM un axe quelconque parallèle à GH, m une petite masse du corps GKH par lequel nous imaginerons un plan perpendiculaire à ces deux axes qui le coupe en a et en b. Formons le triangle amb, et abaissons du point m la perpendiculaire md à ab, on aura, d'après la propriété connue du triangle,

$$(mb)^2 = (ma)^2 + ab^2 + (2ab \times ad).$$

Désignant par r la distance mb du point m à l'axe quelconque LM, par r_1 celle ma du même point à l'axe GH du centre de gravité, par K la distance constante ab des deux axes qui est encore celle du centre de gravité à l'axe LM, et par d la distance ad du point M au plan mené par GH perpendiculairement à celui qui contient les deux axes : l'équation précédente devient

$$r^2 = r_1 + K^2 + 2K \cdot d,$$

et multipliant par la masse m,

$$m \cdot r^2 = m \cdot r_1^2 + m \cdot K^2 2K \cdot m \cdot d.$$

Pour d'autres masses m', m'' on trouvera

$$m' \cdot r'^2 = m' \cdot r_1'^2 + m' \cdot K^2 + 2K \cdot m' \cdot d',$$

$$m'' \cdot r''^2 = m'' r_1''^2 + m'' \cdot K^2 + 2K \cdot m'' \cdot d''.$$

Ajoutant toutes ces équations terme à terme, et appelant I le moment d'inertie $mr^2 + m'r'^2 + m''r''^2$ par rapport à l'axe quelque LM, et I_1 le moment d'inertie $mr_1^2 + m'r_1'^2 + m''r_1''^2 \ldots$ par rapport à l'axe GH qui passe par le centre de gravité, on arrive à cette dernière relation,

$$I = I_1 + K^2 (m + m' + m'' \ldots) + 2K (m \cdot d + m' \cdot d' + m'' \cdot d'').$$

Or, $m + m' + m'' + \ldots$ est la masse totale du corps; ...... $m \cdot d + m' \cdot d' + m'' \cdot d'' + \ldots$ est la somme des produits de chaque masse partielle par sa distance à un même plan perpendiculaire à celui des deux axes, ou bien celle des moments de ces masses par rapport à ce plan, ou bien encore le moment de la masse totale M par la distance du centre de gravité au plan. Mais le centre de gravité du corps est situé sur l'axe GH et par conséquent aussi dans le plan de ces moments : donc, la distance à ce plan est nulle, et il en est de même de la somme $m \cdot d + m' \cdot d' + m'' \cdot d'' + \ldots$ Donc la relation précédente se réduit à cet autre,

$$I = I_1 + MK^2.$$

Ainsi, *le moment d'inertie d'un corps pris par rapport à un axe quelconque est égale au moment de ce corps pris par rapport à un axe parallèle qui passe par son centre de gravité, augmenté du produit de la masse de ce corps, multipliée par le carré de la distance de son centre de gravité au premier axe.* Il résulte de ce théorème que si les distances des diverses molécules d'un corps à son centre de gravité sont petites comparativement à celles qui séparent ce centre de l'axe de rotation, on pourra tout simplement prendre pour le moment d'inertie le produit de la masse du corps par le carré de la distance de son centre de gravité à l'axe. Enfin, si l'on multiplie les deux termes de l'égalité $I = I_1 + MK^2$ par le carré de la vitesse angulaire V_1 avec laquelle le corps tourne autour de l'axe extérieur LM, on aura

$$V_1^2 \times I = V_1^2 \times I_1 + M \cdot K^2V^2.$$

Or, $V_1^2 \times I$ est la force vive possédée par le corps; V_1^2 est celle qu'il posséderait s'il tournait autour de l'axe parallèle passant par le centre de gravité avec la même vitesse angulaire V_1; $MK^2V_1^2$ est la force vive du même corps en le supposant concentré à son centre de gravité. Donc la force vive d'un corps qui tourne autour d'un axe est égale à la force vive de ce même corps concentré à son centre de gravité, augmentée de celle qu'il posséderait s'il tournait avec la vitesse angulaire qui lui est propre autour d'un axe parallèle passant par ce centre. Enfin, quand les dimensions du corps sont très-petites par rapport au centre de rotation, ou que $I_1 \times V^2$ est négligeable par rapport à $I \times V_1^2$, on a simplement $I \times V_1^2 = MK^2V_1^2$, c'est-à-dire que la force vive d'un corps est égale au produit de sa masse et du carré $K^2V_1^2$ de la vitesse de son centre de gravité.

65. *Moment d'inertie d'un corps par rapport à ses volumes partiels.* — Les moments d'inertie dont il a été jusqu'ici question sont relatives aux masses partielles m, m', m''.... d'un corps. Or si le corps est homogène et que l'on désigne par D sa densité ou le poids d'un mètre cube de la matière de ce corps, par a, a', a'' le volume des masses $m m$, m', $''$, ... ces dernières sont égales à $\frac{D \times a}{g}$, $\frac{D \times a'}{g}$, $\frac{D \times a''}{g}$, parce que les poids de ces masses ne sont que le produit de D multiplié par leurs volumes respectifs. Ainsi, le moment d'inertie $mr^2 + m'r'^2 + \ldots$ pourra être mis sous cette autre forme

$$\frac{D}{g}(ar^2 + a'r'^2 + a''r''^2 + \ldots\ldots),$$

le moment d'inertie du corps par rapport à son volume étant $ar^2 + a'r'^2 + a''r''^2$.... Il suffira de le multiplier par la densité du corps divisée par la gravité g pour en conclure le moment d'inertie par rapport à la masse.

66. *Moment d'inertie de divers corps par rapport à leurs volumes.* — Nous

allons maintenant indiquer divers moments d'inertie de volumes tout calculés.

1° Le moment d'inertie d'une barre (fig. 77) dont la longueur est a, pris par rapport à un axe passant par son milieu et qui lui est perpendiculaire, est $\frac{1}{12} a^3$.

2° Le moment d'inertie d'un cylindre droit à base circulaire (fig. 78) dont le rayon est r, et c la longueur parallèle à son axe, est, en nommant π le rapport 3,142, ou $\frac{22}{7}$, de la circonférence au diamètre, $\frac{\pi}{2} cr^4$.

3° Celui d'une jante ou d'un anneau rectangulaire concentrique à l'axe (fig. 79) et dont a est l'épaisseur parallèle à cet axe, b la longueur dans le sens du rayon, enfin r le rayon moyen, est $2\pi rab \left(r^2 + \frac{b^2}{4} \right)$, ou simplement $2\pi r.ab.r^2$, à $\frac{1}{100}$ près, quand b est moindre que $\frac{1}{5} r$.

4° Celui d'un segment sphérique pris par rapport au diamètre passant par le milieu de ce segment (fig. 80), r étant le rayon de la sphère, et f la flèche du segment, est. . . . .

$\pi f^3 \left(\frac{2}{3} r^2 - \frac{1}{2} fr + \frac{1}{10} f^2 \right)$. Le moment d'inertie de la sphère entière par rapport à un de ses diamètres est $\frac{8}{15} \pi . r^5$.

5° Celui d'un cône droit à base circulaire (fig. 81) dont r est le rayon de la base et a la hauteur, pris par rapport à cette hauteur comme axe, est $\frac{\pi}{10} ar^4$. Par conséquent celui d'un tronc de cône droit dont a est la hauteur, r et r' les rayons de la grande et petite base, pris par rapport à l'axe, sera $\frac{\pi}{10} \cdot \frac{r^5 - r'^5}{r - r'}$.

6° Le moment d'inertie d'un ellipsoïde, en nommant a, b, c (fig. 82) ses trois axes, et E son volume $= \frac{4}{3} \pi abc$, pris par rapport au diamètre a, est $\frac{E}{5} (b^2 + c^2)$.

7° Celui d'un parallélipipède rectangle dont les trois côtés sont a, b, c (fig. 83), pris par rapport à un axe passant par son centre et parallèle à l'arête a, est $\frac{1}{12} abc \ (b^2 + c^2)$; le moment d'inertie étant pris par rapport à une droite parallèle à a et passant par le milieu de la face qui a b et a pour côtés, est $\frac{1}{12} abc \ (b^2 + 4c^2)$.

8° Celui d'un prisme droit à base de trapèze ayant b, b' (fig. 84) pour le

plus grand et le plus petit côté parallèles, c pour hauteur perpendiculaire à la fois sur les milieux de ces côtes; ce moment, pris par rapport à un axe passant par les milieux des grandes bases b des trapèzes et parallèle aux arêtes a, est

$$ac\left(\frac{b+b'}{2}\right)\left(\frac{b'+b'^2}{24}+\frac{c^2}{6}\ \frac{b+3b'}{b+b'}\right).$$

Quand b et b' sont moindres que $\frac{1}{3}c$, on peut négliger $\frac{b'+b'^2}{24}$, en sorte que le moment d'inertie devient

$$\frac{ac^3}{12}(b-3b'),\text{ à }\frac{1}{36}\text{près.}$$

9° Si l'on remplace les trapèzes du prisme ci-dessus par des segments de paraboles, dont c (fig. 85) est la longueur du grand axe, b la corde perpendiculaire à cet axe qui termine la parabole, le moment d'inertie par rapport à une droite parallèle aux arrêtes a du prisme et passant par le milieu de b est $\frac{2}{3}abc\left(\frac{3.\ 5.b^2+16c^2}{70}\right)$.

Quand b sera moindre qne $\frac{1}{3}c$ l'on prendra

$$\frac{2}{3}abc\frac{16}{70}c^2=a.b.c^3,\text{ à }\frac{1}{14}\text{près.}$$

Ce dernier article est en partie relatif aux bras des balanciers, etc., dont la forme doit approcher de celle de la parabole, pour offrir nne égale résistance dans tons les points.

67. *Application des moments d'inertie.*—Par exemple, dans le cas d'un marteau qui tourne antour d'un axe O (fig. 86), et dont P serait le poids de la tête, R la distance à l'axe O de son centre de gravité, on pourra (2ᵉ partie, 64), attendu que les dimensions de cette tête sont ordinairement assez faibles à l'égard de la distance R, prendre $\frac{P}{g}.R^2$ pour la valeur approchée du moment d'inertie. Quant à celui du manche, on l'obtiendra immédiatement d'après le résnltat (7°) ci-dessus, puisque sa forme est à-peu-près celle d'un parallélipipède rectangulairc, tournant autour d'un axe parallèle à l'une a de ces arêtes et passant par le milieu b de son épaisseur. En prenant donc c pour sa longueur et nommant P son poids, R′ la distance de son centre de gravité à l'axe, D sa densité, son moment d'inertie à cause de $D'\times abc=P'$ sera

$$\frac{D}{g}\cdot\frac{ab}{12}(b^2+c^2)+\frac{D}{g}abcR'^2=\frac{P'}{g}\left(R'^2+\frac{b^2\times c^2}{12}\right).$$

La recherche du moment d'inertie se simplifie pour le volant, en remarquant que toutes ses parties sont rejetées à une distance de l'axe qui est

sensiblement constante. Ainsi, en appelant R le rayon moyen du volant, les distances $r, r', r''....$ des masses m, m', m'' à cet axe seront égales à R, d'où $I = \frac{P}{g} \times R^2$. Qnant à la force vive du volant dont V est la vitesse angulaire, elle est exprimée par le produit $I \times V_1^2$ ou par $\frac{P}{g} \times R^2 \times V_1^2$. Pour avoir la vitesse angulaire du volant, on comptera le nombre de tours qu'il fait dans un temps déterminé ; on multipliera ce nombre par 2π, ou par $\frac{44}{7}$; enfin, le quotient de ce produit, divisé par le nombre de secondes contenues dans la durée de l'observation, ne sera autre chose que la vitesse angulaire. Supposons que V_1 soit de 3^m pour un volant dont le poids P est 200 kilogr. et le rayon moyen R est 2^m, on aura, en remplaçant g par $9^m,81$ pour l'expression du moment d'inertie $\frac{2000}{9,81} \times 4 = 720$, et pour celle de la force vive, $720 \times 9^m = 6480$, dont la moitié représente une quantité de travail de 3240 kilogr. absorbée par l'inertie du volant et restituée ensuite lorsque la puissance cessera entièrement d'agir.

VII.

FORCE CENTRIFUGE.

68. *Idée de la force centrifuge ; sa mesure pour un corps de petites dimensions qui tourne avec une vitesse constante.* — Représentons-nous un corps de poids P (fig. 87) attaché à un point fixe C par une barre rigide AC, et imaginons qu'on lui imprime une vitesse quelconque dans une direction AT, perpendiculaire à la barre. Si ce corps était libre, il continuerait, en vertu de son inertie, son mouvement dans cette direction AT et avec la même intensité de vitesse. Mais il n'en est point ainsi ; la rigidité de la barre le ramène sans cesse à la même distance du point fixe C et le force à décrire un cercle autour de ce centre. Il y a donc, pendant ce mouvement obligé du corps, deux sections centrales exercées le long de la barre, l'une de la part de celle-ci contre le corps pour le retenir au centre C, et l'autre de la part du corps contre la barre qui tend à éloigner le corps de ce centre. Les deux forces sont visiblement égales et contraires à cause du principe de l'action égale et contraire à la réaction. La première est dite *force centripède* et la deuxième *force centrifuge*. Nous supposerons d'abord que les dimensions du corps, à l'égard de sa distance au centre fixe, soient assez petites pour que ce corps soit regardé comme un point matériel animé d'une vitesse V ;

quant au cercle qu'il parcourt dans son mouvement, on peut lui substituer un polygone régulier ABCDE.... (fig. 88) d'un très-grand nombre de côtés égaux et dont les sommets sont appuyés à la circonférence. Cela posé, je dis d'abord que le point matériel décrira chacun des côtés de ce polygone avec la même vitesse, ou que la vitesse primitive V se maintiendra lorsque le point passera d'un côté à l'autre.

A cet effet on observera que si le corps possède la vitesse V au moment où il arrive à l'extrémité B du côté AB, il est ensuite animé de deux vitesses simultanées en parcourant le côté adjacent BC. L'une de ces vitesses est la vitesse primitive BV = V, suivant le prolongement de AB. L'autre BU est le petit degré de vitesse communiqué par la force centrifuge dans la direction de BO, au bout du petit temps employé par le corps à parcourir chaque côté élémentaire du polygone. Or, on a vu (2[e] partie, 7) que quand un corps reçoit deux vitesses simultanées, sa vitesse résultante est la même que s'il les possédait successivement, et qu'elles fussent portées à la suite l'une de l'autre dans les directions qui leur sont propres. Ainsi, la résultante BU, avec laquelle le côté BC est décrit, a lieu sur la direction de ce côté, et de plus elle est telle que VU′, égale et parallèle à BU, appartient au parallélogramme UBVU′ dont BV ou V est la diagonale. D'ailleurs le rayon OB partage l'angle ABC en deux parties ABO et OBC qui sont égales. ABO = BVU′ comme angle correspondant. OBC = BUV comme angles alternes-internes. Donc BVU′ = BU′V. Par conséquent le triangle VBU′ est isocèle, et ses deux côtés BV et BU′ sont égaux ; ce qui indique que la vitesse conservée sur BC est la même que celle possédée par le corps sur le côté antérieur AB. D'où il résulte que *la vitesse communiquée au point matériel ne s'altère pas dans son mouvement circulaire*. La chose était facile à prévoir, parce que la force centrifuge est toujours dirigée perpendiculairement au mouvement, et qu'elle ne travaille pas ; elle ne peut donc détruire ni la force vive ni la vitesse du point matériel. Remarquons que UB, ou VU′, est précisément le petit degré de vitesse imprimé par la force centrifuge F pendant le temps t employé à décrire chaque côté élémentaire du polygone, et que si on appelle M la masse du point matériel, la mesure de cette force (1[re] partie, 74) sera $F = \frac{M \times VU'}{t}$. Tirons le rayon CO ; le triangle BOC est semblable au triangle VBU′ parce qu'ils sont isocèles, que l'angle OBC = BUV, et que l'angle BVU′ étant égal à BUV, on a visiblement BCO = BVU. Donc on aura la proportion.

$$BO : BC :: BU' : VU',$$

d'où
$$VU' = \frac{BC \times BU'}{BO} = \frac{BC \times V}{R},$$

en désignant par R le rayon BO du cercle et en se rappelant que BU′ vient d'être reconnu égal à la vitesse primitive V. D'ailleurs, le côté BC du poly-

gone sera décrit par le corps pendant le petit temps t, et avec la vitesse V, et sa longueur doit être $V \times t$: donc, on aura

$$VU' = \frac{V^2 \times t}{R}, \text{ et, par suite,}$$

$$F = \frac{M \times V^2 \times t}{t \times R} = \frac{M \times V^2}{R}.$$

Telle est l'expression de la force centrifuge. Son numérateur $M \times V^2$ étant le produit de la masse du corps et du carré de sa vitesse, c'est-à-dire sa force vive, on voit que *la force centrifuge d'un corps de petites dimensions comparativement à sa distance au centre autour duquel il tourne, est égale à la force vive imprimée à ce corps divisée par le rayon du cercle que décrit son centre de gravité.* Supposons que le poids du corps soit de 100 kilogr. et qu'il décrive un cercle de 1^m de rayon avec une vitesse de 4^m comptée sur cette circonférence, on posera $R = 1^m$, $P = 100$ kilogrammes,

$M = \frac{P}{g} = \frac{100}{9{,}81}$, $V = 4^m$, $V^2 = 16$, et l'on conclura

$$F = \frac{100}{9{,}81} \times 16 = 160 \text{ kilogr. environ.}$$

Donc, le corps tend à tirer un effort de 160 kilogr. la barre rigide qui le retient dans son mouvement circulaire.

69. *Force centrifuge des corps à grandes dimensions.*—Considérons maintenant une tranche fort mince ABCD (fig. 89), tournant autour d'un poids O situé dans son plan, ou autour d'un axe perpendiculaire à ce plan, avec une vitesse angulaire V_1, la vitesse angulaire d'une petite masse m de cette tranche sera $r\,V_1$ (2ᵉ partie, 60), r étant sa distance au point O. La force vive de cette même masse sera $mr^2 . V_1^2$. Quant à sa force centrifuge, elle sera égale à $\frac{mr^2V_1^2}{r}$, ou mrV_1^2, et de plus elle sera dirigée selon le rayon Om du cercle que cette masse décrit autour du centre commun de rotation. Tirons par ce dernier point deux droites arbitraires et rectangulaires Ox et Oy; puis décomposant la formule centrifuge mrV_1^2 en deux autres X et Y, dirigées suivant ces deux droites; ces composantes et leur résultante étant proportionnelles aux côtés, et la diagonale du rectangle $Oqmp$, on aura la proportion

$$Om : Op :: MrV_1^2 : X;$$

ou $\qquad X = \frac{mrV_1^2 \times Op}{Om} = V_1^2 . mOp$, à cause de $Om = r$. On aura également

$$Om : Oq :: mrV_1^2 : Y = V_1^2 m . oq.$$

Pour une autre petite masse m', sa force centrifuge, et les composantes X'

et Y′ de cette force selon les droites Ox et Oy, seraient $m' r' V_1^2$, $V_1^2 . m' . Op$, et $V_1^2 . m' . Oq'$, etc..... De cette manière toutes les forces centrifuges sont réduites à deux groupes de forces respectivement situés sur les droites Ox et Oy et qui ont chacune pour résultante $V_1^2 (\overline{m \times Op} + \overline{m' \times Op'} + \ldots)$, et $V_1^2 (\overline{m \times Oq} + \overline{m' \times Oq'} \ldots)$ Remarquons que...... $\overline{m \times Op} + \overline{m' \times Op'} + \ldots$ est la somme des moments de chaque masse par rapport à l'axe Oy, et que cette somme est égale au produit de la masse totale M multipliée par la distance Op ou x_1 du centre de gravité G à cet axe. Il en est de même à l'égard de $\overline{m \times O} + \overline{m' \times Oq'} + \ldots$, somme qui est égale à $M \times y_1$, y_1 représentant la distance QO du centre de gravité à l'axe Ox. Ainsi les forces centrifuges se réduisent aux deux forces $V_1^2 M x_1$ et $V_1^2 M y_1$, perpendiculaires entre elles et dont la résultante unique est égale à

$$\sqrt{V_1^4 M^2 x_1^2 + V_1^4 M^2 y_1^2} = MV_1^2 \sqrt{x_1^2 + y_1^2}$$

$$= MV_1^2 \sqrt{\overline{OP}^2 + \overline{OQ}^2} = MV_1^2 \sqrt{\overline{OG}^2} = MV_1^2 \times OG.$$

Donc *la force centrifuge d'une tranche très-mince tournant autour d'un point situé dans son plan est égale au carré de la vitesse angulaire multiplié par le produit de sa masse et de la distance de son centre de gravité au point de rotation.*

On voit également que cette force est appliquée au centre de gravité de la tranche, car elle agit suivant la direction OG.

Supposons encore un corps quelconque ABC (fig. 90), tournant autour de l'axe LM. Décomposons ce corps en tranches très-minces perpendiculaires à cette ligne. Elles donneront lieu à autant de forces centrifuges appliquées aux centres de gravité G, G′, G″,.... de chaque tranche, et égales au carré de la vitesse angulaire dn corps, mnltiplié par le produit de chaque masse et de la distance de son centre de gravité à l'axe. Toutes ces forces seront perpendiculaircs à LM, sans être généralement parallèles entre elles. Tantôt elles auront une résultante unique; tantôt elles se réduiront à deux forces; tantôt enfin leur résultante sera nulle, et dans ce dernier cas ces forces n'exerceraient aucun effort, aucune pression sur l'axe de rotation.

Si tons les centres de gravité G, G′, G″,.... sont une même droite AB (fig. 91), parallèle à l'axe de rotation, les distances de ces centres à l'axe LM sont les mêmes et égales à R. Les forces centrifuges deviennent parallèles et sont toutes situées dans un même plan passant par AB et par LM; leur résultante passe par le centre de gravité de la masse entière et est égale à la somme...... $V_1^2 R (M + M' + M'' + \ldots)$. Or, $M + M' + M'' + \ldots$ est précisément cette masse totale : donc *pour un corps dont toutes les tranches perpendiculaires à l'axe de rotation ont leur centre de gravité sur une*

même parallèle à cet axe, la force centrifuge est la même que si toute la masse du corps était concentrée à son centre de gravité. Cette simplification est particulièrement applicable à la sphère, au cylindre, aux surfaces de révolution dont les axes sont parallèles à celui de rotation. Leur force centrifuge se réduit à celle de leur centre de gravité, en y concentrant leurs masses respectives.

70. *Exemple de la force centrifuge.* — La considération de la force centrifuge explique une foule de faits rapportés dans le *Cours de Mécanique* de M. Dupin. Quand on fait faire le manége à un cheval, l'instructeur, placé au centre C (fig. 92) du cercle décrit par l'animal, retient ce dernier au moyen d'une longue attachée au bridon, afin de détruire autant que possible l'action de la force centrifuge. Elle est, comme on l'a vu (2ᵉ partie, 68), proportionnelle au poids du cheval et au carré de sa vitesse. L'effort du cheval sur sa longe devient ainsi quatre fois, neuf fois plus grand pour une vitesse double, triple. Cette même force exerce sur le cheval un effort horizontal qui tend à le renverser en dehors du cercle. C'est afin de résister à cette action qu'il incline son corps en dedans. Cette inclinaison est telle que sa direction doit se confondre avec la résultante du poids du cheval et de la force centrifuge et passer au milieu de l'intervalle de ses pieds. Si donc, sur la verticale et l'horizontale du centre de gravité G du cheval, on prend des parties GF et GP proportionnelles à la force centrifuge et au poids du cheval, et que l'on construise le rectangle FGPR, la diagonale GR donnera l'inclinaison cherchée. V et R exprimant la vitesse du cheval et le rayon du cercle, la force centrifuge

$$GF = \frac{P}{g} \times \frac{V^2}{R}.$$

Par conséquent, la pression GR ou

$$\sqrt{\overline{GP}^2 + \overline{FG}^2} = P\sqrt{1 + \frac{V^4}{g^2R^2}}.$$

Enfin, pour que le cheval ne puisse glisser en travers du chemin qu'il parcourt, il faut que l'inclinaison AB de ce dernier soit perpendiculaire à la direction GO de la pression totale.

Les écuyers qui se tiennent debout sur un cheval courant au galop penchent leur corps de manière que la résultante de leur poids et de leur force centrifuge passe entre les points où leurs pieds sont appuyés sur le cheval.

Quant une voiture tourne sur une route (fig. 93), son mouvement circulaire produit une force qui tend à la renverser du dedans au-dehors; et le risque qu'elle ne soit renversée croît avec son poids et avec le carré de sa vitesse, tandis qu'il diminue à mesure que le rayon du tournant devient plus considérable. Voilà pourquoi il y a de l'avantage à faire des raccordements dont les rayons soient très-grands, et

il convient pour que les vitesses de la voiture ne prennent pas trop d'accélération, que les pentes longitudinales soient très-douces. On déterminera comme précédemment, la pression totale ou la résultante du poids de la voiture et de la force centrifuge déduite de la vitesse moyenne que l'on peut supposer. Quant à la pente à donner du dehors au dedans à l'inclinaison transversale du tournant, elle doit être perpendiculaire à cette résultante. En France on a coutume de terminer les chaussées de route par une surfasse bombée. Cette forme est éminemment dangereuse dans les raccordements pour une voiture qui en rencontre une autre et qui est obligée de circuler sur le versant extérieur. La fronde, la hache et la masse d'armes, exercent sur la main quand on les fait mouvoir circulairement un effort de traction égal à la force centrifuge. Il s'obtient en divisant la force vive due à la vitesse imprimée, par le rayon du cercle que décrit la fronde, ou par la longueur du manche, soit de la hache, soit de la masse d'armes. Une grande roue de volant se compose de plusieurs jantes partielles réunies par des bras à un moyeu commun (fig. 94). L'effort avec lequel la force centrifuge agit pour tirer les bras hors du moyeu et pour détacher chaque jante partielle se calcule au moyen de la masse de la jante, de son rayon et de la vitesse que possède le volant. Cette même force arrache encore les clous qui fixent les bandes de fer contre les roues de voitures lorsque celles-ci prennent une grande vitesse. Et c'est afin d'éviter un pareil inconvénient, qu'on a le soin de traverser les extrémités de chaque bande et la jante par un boulon qu'un écrou arrête contre la face intérieure de cette dernière.

71. *Variations de la force centrifuge à la surface de la terre. Explication de l'applatissement de cette dernière.* — On sait que la terre tourne autour de son axe en vingt-quatre heures et que tous les parallèles, c'est-à-dire les cercles perpendiculaires à cet axe, ont des vitesses qui vont en diminuant depuis l'équateur jusqu'aux pôles. Imaginons que cet axe soit perpendiculaire au plan du tableau, de façon que ces cercles s'y projettent de grandeur naturelle selon des circonférences concentriques.

Soit un corps A (fig. 95) de masse quelconque M, placé à la surface de la terre et dans un plan parallèle quelconque dont R est le rayon. Ce corps, emporté dans le mouvement terrestre, éprouvera une force centrifuge mesurée par $MR \cdot V_1^2$, V_1 étant la vitesse angulaire de la terre; ce qui nous apprend que cette force varie à la surface de cette dernière proportionnellement à la grandeur des rayons des parallèles. Elle est la plus grande possible à l'équateur, et nulle vers les pôles. Enfin, comme elle tend à diminuer l'action de la gravité, celle-ci est par conséquent la plus grande possible aux pôles et diminue dans les parallèles qui se rapprochent de l'équateur, où elle est réduite à son minimum. La terre n'est point tout à fait sphérique, et les observations s'accordent à démontrer qu'elle est ren-

flée à l'équateur et aplatie vers ses pôles. On conçoit en effet que si elle a été primitivement couverte d'eau, les parties du liquide comprises sous l'équateur et cédant à l'action centrifuge se sont élevées au-dessus de l'axe de rotation, et qu'au contraire les parties du liquide voisines des pôles ont dû abandonner les pôles pour remplacer les premières vers l'équateur. C'est au reste ce que confirme le mouvement de rotation qu'on imprime à un vase contenant de l'eau à une certaine hauteur, et composé de quatre tubes fermés en croix qui se communiquent (fig. 96). Le mouvement ayant lieu autour de deux de ces tubes maintenus horizontalement, on aperçoit l'eau gagner les parties les plus éloignées de l'axe dans les deux tubes verticaux, et s'écarter des tourillons dans les deux autres.

72. *Mouvement d'un corps dans un canal circulaire.* — Il peut arriver qu'un corps, au lieu d'être retenu autour d'un point fixe par une verge rigide, soit forcé de marcher dans un canal circulaire. Mais il n'en a pas moins une force centrifuge égale à $M \times \frac{V^2}{R}$, M et R étant la masse du corps et le rayon du cercle qu'il décrit, et V la vitesse de ce corps, parce que dans le mouvement qu'on lui imprime, il est contraint par la résistance du canal, de rester toujours à la même distance du centre C (fig. 97). Si ce canal est horizontal, la vitesse demeure constante, et la pression du corps contre les parois est uniquement égale à la force centrifuge. Mais si le canal occupe une position verticale, la pesanteur exerce alors de l'influence; non-seulement elle altère la vitesse du corps, mais encore le poids P du corps se décompose en deux autres forces, l'une tangentielle, et l'autre perpendiculaire au mouvement. Celle-ci a lieu tantôt dans le même sens que la force centrifuge, tantôt en sens contraire, de sorte que la pression totale devient plus grande ou moindre que la force centrifuge, selon ces deux circonstances. Il est facile de trouver toutes les vitesses du corps quand on connaît l'une d'entre elles, et cela au moyen du principe des forces vives. Si, par exemple, cette dernière est la vitesse V′ qui correspond au point le plus bas, et que l'on veuille avoir la vitesse V qui a lieu dans une position élevée de la hauteur H, au-dessus de ce point, $M \cdot V'^2 - M \cdot V^2$ sera ici la perte de force vive, et cette perte sera égale au double de la quantité de travail que la pesanteur absorbe, dans l'intervalle dont il s'agit, c'est-à-dire à 2PH. On aura, par conséquent,

$$M(V'^2 - V^2) = 2PH,$$

ou $$V'^2 - V^2 = 2gH, \text{ et } V = \sqrt{V'^2 - 2gH}.$$

Ainsi, la vitesse est diminuée par la gravité pendant l'ascension du corps; mais comme, pendant sa descente, cette force restitue ensuite les quantités de travail qu'elle avait d'abord absorbées, on voit que la vitesse redevient

la même dans les points situés à même hauteur ; qu'elle est la plus petite ou la plus grande possible au point le plus haut et au point le plus bas, et qu'enfin à chaque révolution, les variations de cette vitesse sont périodiques.

73. *Force centrifuge d'un corps qui décrit une courbe quelconque. Application à la trajectoire de la bombe.* — Quand un corps, en vertu des forces motrices qui le sollicitent, décrit une certaine courbe dans l'espace, c'est comme s'il parcourait successivement les petits arcs *osculateurs* dont celle-ci est composée, ou ceux qui appartiennent à des cercles dont la courbure se rapproche le plus possible de celle de la courbe en chaque point. Si l'on connaissait les centres c, c', c'' (fig. 98) de ces arcs successifs, ainsi que leurs rayons respectifs Ac, $A'c'$, $A''c''$, la courbe serait immédiatement donnée par la suite des arcs AA', $A'A''$, $A''A'''$, décrits de ces centres et terminés de part et d'autre aux extrémités des rayons. Cela posé, il est facile de voir que la considération de la force centrifuge, jointe à celle des forces motrices, suffit pour obtenir la position des centres et la grandeur des rayons des arcs osculateurs, et par conséquent pour en déduire le tracé et la forme de la trajectoire que le mobile doit parcourir. En effet, appelons P la résultante AP des forces motrices qui agissent sur le corps au point A, M la masse de ce corps, V la vitesse qu'il possède en ce point et qui est dirigée suivant la tangente AT. Puisque le corps est censé parcourir l'arc de cercle AA' très-petit, non seulement il conservera sur cet arc la même vitesse V, mais encore la force centrifuge F, qui tendrait à l'éloigner du centre C, sera égale à

$$\frac{M \times V^2}{Ac} = \frac{M \times V^2}{r}.$$

Mais comme le mobile, en décrivant la courbe, n'abandonne pas le petit arc AA', il faut qu'il y soit retenu par une force égale et immédiatement opposée à F, ou que la force motrice AP étant décomposée en deux autres, l'une Aq tangentielle à l'arc, et l'autre Ap perpendiculaire à la tangente AT, cette dernière composante soit précisément égale à F. On aura donc

$$Ap \text{ ou } p = \frac{M \times V^2}{T},$$

d'où

$$r = \frac{M \times V^2}{p}.$$

Telle sera la grandeur du rayon Ac de l'arc initial AA'. Son centre sera sur la perpendiculaire à la tangente AT. L'arc AA' étant décrit par un petit temps donné t, ou pour un dixième de seconde, par exemple, on cherchera la quantité de travail produite dans cet intervalle par la force motrice Ap supposée constante, de A en A'. Appelant K' cette quantité de travail, et V' la vitesse que le corps possède en A' et sur la tangente A'T', on aura, en vertu du principe des forces vives,

$$M \times (V'^2 - V^2) = 2K';$$

d'où $$V'^2 = V^2 + \frac{2K'}{M}.$$

La loi de la force motrice étant donnée, on connaîtra la force motrice P′ en A′, et sa composante perpendiculaire à la tangente A′T′ devra être égale à la force centrifuge F′ ou à $\frac{M \times V'^2}{r'}$. Égalant enfin ces deux dernières entre elles, on tirera la valeur de r', c'est-à-dire le rayon A′c′ du deuxième arc A′A″. Du point c' comme centre, on décrira A′A″ égal au produit de V′ et de t; puis, au moyen de l'équation

$$(V''^2 - V'^2)\,M = 2K',$$

ou

$$V''^2 = V'^2 + \frac{2K''}{M},$$

on aura V″ ou la vitesse en A″; ici K″ représente la quantité de travail produite par la force P′ supposée constante, depuis A′ jusqu'à A″. Soit P″ la valeur de la force motrice en A′, déduite d'après la loi de cette force; elle donnera la valeur de sa composante perpendiculaire à la tangente A″ T″. Mais cette dernière composante est égale à la force centrifuge $\frac{M \times V''^2}{r''}$. Donc on aura r'', c'est-à-dire le rayon A″ C″ du troisième arc A″ A‴ . . . .

Nous reproduirons ici pour exemple, la trajectoire de la bombe, en supposant que l'on tienne compte de la résistance de l'air. Il faut, dans cette courbe, distinguer : 1° la partie la plus voisine de l'origine du mouvement, qui se confond sensiblement avec la tagente initiale ; 2° les parties ascendantes et descendantes voisines du sommet ; 3° le reste de la branche descendante. Soit AB (fig. 99) la direction de la vitesse initiale V de la bombe, P et M le poids et la masse de cette bombe. Puisque celle-ci se meut d'abord pendant quelque temps sur cette tangente, la résistance de l'air sera la seule force motrice qui d'abord la sollicitera selon cette direction AB. Au moyen des tables qui donnent les résistances correspondantes à une vitesse quelconque et au calibre du projectile, on obtiendra la valeur de cette force motrice en A ; on en calculera le petit degré de vitesse enlevé par cette force au mobile au bout d'un petit temps t, et par conséquent aussi la valeur de la vitesse qu'il conserve au bout de ce temps et toujours sur la direction de AB. On cherchera dans la table la résistance qui correspond à cette nouvelle vitesse ; puis on déduira le petit degré de vitesse que cette deuxième résistance enlève au bout d'un deuxième petit temps t égal au premier, ainsi que la vitesse conservée par la bombe au bout de cet instant. Cette nouvelle vitesse conservée donnera lieu à une nouvelle résistance, de sorte que sur la direction AB, on aura toutes les vitesses acquises, et par conséquent les espaces parcourus au bout d'un temps quelconque. Mais remarquons que jusqu'alors on a fait abstraction de la pesanteur. Si le temps

écoulé T pendant le passage du mobile, de A en B′, par exemple, devient assez long pour que l'espace B′A′ qu'il décrirait pendant ce même temps en vertu de la pesanteur devienne sensible, on abaissera du point B' une verticale B′A′ égale à cet espace calculé $\frac{gT^2}{2}$, et le point A′ sera un point de la courbe qui n'appartiendra plus à la tangente initiale AB. Maintenant, à partir du point A′, on se servira de la considération de la force centrifuge. A cet effet on supposera que la vitesse en A′ est la même que celle qui avait été acquise en B′ par la bombe sur la direction de AB, parce que cette dernière est beaucoup plus grande que celle qui est imprimée par la pesanteur dans le sens de B′A′ au bout du temps T. Soit V′ cette vitesse en B′ ou en A′; la force centrifuge en A′ sera donc $\frac{M \times V'^2}{r'}$. Pour avoir le rayon osculateur r' ou A′C′, on portera sur la verticale A′B′ une partie A′P proportionnelle au poids de la bombe, et on décomposera cette force en deux autres, $A'p$ et $A'q$, perpendiculaires et tangentielles à la courbe, au moyen du rectangle $Pq\,A'p$, dont la diagonale est A′P ou P ; et le côté $A'p$ sera proportionnel à la composante p du poids, normale ou perpendiculaire à la courbe : comme d'ailleurs cette dernière doit être égale et directement opposée à la force centrifuge pour que le mobile soit retenu sur la courbe, on aura

$$p' = \frac{M \times V'^2}{r'},$$

et, par suite,

$$r' = \frac{M \times V'^2}{p} = A'c'.$$

On décrira l'arc A′ A″ avec ce rayon et on le prendra égal à $V' \times t$, t étant le petit temps élémentaire que l'on choisit et qui sera un dixième de seconde. Veut-on avoir la vitesse en A″? appelons f la résistance de l'air en kilogrammes qui correspond à la vitesse V′. Désignons par u la vitesse que conservait la bombe en arrivant en A″, si la résistance de l'air demeurait constante pendant que A′ A″ est parcouru. Remarquons, d'ailleurs, que la composante tangentielle q du poids est la seule force qui travaille, et qu'elle s'ajoute à la résistance de l'air pour détruire la vitesse. On aura donc, en vertu du principe des forces vives,

$$\overline{M \times V'^2} - \overline{M \times u^2} = 2A'A''\ (f + q),$$

$$\text{ou } u^2 = V'^2 - \frac{2A'A''}{M}(f + q).$$

Si la nouvelle vitesse u est beaucoup plus petite que V′, il est évident que la résistance de l'air aura diminué pendant l'intervalle dont il s'agit, et qu'ainsi la vitesse u est elle-même trop faible. Cherchant dans les tables la

résistance f' qui correspond à u, on supposera que la résistance de l'air a une action égale à cette résistance pendant l'intervalle A' A'', et au moyen de l'équation

$$u'^2 = V'^2 - \frac{2A'A''}{M}(f' + q),$$

on aura alors pour A'' une vitesse u', qui sera au contraire trop forte. Donc la vitesse véritable V'' sera comprise entre u et u', et pourra être considérée comme leur moyenne $\frac{u+u'}{2}$. Connaissant de cette manière V'', on se servira de cette vitesse pour la faire entrer dans la force centrifuge qui se développe en A''; on déterminera en ce point la composante du poids normal à la courbe, et on l'égalera à la force centrifuge $\frac{M \times V''^2}{r''}$; ce qui donnera le rayon r''.

Quand à la composante tangentielle du poids, elle sera ajoutée à la résistance de l'air qui correspond à V'', pour établir l'équation des forces vives à l'aide de laquelle on aura, comme précédemment, la vitesse conservée à l'extrémité supérieur du nouvel arc qui a r'', pour rayon, etc. En continuant de proche en proche, on arrivera au point L le plus élevé, où la composante tangentielle du poids est nulle, puis ensuite à la branche descendante où cette composante devient favorable au mouvement : il y a donc entre les deux branches cette différence, que dans la branche ascendante, la force motrice qui retarde le mouvement est la somme de la résistance de l'air, et de la composante tangentielle de la pesanteur, et que c'est au contraire leur différence dans la branche descendante qui y produit une accélération. Cette accélération finit même par être si grande, que le mobile tend de plus en plus en une direction verticale.

VIII.

PENDULE.

74. *Définition du pendule. Idée générale de son mouvement.* — Un pendule est en général un fil à plomb attaché par une de ses extrémités à un point fixe, et dont l'extrémité inférieure supporte un corps pesant. Lorsque le pendule se trouve dans la position où son centre de gravité G et son point de suspension A (fig. 100) sont dans la même verticale, le pendule est à l'état d'équilibre stable (2e partie, 51); mais aussitôt qu'il en est dérangé et abandonné ensuite à lui-même, il prend autour de la position verticale un mouvement oscillatoire que la résistance de l'air affaiblit continuellement. C'est afin de diminuer l'influence de cette résistance, que

l'on donne au corps pesant la forme d'une lentille dont l'arête circulaire est tout entière dans le plan du mouvement du centre de gravité. Nous réduirons d'abord le pendule à l'état d'un point matériel pesant suspendu à l'extrémité d'un fil sans pesanteur ; et nous ferons voir, plus loin, comment on ramène à ce cas tous les pendules ordinaires. Ainsi AC (fig. 101) étant la longueur du fil fixé en A et qui supporte le point matériel, on conçoit que ce point décrira un cercle de rayon AC autour de A, et que si, après avoir amené ce point pesant en C, on le lâche ensuite, il descendra vers la position B d'équilibre. Appelant H la hauteur BD du point de départ C au-dessus du point le plus bas B, et U la vitesse acquise en ce dernier point, on aura, d'après le principe des forces vives, $U^2 = 2gH$. Mais, en vertu de la vitesse U que le point pesant a acquise, au lieu de s'arrêter en B, il continuera sa marche de l'autre côté et remontera jusqu'au point C′ du cercle où cette vitesse U aura été éteinte et qui sera à même hauteur que C. Puis le mouvement recommencera en sens contraire à partir de C′. La pesanteur aura restitué en B la vitesse perdue en C′, et cette même vitesse s'éteindra de nouveau en C ; de telle sorte que les mêmes oscillations se continueraient indéfiniment, si, comme nous l'avons dit, la résistance ne diminuait par elle-même les petits degrés de vitesse éteints ou communiqués à chaque instant.

75. *Lois de mouvement du pendule simple.* — Il est indispensable de connaître la durée des oscillations du pendule ; nous verrons en effet qu'à l'aide de cette détermination, le pendule devient un instrument commode pour mesurer le temps ainsi que la valeur g de la vitesse que dans les divers lieux de la terre la pesanteur imprime au bout de la première seconde. Considérons l'instant où le pendule est arrivé en M après être parti du point C (fig. 102) ; appelons V la vitesse acquise au point M, et y la hauteur PM dont le mobile est descendu ; on aura toujours $V^2 = 2g \cdot y$. Si l'on suppose qu'à partir de l'instant de la position M, le pendule décrive l'arc MN ou s dans un temps très-petit t, on pourra regarder le mouvement comme uniforme, pendant cette courte durée, et cet arc MN comme ayant été parcouru avec la même vitesse V. Donc on aura

$$MN = V \times t, \text{ et } V = \frac{MN}{t} = \frac{s}{t},$$

et, par suite,

$$t = \frac{s}{V}.$$

Élevée au carré, cette égalité devient $t^2 = \frac{s^2}{V^2}$, ou, à cause de $V^2 = 2gy$,

$$t^2 = \frac{s^2}{2gy}.$$

Représentons-nous un deuxième pendule d'une longueur différente du premier, mais semblablement écarté et tel que l'angle B′A′C′ soit égal à BAC. Soit

d'ailleurs sur ce nouveau pendule une position intermédiaire M′ semblable à celle de M, et pour laquelle l'angle M′A′C′ est égal à l'angle MAC. Appelons V′ la vitesse du deuxième pendule à l'instant de la position M′, et t' le petit temps employé à parcourir l'arc M′N ou s' semblable à l'arc MN. Enfin, nous supposerons que les deux pendules ne soient pas dans le même lieu de la terre, ou que la gravité étant g pour l'un, elle soit g' pour l'autre. On aura visiblement

$$V'^2 = 2g' \cdot y' \text{ et } t'^2 = \frac{s'^2}{2g'y'}.$$

Si maintenant on compare entre eux les temps t et t', employés à décrire les petits arcs semblables s et s', on aura

$$\frac{t^2}{t'^2} = \frac{g'}{g} \times \frac{\frac{s^2}{y}}{\frac{s'^2}{y'}}.$$

Or, ces arcs sont proportionnels à leurs rayons AC et A′C′, ou r et r', et ils donnent la proportion

$$s^2 : s'^2 :: r^2 : r'^2.$$

Tout étant semblable dans l'une et l'autre figure, on a

$$PM : P'M' :: AC : A'C', \text{ ou } y : y' :: r : r'.$$

Divisons ces deux proportions terme à terme, on trouvera

$$\frac{s^2}{y} : \frac{s'^2}{y'} :: r : r', \text{ ou } \frac{\frac{s^2}{y}}{\frac{s'^2}{y'}} = \frac{r}{r'}.$$

On aura donc enfin

$$\frac{t^2}{t'^2} = \frac{g'}{g} \times \frac{r}{r'},$$

et, par suite,

$$\frac{t}{t'} = \sqrt{\frac{g'}{g}} \times \sqrt{\frac{r}{r'}}$$

ou

$$t = t' \sqrt{\frac{g'}{g}} \times \sqrt{\frac{r}{r'}}.$$

Ainsi, lorsque deux pendules ont été dérangés de leur verticale dans une position semblable et qu'ensuite on les abandonne à eux-mêmes, les temps élémentaires employés par chacun d'eux pour décrire des petits arcs semblables sont toujours dans un rapport constant. Or, les arcs CB et C′B′, décrits dans les descentes totales, se composent d'un même nombre de petits arcs semblables, et les temps respectifs $\frac{T}{2}$ et $\frac{T'}{2}$, qui expriment les durées de ces descentes, se composent en pareil nombre, des petits temps

élémentaires qui correspondent aux petits arcs semblables, et dont le rapport ne cesse pas d'être $\sqrt{\frac{g'}{g}} \times \sqrt{\frac{r}{r'}}$. Donc ce dernier rapport est aussi commun aux temps $\frac{T}{2}$ et $\frac{T'}{2}$ des demi-oscillations complètes, et l'on aura

$$\frac{T}{T'}=\sqrt{\frac{g'}{g}}\times\sqrt{\frac{r}{r'}}.$$

Cette dernière relation apprend que, pour deux pendules semblables ou dont l'étendue des oscillations mesure des angles égaux, les temps de ces oscillations en deux endroits différents de la terre sont entre eux comme les produits des racines carrées du rapport de leurs longueurs et du rapport inverse des valeurs de la gravité à ces deux endroits.

Si les deux pendules sont au même lieu, on a

$$g=g', \text{ et } \frac{T}{T'}=\sqrt{\frac{r}{r'}}.$$

Donc, dans un même lieu, les durées des oscillations sont entre elles comme les racines carrées de leurs longueurs.

Si les longueurs des deux pendules sont les mêmes et qu'ils soient placés en deux lieux différents, on fera $r=r'$; d'où

$$\frac{T}{T'}=\sqrt{\frac{g'}{g}},$$

c'est-à-dire que, dans deux endroits quelconques de la terre, les durées de l'oscillation de deux pendules égaux et d'une même amplitude sont réciproquement entre elles comme les racines carrées des valeurs de la gravité dans ces deux lieux.

76. *Durée de l'oscillation d'un pendule dont l'écart est fort petit.* — A l'aide des conséquences précédentes, il serait possible de déduire, de la longueur d'un pendule qui bat les secondes, celle du pendule qui oscillerait dans un quart de seconde ou dans une minute au même lieu, ou de trouver, avec deux pendules égaux en longueur et d'égale amplitude, la valeur de la gravité d'un endroit, quand on connaîtrait celle qui correspond à un autre lieu de la terre. Toutefois cela suppose dans l'une et l'autre circonstance que les deux pendules s'écartent de la même quantité à partir de la verticale, au bout de leur oscillation. Mais on arrive plus directement à ces deux solutions en ne faisant faire à ces deux pendules que de très-petites oscillations, parce que leur durée est indépendante de leur amplitude : c'est ce qu'il est facile de démontrer. Rappelons-nous que M (fig. 103) étant un point quelconque de l'arc parcouru par un pendule, nous avons représenté par y la hauteur PM dont il est descendu à partir de C, par H la hauteur de chute BD au bout d'une demi-oscillation BC, et par V la vitesse acquise au point M.

Soit MN un petit arc décrit pendant un temps t à partir de l'instant où le pendule a acquis la vitesse V en M, ou a à la fois $V^2 = 2gy$, $t = \frac{s}{V} = \frac{s}{\sqrt{2gy}}$, et, par suite, $t^2 = \frac{s^2}{2gy}$. Les deux triangles semblables MQN et MEA donnent la proportion

$$QN : EM :: MN : AM,$$

d'où

$$MN = \frac{QN \times AM}{EM}.$$

Remarquons que EM est moyen proportionnel aux deux segments du diamètre du cercle décrit par le pendule ou à EB, et 2AB — EB ou $2r$ — EB, et qu'il est égal à $\sqrt{2r \cdot EB - \overline{EB}^2} = \sqrt{2r \cdot EB}$, à cause que EB est négligeable ou l'hypothèse de la petite amplitude de l'oscillation. Donc, on aura

$$MN = \frac{QN \times AM}{\sqrt{2r \times EB}} = \frac{QN \times r}{\sqrt{2r \times EB}} = \frac{QN \sqrt{r}}{\sqrt{2 \cdot BE}} = s,$$

et

$$t^2 = \frac{s^2}{2g \cdot y} = \frac{\overline{QN}^2 \cdot r}{4g \cdot y \cdot BE}.$$

Sur BD comme diamètre, décrivons la demi-circonférence DmB, et par les points M, N, extrémités de MN ou s, tirez les horizontales Mm et Nn, coupant cette demi-circonférence aux points m et n. Joignons le point m au centre O de la demi-circonférence; enfin, menons la verticale nq. On remarquera d'abord que mE, moyen proportionnel entre les deux segments du diamètre BD, est tel que l'on a

$$\overline{mE}^2 = BE \times DE = BE \times PM = BE \times y.$$

Remplaçant ce dernier produit par cette nouvelle valeur dans celle de t^2, celle-ci deviendrait

$$t^2 = \frac{\overline{QN}^2 \times r}{4g \cdot mE^2} = \frac{r}{4g} \times \left(\frac{QN}{mE}\right)^2.$$

Les deux triangles semblables MOE et mqn donnant

$$\frac{QN}{mE} = \frac{qm}{mE} = \frac{mn}{mO},$$

on aura enfin

$$t^2 = \frac{r}{4g} \times \left(\frac{mn}{mO}\right)^2,$$

et, par suite,

$$t = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{r}{g}} \times \frac{mn}{mO}.$$

Telle est la valeur du petit temps employé à parcourir le petit arc MN, et elle est proportionnelle au petit élément mn de la demi-circonférence DmB,

à même hauteur que le premier MN. Si l'on déterminait tous les petits temps employés à décrire les petits arcs élémentaires de l'arc BC et qu'on en prît la somme, on aurait le temps $\frac{T}{2}$ d'une demi-oscillation entière, et ce temps sera visiblement égal au facteur commun $\frac{1}{2}\sqrt{\frac{r}{g}} \times \frac{1}{m0}$ multiplié par la somme de tous les éléments tels que mn de la demi-circonférence BmD, ou par cette demi-circonférence, ou enfin par $\pi m0$ (π étant le rapport 3,1416 de la circonférence au diamètre. Donc, on aura

$$\frac{T}{2} = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{r}{g}} \times \frac{\pi \cdot m0}{m0} = \frac{\pi}{2}\sqrt{\frac{r}{g}},$$

et, par suite,
$$T = \pi\sqrt{\frac{r}{g}}$$

pour la durée d'une oscillation complète.

D'après la formule ci-dessus on voit que cette durée est indépendante de l'amplitude de l'oscillation, pourvu que celle-ci n'excède pas une certaine limite. Ainsi, en abandonnant à lui-même un pendule dévié d'une faible quantité hors de la verticale, les oscillations qu'il fera seront de même durée ou *isochrones*, et si on compte le nombre de celles qui auront eu lieu pendant un temps mesuré avec une bonne montre, pendant 10′ ou 20′, par exemple, on obtiendra la durée de chacune d'elles en divisant le temps de l'observation par le nombre des battements.

L'expérience ayant appris que le pendule qui à Paris bat les secondes a une longueur de $0^m,994$; veut-on connaître celle du pendule qui indique dans cette même ville une demi-seconde ? on posera la proportion

$$1'' : (\tfrac{1}{2})'' :: \sqrt{0^m,994} : \sqrt{x},$$

ou, en élevant au carré,

$$1'' : (\tfrac{1}{4})'' :: 0^m,994 : x;$$

d'où
$$x = \frac{0^m,994}{4} = 0^m,2485.$$

Sachant qu'à Paris la valeur de la gravité g est $9^m,808795$, on trouvera celle de Metz en y faisant osciller le pendule qui, à Paris, bat les secondes, et en estimant le temps de chaque oscillation ainsi qu'on vient de l'indiquer. Soient T′ ce temps évalué en secondes et g' la valeur de la gravité à Metz ; on aura

$$1 : T'^2 :: g' : g;$$

d'où
$$g' = \frac{g}{T'^2} = \frac{9^m,808795T^2}{T'^2}.$$

Enfin, connaissant la longueur r du pendule qui bat les secondes à

Metz, sur les bords de la Moselle, on trouvera encore la valeur de la gravité à la hauteur de cette rivière, au moyen de la relation ci-dessus, $1'' = \pi \sqrt{\frac{r}{g}}$, ou, en élevant au carré,

$$g = \pi^2 r.$$

Supposez qu'on s'élève sur le mont Saint-Quentin avec le même pendule et qu'on y estime par l'observation le temps T′ de chaque oscillation, la relation

$$g' = \frac{\pi^2 r}{T'^2}$$

donnera la valeur de la gravité sur le sommet de cette montagne.

77. *Pendule composé.* — Les pendules ordinaires dont on se sert dans la pratique consistent, comme nous l'avons dit, en une tige et un corps pesant dont le système oscille autour d'un axe horizontal A; et comme ce cas est le même que celui d'un corps solide quelconque MNQ (fig. 104) qui a un mouvement oscillatoire autour d'un axe horizontal A, nous allons chercher comment la question, pour ce dernier mouvement plus général, est ramenée à celle d'un pendule simple. Appelons P et M le poids et la masse de ce corps, V_1 la vitesse angulaire acquise par ce corps dans l'intervalle où son centre de gravité passe de la position initiale G où il était en repos, à la position quelconque G′, D la distance AG de ce point à l'axe A, et y la hauteur PG′ dont il est descendu quand il est arrivé à la position que l'on considère. Soit enfin I le moment d'inertie du corps par rapport à l'axe horizontal A : il est évident (2ᵉ partie, 60) que $I \times V_1^2$ sera la force vive acquise par le corps au bout de l'intervalle GG′ et que $P \times y$, ou $Mg \times y$, mesurera la quantité de travail de la pesanteur pendant ce même intervalle. On aura donc

$$I \times V_1^2 = 2Mg \cdot y.$$

Remarquons que, pendant que le centre de gravité G décrit l'arc GG′, il s'en décrit un autre semblable par le point situé à l'unité de distance de A sur AG, et que la hauteur y_1 dont ce nouveau point descend par rapport à sa position initiale est telle que l'on a

$$y = y_1 \times D.$$

Substituons à y sa valeur dans la relation précédente de la force vive; nous aurons

$$I \times V_1^2 = 2Mg \cdot D \cdot y_1,$$

d'où
$$V_1^2 = \frac{M \cdot D}{I} \times 2gy_1.$$

Désignant par s_1 le petit arc décrit à l'unité de distance pendant le très-

petit temps t à partir de l'instant où la vitesse angulaire est devenue V_I, on reconnaît sans peine que l'on peut raisonner sur les arcs décrits à cette distance comme sur ceux qui sont décrits à une distance quelconque, et que l'on aura

$$V_1 = \frac{s_I}{t},$$

d'où $$t = \frac{s_1}{V_1}, \text{ et } t^2 = \frac{s_I^2}{V_1^2}.$$

Il faut d'ailleurs faire attention que le temps t est aussi celui pendant lequel le corps passe d'une position quelconque à une position très-voisine.

Remplaçant V_I^2 par sa valeur trouvée plus haut $\frac{M \,.\, D}{I} \times 2^2 g y_I$,

on trouve $$t^2 = \frac{s_I^2}{\frac{MD}{I} \times 2gy_1},$$

et, par suite, $$\frac{M \,.\, D}{I} \times t^2 = \frac{s_I^2}{2gy_I}.$$

Si, comme dans le numéro précédent, nous considérons ce qui se passe à l'unité de distance de A, que C (fig. 105) soit la position initiale de l'arc décrit CNB dont $AM = r_I$ est le rayon ou l'unité, et que MN soit le petit arc s_I, on démontrera encore que, PM n'étant autre chose que y_I, $\frac{s_I^2}{2gy_1}$ sera égal à $\frac{r_1}{4g} \times \left(\frac{mn}{m0}\right)^2$;

On aura donc

$$\frac{M \times D}{I} \times t^2 = \frac{r_I}{4g} \times \left(\frac{mn}{m0}\right)^2;$$

ou bien, à cause de $r_1 = I$,

$$t = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{I}{M \times D \times g}} \times \frac{mn}{m0}$$

Enfin, en prenant la somme de tous les petits temps t employés à parcourir tout l'arc compris depuis la position initiale jusqu'à la position verticale, on trouvera, pour cette somme,

$$\frac{1}{2}\sqrt{\frac{I}{M \times D \times g}} \times \pi.$$

Or, cette somme est la moitié de la durée T d'une oscillation entière; donc, on aura enfin

$$T = \pi\sqrt{\frac{I}{M \times D \times g}}.$$

Telle sera la durée d'une oscillation complète du corps autour de A, pourvu toutefois qu'elle soit très-petite.

78. *Comparaison du pendule composé et du pendule simple. Centre d'oscillation.* — Soit r la longueur du pendule simple dont la durée des oscillations est la même que celle des oscillations du corps MNQ ; on aura (2e partie, 76), pour le pendule simple,

$$T = \pi \sqrt{\frac{r}{g}},$$

et, par suite,

$$\pi \sqrt{\frac{r}{g}} = \pi \sqrt{\frac{I}{M \times D \times g}},$$

d'où l'on tire

$$r = \frac{I}{M \times D}.$$

Observons que le moment d'inertie I du corps MNQ (fig. 104), en appelant I_1 le moment d'inertie de ce même corps par rapport à l'axe parallèle à l'axe A et qui passe par le centre de gravité G, est, d'après ce qui a été démontré (2e partie, 64), égal à $M \times \overline{D^2 + I_1}$.

Par conséquent, on aura

$$r = \frac{M \times \overline{D^2 + I_1}}{M \times D} = D + \frac{I_1}{M \times D}.$$

Prenant sur la ligne AG qui joint le centre de gravité G du corps à l'axe A, une partie AO égale à r ou à $D + \frac{I_1}{M \times D}$, on obtiendra le point O qu'on nomme *centre d'oscillation* du corps par rapport à l'axe A. Si, à son tour, le point O devenait le point de suspension, je dis que le point A deviendra au contraire le centre d'oscillation. En effet, r' (fig. 105) étant la distance du nouveau centre d'oscillation par rapport à O, et D' la distance OG du centre de gravité à ce dernier point, on aura alors

$$r' = D' + \frac{I_1}{M \times D'}.$$

D'ailleurs D' ou

$$OG = AO - AG = r - D = \frac{I_1}{M \times D};$$

ce qui donne lieu aux deux valeurs

$$D' = r - D, \text{ et } \frac{I_1}{M \times D'} = D.$$

Si on les substitue à D' et à $\frac{I_1}{M \times D}$ dans celle de r', on trouvera

$$r' = r - D + D = r.$$

Donc le centre d'oscillation se confond avec le point A.

CENTRE DE PERCUSSION. CHOC D'UN CORPS QUI TOURNE AUTOUR D'UN AXE.

79. *Centre de percussion.* — Lorsqu'un corps MNQ (fig. 106) reçoit un mouvement de rotation autour de l'axe A, que nous supposons ici perpendiculaire au plan du tableau, chaque petite masse m de ce corps développe des forces d'inertie partielles perpendiculaires aux distances respectives de chacune d'elles à leur axe, et dont l'intensité est mesurée par $m \,.\, r \times \frac{v_1}{t}$, r étant la distance de cette partie quelconque à l'axe, et v_1 le petit degré de vitesse angulaire imprimé au corps pendant le temps élémentaire t. On a vu de plus (2ᵉ partie, 63) que la somme des moments de toutes ces forces par rapport à l'axe, était égale au produit du moment d'inertie I du corps multiplié par le quotient $\frac{v_1}{t}$, ou à $I \times \frac{v_1}{t}$. En admettant que la résultante F de toutes ces forces (1) est égale au produit de la masse totale M du corps multiplié par la distance D ou AG du centre de gravité à l'axe, et par le même quotient $\frac{v_1}{t}$, et que de plus la direction de cette résultante

---

(1) Si l'on décompose chaque force d'inertie partielle $m \,.\, r\,\frac{v_1}{t}$ en deux, l'une horizontale et l'autre verticale, et qu'on nomme x et y l'abscisse et l'ordonnée de m par rapport à un plan vertical et un plan horizontal passant par l'axe A; la première composante sera évidemment

$$mr\,\frac{v_1}{t}\cdot\frac{y}{r}=\frac{mv_1y}{t},$$

et la deuxième,

$$mr\,\frac{v_1}{t}\cdot\frac{x}{r}=\frac{mv_1x}{t}.$$

En appelant x_1 et y_1 les coordonnées du centre de gravité, la somme des composantes horizontales sera

$$\frac{v_1}{t}\,(my+m'y'+\ldots\ldots),\ \text{ou}\ \frac{v_1}{t}\,My_1,$$

et celles des composantes verticales

$$\frac{v_1}{t}\,(mx+m'x'+\ldots\ldots),\ \text{ou}\ \frac{v_1}{t}\,Mx_1.$$

D'où il suit que la résultante générale a pour valeur

$$\frac{v_1}{t}\,M\sqrt{x_1^2+y_1^2}=\frac{v_1}{t}\,M\times D;$$

et qu'elle fait avec l'axe horizontal et l'axe vertical des angles dont les cosinus sont respectivement $\frac{y_1}{D}$ et $\frac{x_1}{D}$, en sorte qu'elle est perpendiculaire à la distance D du centre de gravité à l'axe.

$M \times D \times \frac{v_1}{t}$ est perpendiculaire à cette dernière distance AG, on reconnaîtra que, si O est son point d'application sur AG, $F \times AO$ ou $M \times D \times \frac{v_1}{t} \times AO$ n'est autre chose que le moment de cette résultante, lequel doit être égal à la somme des moments des forces d'inertie partielles ou à $I \times \frac{v_1}{t}$. Donc, on aura

$$AO \times M \times D \times \frac{v_1}{t} = I \times \frac{v_1}{t},$$

ou

$$AO = \frac{I}{M \times D}.$$

Le point O, ainsi déterminé, est ce qu'on nomme *le centre de percussion* ; il est situé dans le plan perpendiculaire à l'axe qui passe par le centre de gravité du corps, et sur la plus courte distance de ce dernier point à l'axe. Le centre de percussion jouit de la propriété que quand une force lui est appliquée dans une direction immédiatement contraire et opposée à la force d'inertie du corps, celui-ci se mouvra en quelque sorte comme s'il était libre, et sans qu'il en résulte aucun choc, ou aucune pression sur l'axe. En effet, si une force quelconque F′ (fig. 107) était appliquée en un point *a* différent du centre de percussion O, la ligne AO serait pliée, et il en résulterait un véritable contre-coup ou un choc sur l'axe de rotation A. — Une barre à laquelle j'imprime un mouvement de rotation et que je choque par l'un de ses points, exerce généralement une réaction qui se fait sentir dans la main. Mais elle possède un point tel que, quand il est choqué, cette sensation est nulle, ce point est précisément le centre de percussion de la barre. — Il importe qu'un marteau frappe par son point de percussion, et c'est toujours ce qui arrive, parce que la tête étant beaucoup plus dense que le manche, le centre de percussion est nécessairement très-rapproché du centre de gravité de la tête.

Le centre de percussion d'un corps peut se trouver par l'expérience : il suffit de poser le point de rotation de ce corps sur un appui fixe A (fig. 108), et de laisser tomber le corps sur une pointe B mobile le long d'un plan horizontal; lorsque cette pointe atteint une position telle que le corps au moment de sa chute ne bascule point autour de A, on sera assuré que le point par lequel le corps est choqué contre la pointe B est précisément son centre de percussion.

Puisque la distance du point de percussion à l'axe est $\frac{I}{M \times D}$, et que cette distance est aussi celle du centre d'oscillation (2ᵉ partie, 78), on voit que ces deux points sont absolument la même chose, et qu'un pen-

dule qu'on veut faire mouvoir sans qu'il en résulte aucune pression ou aucun choc sur son axe de suspension, doit être poussé par un effort dirigé vers son centre ou axe d'oscillation.

80. *Choc d'un corps qui a un mouvement de rotation.* — Soit un corps Q (fig. 109) suspendu à un axe A perpendiculaire au plan du tableau. Ce corps étant d'abord au repos, supposons qu'il soit choqué au point T par un autre corps P dans une direction TL perpendiculaire aux surfaces en contact, et comprise dans un plan perpendiculaire à l'axe A. Appelons m et p la masse et le poids du corps choquant, V sa vitesse avant le choc. Au moment où les corps se rencontreront, il se développera sur chacun d'eux et dans la direction normale TL deux forces de compression égales et contraires que nous désignerons par F. Cette pression sur chaque corps, d'abord nulle quand les corps commencent à se toucher, augmente successivement au fur et à mesure qu'ils se compriment; de sorte que F, quoique représentant des kilogrammes, n'est cependant pas une quantité fixe. Si l'on fait abstraction de l'un des deux corps, du corps Q par exemple, on pourra regarder la force F comme appliquée au corps P considéré comme libre, et cette force lui enlèvera une suite de petits degrés égaux v de vitesse dans le temps t, en sorte que sa mesure sera représentée par

$$F = \frac{m \times v}{t}.$$

Si maintenant nous observons l'action de F sur le corps Q, elle va tendre à le faire tourner autour de son axe A, et lui imprimera dans le même petit temps élémentaire t un petit degré de vitesse angulaire v_1, les forces d'inertie particlles qui naîtront sur ce corps devront faire équilibre à la force F : autrement dit, la somme des moments des premières sera égale au moment de la force F, ou au produit de cette force par la longueur de la perpendiculaire AC, abaissée de l'axe A, sur sa direction TL. On aura, par conséquent.

$$F \times AC = I \times \frac{v_1}{t'}:$$

car I est le moment d'inertie du corps Q, et $I \times \frac{v_1}{t}$ est (2e partie, 63) la somme des moments de l'inertie de ses diverses parties : d'où l'on tire

$$F = \frac{I \times v_1}{AC \times t}.$$

Égalant entre elles les valeurs de F que nous obtenons sur l'un et l'autre corps, on trouvera

$$\frac{m \times v}{t} = \frac{I \times v_1}{AC \times t},$$

ou bien encore

$$m \times v = \frac{I \times v_1}{AC},$$

ou enfin $$AC \times m \times v = I \times v_1.$$

Appelons v', v'', v''', ... les petits degrés de vitesse perdue par le corps P pendant un deuxième, un troisième, un quatrième petit temps constant t, et v_1', v_1'', v_1'''; .... les petits degrés de vitesse imprimée au corps Q pendant la même suite de petits instants égaux à t, on aurait

$$AC \times m \times v' = I \times v_1',$$

$$AC \times m \times v'' = I \times v_1''. \dots$$

Ajoutant toutes ces égalités, on trouve

$$AC \times m\,(v + v' + v'' + \dots) = I \times (v_1 + v_1' + v_1'' + \dots).$$

Or, les sommes $v + v' + v'' + \dots$ et $v_1 + v_1' + v_1'' + \dots$ sont celles des petits degrés de vitesse perdue ou gagnée, respectivement par les deux corps, c'est-à-dire les vitesses totales perdues ou gagnées pendant le temps plus ou moins long écoulé depuis l'instant où les corps se sont trouvés en contact. Appelant u la vitesse perdue par le corps P, et V_1 la vitesse angulaire gagnée par le corps Q, on aura enfin

$$AC \times m \times u = I \times V_1.$$

Mais il convient de considérer les effets du choc depuis l'instant où les corps se sont mis en contact jusqu'à celui où le corps P a perdu son excès de vitesse sur Q. Car une fois que le corps P aura pris la vitesse angulaire de l'autre autour de l'axe A, les deux corps ne réagiront plus, et tourneront autour de A comme s'ils ne faisaient qu'un même corps. Cette circonstance est évidemment celle où les deux corps sont mous et non élastiques. Or, la vitesse angulaire de Q autour de A étant supposée V_1 après le choc, celle du corps P deviendra alors $AC \times V_1$, en sorte que la vitesse u que celui-ci aura perdue sera égale à $V - \overline{AC \times V_1}$. Substituons à u cette valeur dans l'égalité précédente, nous aurons

$$AC \times m\,(V - \overline{AC \times V_1}) = I \times V_1,$$

ou

$$V_1 = \frac{AC \times mV}{m\,(AC)^2 + I},$$

formule qui donne la vitesse angulaire du corps choqué après le choc au moyen de son moment d'inertie et de la vitesse que possédait avant le choc le corps choquant.

81. *Application au pendule balistique.* — On a déterminé dans l'artillerie les vitesses initiales des projectiles en ayant recours à l'emploi du pendule balistique, ou d'un bloc de bois suspendu à un axe qui porte sur des couteaux (fig. 110). Ce bloc est garni de frettes perpendiculaires au plan de son mouvement; quant à la face contre laquelle le canon est dirigé, et qui est aussi perpendiculaire au plan du mouvement, elle est garnie de plomb afin qu'elle soit tout-à-fait dénuée d'élasticité. De cette manière le boulet

lancé par la pièce contre le pendule peut s'y loger, sans que le bloc soit fendu et sans qu'il y ait rejaillissement dans le sens opposé au mouvement du bloc. Soient donc V la vitesse initiale du boulet, m sa masse, V_1 la vitesse du pendule balistique après le choc, et I et M son moment d'inertie et sa masse. Soit d'ailleurs r la distance du centre d'oscillation O du pendule à l'axe de rotation A, il conviendra que le boulet soit dirigé vers ce centre, et perpendiculairement à AO, afin (2e partie, 79) qu'il n'y ait aucun choc sur l'axe A. De la relation donnée ci-dessus (2e partie, 80), on déduit

$$V_1 = \frac{r \cdot m \cdot V}{mr^2 + I},$$

ou

$$V = \frac{V_1(mr^2 + I)}{r \cdot m}.$$

On connaîtra donc la vitesse V quand la vitesse angulaire V_1 du pendule sera déterminée. — Appelons H la hauteur à laquelle le centre de gravité du pendule a été élevé en vertu de la vitesse V_1; on aura, en vertu du principe des forces vives et en remarquant que le moment d'inertie du boulet est mr^2,

$$(I + mr^2)\, V_1^2 = 2\,(M + m)\, g \cdot H,$$

ou

$$\frac{I + mr^2}{(M + m)\, g}\, V_1^2 = 2H.$$

Il est à remarquer que cette dernière égalité ne donnera la valeur de la vitesse angulaire V_1 et par suite celle de la vitesse V initiale du boulet, qu'autant que le moment d'inertie I du pendule aura été préalablement calculé. Mais on peut éviter ce calcul en faisant entrer dans ces vitesses la considération de la durée d'une oscillation complète de ce pendule. A cet effet rappelons que si on nomme T cette durée (2e partie, 77), on a

$$T = \pi \sqrt{\frac{I}{M \times D \times g}},$$

relation dans laquelle on devra substituer $I + mr^2$ à I, et $M + m$ à M, parce que le boulet fait corps avec le pendule. Cette relation devient donc

$$T = \pi \sqrt{\frac{I + mr^2}{(M + m)\, D \cdot g}}.$$

Élevant au carré, on trouve

$$T^2 = \frac{\pi^2 (I + mr^2)}{(M + m)\, D \cdot g},$$

et, par suite,

$$\frac{I + mr^2}{(M + m)\, g} = \frac{DT^2}{\pi^2}.$$

Si, dans l'équation des forces vives, on met $\frac{DT^2}{\pi^2}$ à la place de

$\frac{I + mr^2}{(M+m)\,g}$, on a

$$\frac{D \,.\, T^2}{\pi^2} V_1{}^2 = 2H,$$

ou

$$V_1 = \frac{\pi}{T}\sqrt{\frac{2H}{D}}.$$

Enfin, on a encore

$$I + mr^2 = \frac{(M+m)\,gDT^2}{\pi^2},$$

et, en vertu de ce qui a été dit (2e partie, 78),

$$T = \pi\sqrt{\frac{r}{g}},$$

ou

$$r = \frac{T^2 g}{\pi^2}.$$

Remplaçons dans la valeur de V ou de la vitesse initiale du boulet, V_1, $I + mr^2$ et r par leurs expressions ainsi données au moyen de la durée T d'une oscillation complète du pendule, nous trouverons, en définitive,

$$V = \frac{\pi}{T}\sqrt{2HD} \times \frac{M+m}{m}$$

ou

$$V = \frac{\pi}{T}\sqrt{2HD} \times \frac{P+p}{p};$$

parce qu'ici on peut mettre les poids P et p du pendule et du boulet à la place de leurs masses. Remarquons encore que H est la hauteur dont le centre de gravité du pendule monte en décrivant un cercle avec un rayon égal à D ou à sa distance à l'axe de rotation A. Soient GG′K (fig. 111) ce cercle, G et G′ les positions initiale et finale de ce centre de gravité; RG′, moyen proportionnel entre les deux segments RG et KR du diamètre vertical KG ou 2D, est égal à

$\sqrt{RG \times KR} = \sqrt{RG\,(2D - RG)} = \sqrt{H\,(2D - H)} = \sqrt{2DH}$, à cause que l'oscillation du pendule est supposée fort petite. Ainsi, $\sqrt{2DH}$ est la moitié de la corde C qui sons-tend l'amplitude de l'arc total décrit par le centre de gravité dans une oscillation complète. Donc, enfin, on a

$$V = \frac{1}{2}\,\frac{\pi}{T}\,.\,C\,\frac{P+p}{p}.$$

A l'aide de cette formule, on voit qu'il suffira de compter le nombre des oscillations du pendule dans un temps déterminé, ou d'avoir (2e partie, 76) la durée T d'une oscillation complète, ainsi que l'amplitude de l'arc décrit par le centre de gravité, pour trouver la vitesse du boulet qui aura mis en

mouvement le pendule balistique. J'observerai, d'ailleurs, que cet arc est facile à évaluer d'après celui qu'une aiguille fixée à l'extrémité du pendule trace sur une auge circulaire FK (fig. 110), concentrique au mouvement et remplie d'une matière molle.

IX.

MACHINES SIMPLES. — ASSEMBLAGES DE BARRES OU CORDAGES.

82. *Équilibre d'une corde ou barre tirée par ses deux extrémités; sa tension.* — Nous allons passer à l'examen des *machines simples*, appelées ainsi parce que toute machine quelconque se compose du système de l'une ou de plusieurs d'entre elles. Nous commencerons par la *machine funiculaire*, ou assemblage de cordes ou de barres, et nous supposerons généralement les cordes ou les barres parfaitement rigides, inextensibles; nous ferons même abstraction de leur pesanteur et de leur inertie. L'inertie est, en effet, peu de chose comparativement aux forces appliquées si le mouvement venait à varier. Lorsque d'ailleurs il deviendra utile d'en tenir compte, on le pourra au moyen des principes déjà posés. Il en est de même du poids des cordes ou des barres, lorsque ce poids est comparable aux forces extérieures, mais ce cas est fort rare dans la pratique. Enfin, l'hypothèse qu'elles sont inextensibles est fondée sur ce que, dès qu'une corde a été étendue sous l'action d'une ou de plusieurs forces, celles-ci restant les mêmes, elle se comporte ensuite comme si elle était inextensible.

Soit donc une corde AB (fig. 112), tirée à ses deux bouts A et B par des forces quelconques; imaginons à chaque bout des plans tels que MN, M'N', perpendiculaires à la direction de la corde, et décomposons les forces chacune en deux autres, l'une dans le plan perpendiculaire placé au bout de la corde qui lui correspond, et l'autre dans la direction AB de cette corde. Comme cette corde n'est pas destinée à cheminer perpendiculairement à son mouvement, il est évident que les composantes perpendiculaires à sa direction devront se faire équilibre d'elles-mêmes. Il ne restera plus qu'à considérer celles qui agissent dans la direction AB. Il conviendra évidemment pour l'équilibre que cette corde soit continuellement tendue, et qu'en vertu du principe de l'action égale et contraire à la réaction, la somme ou la différence des composantes qui agissent selon la direction AB à l'extrémité A soit égale et contraire à la somme ou à la différence des composantes qui agissent au point B: autrement dit, toutes les forces données devront se réduire pour l'équilibre à deux forces égales et contraires. Il sera de plus nécessaire que ces deux forces exercent leur action

en tirant en sens contraire sur la corde, car si elles poussaient contre cette dernière, elle se plierait et ne pourrait transmettre intégralement leur action réciproque. Si, au lieu d'une corde, il s'agissait d'une barre, les conditions d'équilibre seront encore les mêmes; seulement alors, la barre étant susceptible de résister aux refoulements, les deux forces appliquées à ses extrémités pourront aussi bien la pousser que la tirer. Quoiqu'il en soit, en se rappelant ce qui a été dit sur la composition des corps, on peut supposer que les petits ressorts placés entre chaque point de la barre ou de la corde sont tendus ou comprimés par deux forces égales et contraires et de même intensité que les forces qui agissent aux extrémités. Ces forces égales qui s'entre-détruisent à chaque point C sont ce qu'on nomme la *tension* de la corde ou de la barre. La tension est la même en chaque point, sauf le cas où une barre est tirée verticalement, parce que, outre les forces des extrémités, il y a ici d'autres forces qui font varier la tension d'un point à un autre.

Quand on tire sur une barre ou sur une corde, elle s'allonge et même elle peut se rompre. Si elle était également résistante, cette rupture devrait avoir lieu simultanément dans tous ses points, et cependant il n'en est pas ainsi dans les arts; les barres ou cordes ne sont point homogènes, et on les voit se rompre là où la résistance est la plus faible. — Quand deux morceaux de ficelle ont des longueurs égales, il n'y a pas de raison pour que l'une se rompe plutôt que l'autre sous une même résistance; mais lorsque les longueurs sont inégales, il y a plus de chance pour la rupture de la ficelle qui est la plus longue. Voilà pourquoi une grande corde ou ficelle se rompt plus facilement qu'une plus courte. Nous reviendrons plus tard sur ces résistances; nous nous bornerons pour le moment à observer que leur force se mesure soit avec des poids, soit avec des dynamomètres.

83. *Quantité de travail exercée sur une corde.* — On vient de voir que, pour que des forces se fassent équilibre aux extrémités d'une corde, il faut que la résultante des forces qui agissent à un bout soit égale et immédiatement contraire à celles des forces de l'autre bout, et que les directions de ces résultantes se confondent avec celle de la corde. Le travail de ces résultantes devant être le même, on en conclut que la quantité de travail des forces qui agissent à un bout est égale à celle des forces qui agissent sur le bout opposé. Enfin, le travail de ces résultantes est aussi égal à celui de la tension de la corde en un point quelconque C; et pour l'évaluer il suffit de multiplier cette tension par le petit chemin décrit par ce point dans la direction de cette tension ou de la corde. Ainsi, le travail de plusieurs forces appliquées à une même corde est encore égal à la quantité de travail de la tension de la corde. Dans la sonnerie des cloches on fixe ordinairement au bout de la corde principale AB (fig. 113) un certain nombre de cordelles sur lesquelles un même nombre d'hommes tire séparément,

chacun pour son compte. Il serait difficile d'évaluer le travail partiel de chaque sonneur, parce que la direction de son effort varie à chaque instant. Mais il y a une tension générale exercée sur le câble AB, et la quantité de travail de cette tension est précisément égale à la somme des quantités de travail développée par les hommes. Remarquons que leurs efforts se décomposent en efforts horizontaux et en efforts verticaux ; que les uns doivent se faire équilibre par eux-mêmes et s'entre-détruire ; et que les derniers seuls travaillent, et sont égaux en somme à la tension du câble. Les efforts horizontaux sont donc exercés en pure perte et fatiguent inutilement les hommes. Ainsi, quoique toute la quantité de travail des hommes soit transmise au câble, la disposition des cordelles inclinées est une cause de fatigue d'autant plus grande qu'elles sont plus inclinées. C'est pour cette raison qu'on a imaginé de les relier à un cercle commun horizontal dont le centre est à l'aplomb du câble, et dont la circonférence supporte d'autres cordelles ou *tirandes* verticales auxquelles les hommes sont appliqués.

84. *Équilibre sur des cordes qui concourent en un même point.* — Lorsque plusieurs forces agissent sur des cordes qui concourent en un même point, la tension de l'une étant égale à la résultante des efforts qui ont lieu sur toutes les autres, on voit que, pour qu'il y ait équilibre, cette même tension devra être égale et directement opposée à la force qui sollicite la corde que l'on considère. Donc, si des forces sont appliquées à des cordes concourantes, la condition de leur équilibre exige que l'effort de l'une d'elles soit égal et directement contraire à la résultante des forces qui tirent toutes les autres. — On sait qu'un réverbère est suspendu par uue poulie mobile C (fig. 114), dont la gorge peut glisser sur une corde ACB, attachée à deux points fixes A et B. S'il y a équilibre, il est évident que le poids P du réverbère doit être égal à la résultante des tensions t et t' qui ont lieu sur les deux branches AC et CB de la corde de suspension, ou que, sur la verticale CE on prenne CD proportionnelle à ce poids, et que l'on construise le parallélogramme $CtDt'$; les côtés Ct et Ct' devront représenter ces tensions respectives. Or, la longueur de la corde ACB étant constante, le point C appartient en outre à une ellipse dont A et B sont les foyers; et sa position sur cette ellipse, comme pour tout système pesant en équilibre, doit être telle que l'équilibre soit stable; ce qui n'aura lieu qu'autant que le point C sera le plus bas possible. Ce point est d'ailleurs celui où la tangente à la courbe est horizontale. Or, les angles que la tangente à l'ellipse fait avec les rayons vecteurs AC et CB sont égaux : donc, pareillement, la verticale CD partagera en deux parties égales l'angle ACB de ces rayons vecteurs. Par conséquent, la figure $CtDt'$ est un losange, et l'on a $t = t'$. Cela résulte immédiatement du principe de la réaction égale et contraire à l'action, attendu que les cordons se tirent entre eux immédiatement au travers de la gorge de la poulie C, comme au travers d'un anneau. — Si le point C d'application d'un

fardeau ne peut glisser, il n'y a plus à rechercher sa position, il est le sommet du triangle ABC. En faisant la décomposition du parallélogramme, on trouve que les deux tensions ne sont plus égales et que la plus grande a lieu du côté où la verticale du fardeau est la plus rapprochée de celle de chaque point fixe. En effet, si le fardeau était placé dans la verticale de A ou que la ligne AC fût verticale, la tension serait la plus grande possible du côté de ce point, puisque alors elle serait égale au poids du fardeau; de plus, la tension exercée sur la branche BC serait zéro. On voit encore qu'il serait impossible que le point de suspension C laissât du même côté les verticales des points fixes A et B. Si, par exemple, le cordon a une longueur AC'B (fig. 115) et que le point donné de suspension soit C', ce dernier prendra la position C'' sur la verticale de A, et la branche de corde du côté B sera détendue.

85. *Équilibre du polygone funiculaire.* — Considérons un polygone funiculaire ABCD.... (fig. 116), composé d'un assemblage de cordes ou de barres, et tiré à ses sommets A, B, C, D par des forces quelconques P, Q, R, S. Soient, en outre, N et N' deux forces de tirage agissant aux deux sommets A et D, suivant les directions AA' et DD', et qui représentent les efforts exercés aux deux extrémités par lesquelles ce polygone est attaché. Les conditions d'équilibre sont analogues aux précédentes, et la figure que formeront entre eux les côtés en tournant autour de leurs articulations pour satisfaire à cet équilibre est dite *polygone funiculaire.* Elle sera telle que l'équilibre subsistera sur chaque sommet en particulier. Ainsi, en décomposant chaque force R en deux autres forces dirigées sur les côtés BC et CD adjacents à son sommet d'application C, ces deux forces seront égales et directement contraires aux tensions t_2 et t_3 de ces côtés. Observez que cet équilibre est indépendant de la longueur des côtés, et qu'il aura lieu lors même que ces côtés seront devenus nuls. Dans ce dernier cas, toutes les forces extérieures auront été transportées parallèlement à elles-mêmes autour d'un même point, aussi bien que les tensions des côtés; mais, comme chaque côté est tiré par deux tensions égales et contraires, celles-ci se détruiront entre elles, et il ne restera que les forces étrangères aux tensions. Ces forces se faisant encore équilibre autour du point sur lequel elles auront été transportées, on voit que la condition de l'équilibre d'un polygone funiculaire est *que toutes ses forces qui lui sont appliquées se fassent équilibre lorsqu'elles sont transportées en un même point parallèlement à elles-mêmes.*

86. *Équilibre d'un poligone supportant un poids.* — Si toutes les forces P,Q, R,S (fig. 117) sont parallèles, la force est dans le plan des côtés BC et CD adjacents à son sommet d'application C; la force Q est également dans le plan des côtés AB et BC : donc les trois côtés AB, BC et CD sont dans le même plan qui passe par les directions des forces parallèles Q et R. On démontre-

rait de la même manière manière que tout le polygone est dans un seul et même plan, ainsi que les forces parallèles qui lui sont appliquées. Si le polygone est, par exemple, un assemblage de barres pesantes, les forces qui sollicitent chaque côté sont précisément leurs poids respectifs. Soit p le poids de la barre AB. Ce poids devant passer par le milieu de AB, ou par son centre de gravité, se décomposera en deux autres forces, égales à $\frac{1}{2}p$, appliquées en A et B; de même, le poids q de BC donnera lieu à deux composantes $\frac{1}{2}q$, appliquées en B et C; et le poids r de CD à deux autres composantes $\frac{1}{2}r$, appliquées en C et D. Ainsi, chaque sommet B et C sera soumis à l'action des forces $\frac{1}{2}(p+q)$, $\frac{1}{2}(q+r)$, qui seront égales à la demi-somme des poids des côtés adjacents : il n'y aura que les sommets extrêmes qui supporteront le demi-poids du côté qui leur aboutit respectivement. On n'aura plus ainsi à s'occuper que d'un polygone sans pesanteur chargé à ses sommets. Dans tous les cas, puisque toutes les forces verticales P, Q, R, S doivent être en équilibre avec les forces N et N' qui supportent le polygone, ou qui sont exercées à ses deux points de supension A' et D', il faudra que la résultante des premières soit égale et directement opposée à celle de ces dernières. D'ailleurs, la résultante de tous les poids P, Q, R, S a sa direction selon la verticale qui passe par leur centre de gravité G. Par conséquent, les directions AA' et DD' des efforts N et N', ou tensions extrêmes, se coupent en un même point O de cette verticale. Si donc OM représente la somme de tous les points P, Q, R, S, ou leur résultante, les côtés OV, OU du parallélogramme construit sur les prolongements de ces tensions extrêmes et dont OM est la diagonale donneront, l'un la tension N exercée au point A', et l'autre la tension N' exercée au point D'.

87. *Moyen général de trouver les tensions.* — Il est utile de connaître la tension de chaque côté intermédiaire du polygone funiculaire pesant, afin de proportionner convenablement les grosseurs de ses côtés. Soit ABCDE. . . . (fig. 118) un polygone pesant en équilibre, en vertu des poids P, Q, R, S, T qui agissent à ses sommets, et des forces extrêmes N et N' dont les directions sont AA' et EE'. Je remarquerai que, puisque l'équilibre subsiste autour de chaque sommet A, la force N dont l'action a lieu suivant AA' est égale à la résultante des deux forces P et t_1, et que si l'on prend $An = N$ sur le prolongement de A'A et que l'on construise le parallélogramme At_1np sur An comme diagonale, les côtés du triangle Apn représenteront, l'un Ap la force P, et l'autre pn la tension t_1 du côté AB. Cela posé, menons une horizontale $a'e$ sur laquelle, à partir du point arbitraire a', nous porterons des parties $a'a$, ab, bc, cd, de, proportionnelles aux forces P, Q, R, S, et T. Si, par le point a' je mène $a'S$ perpendiculaire à la direction A'A de la force N et dont la longueur soit proportionnelle à la force N ou An, et que je joigne aS, il est évident que

le triangle $a'Sa$ sera semblable à Apn. Car les côtés du premier $a'a$ et $a'S$ sont proportionnels aux côtés Ap et An du deuxième. De plus, ces côtés étant perpendiculaires entre eux, les angles qu'ils comprennent sont respectivement égaux. Ainsi, le troisième côté aS du triangle $a'Sa$ sera proportionnel à pn ou à la tension t_1 de AB. Par la même raison ab étant proportionnel à Q, le troisième côté bS du triangle aSb sera proportionnel à la tension t_2 du côté BC, puisque les trois forces t_1 Q et t_2 se font équilibre autour du sommet AB. Enfin, puisque $a'a$ et aS sont perpendiculaires aux directions An et Ap des forces N et P, aS sera perpendiculaire au côté AB dont cette grandeur mesure la tension t_1. Il en sera de même par rapport au côté BC, de bS qui mesure sa tension t_2. Donc, si les poids se font équilibre sur un polygone funiculaire, et si l'on prend sur une horizontale une suite de divisions proportionnelles à ces poids, les perpendiculaires menées par chaque point de division à chaque côté du polygone concourront en un même point, et leurs grandeurs, comprises entre l'horizontale et ce point de concours, seront proportionnelles aux tensions des côtés du polygone, auxquels ces lignes convergentes sont perpendiculaires.

88. *Chaînette, son utilité dans les arts.* — Les côtés du polygone peuvent être très-petits et n'être soumis qu'à l'action de leur propre poids ; ce cas est précisément celui d'une chaîne suspendue par ses extrémités A et B (fig. 119), et le polygone devient une courbe qu'on nomme *chaînette*. Cette courbe est employée avec avantage pour la forme à donner aux voûtes, et l'on en voit un exemple au dôme du Panthéon de Paris, dont une des voûtes est tracée en chaînette renversée. Il faut concevoir que, pour une telle position de la chaînette, des boules égales et juxtaposées sur sa courbure y resteront en équilibre, parce qu'il n'y a aucun changement ni dans l'action de la pesanteur sur ces boules, ni dans l'action réciproque en vertu de laquelle elles se foulent l'une contre l'autre. Ces refoulements remplacent ici les tractions qui auraient lieu sur les éléments de la chaînette si cette dernière était pendue naturellement, et qu'elle soutînt toutes les boules enfilées. C'est donc pour cette raison que les voussoirs d'une voûte qui aurait pour *cintre* une chaînette renversée, s'y maintiendront en équilibre. La chaînette est encore employée dans les ponts établis sur une ou plusieurs chaînes tendues parallèlement et également d'une rive à l'autre, et qui sont chargées de madriers. Mais, dans leur construction, il importe de connaître les tensions extrêmes de ces cordes, afin de s'assurer que les points fixes qui leur servent d'attache sont suffisamment résistants.

89. *Propriétés générales de la chaînette.* — Une chaînette ACB (fig. 121), suspendue à deux points fixes A et B, n'est autre chose, avons nous dit, qu'un polygone pesant en équilibre et dont les côtés sont infiniment petits ; en sorte que si, sur une ligne horizontale A'B', on prend une longueur A'B' proportionnelle à son poids, et qu'on divise cette longueur et la chaînette

en un même nombre de parties égales, il existe un point de concours S jouissant de cette propriété, que toutes les droites menées de ce point à toutes les divisions de A'B' sont perpendiculaires aux petits côtés ou éléments de la chaînette correspondant à ces divisions, et que les grandeurs SA', SF', ... de ces mêmes lignes sont proportionnelles aux tensions qui ont lieu dans les éléments de la courbe perpendiculaires à ces directions. De toutes ces tensions, la plus petite est donnée par la perpeniculaire SC' à l'horizontale A'B'. Or, l'élément de la chaînette auquel cette tension correspond étant lui-même horizontal, ce sera le point le plus bas C de la chaînette. Les tensions devenant plus grandes à mesure que les obliques SF'. . . . s'éloignent plus de la perpendiculaire SC', on voit que les tensions des éléments d'une chaînette augmentent à mesure que ces éléments s'écartent du point le plus bas. Il suit de là que les tensions les plus grandes possibles sont aux points d'attache A et B. Deux tensions égales SF' et SG' appartiennent à deux éléments de la courbe situés à égale distance du point le plus bas C; de plus, ces éléments forment des angles égaux avec la verticale LC passant par ce point : donc ces éléments M et N sont situés sur une même horizontale NM, et cette corde NM, ainsi que toutes ses semblables, seront partagées en parties égales par cette verticale. Ainsi, la chaînette est une caurbe symétrique par rapport à la verticale passant par son point le plus bas. Il résulte encore que si les points d'attache d'une chaînette sont sur une même horizontale, les deux tensions extrêmes sont égales, et que le point de concours qui détermine toutes les tensions est sur la perpendiculaire menée par le milieu de l'horizontale proportionnelle au poids de la chaîne. A et D étant, par exemple, les deax points de suspension, et A'D' étant une longueur proportionnelle au poids de la chaînette ACD, SC' perpendiculaire à A'D' et passant par le point de concours S, coupera A'D' en deux parties égales A'C' et C'D'.

90. *Chaînettes semblables.* — Deux chaînettes ACB et *acb* (fig. 121) sont semblables lorsque leurs points de suspension A et B d'une part et *a* et *b* de l'autre sont situés sur des droites AB et *ab* parallèles, et lorsque leurs longueurs ACB et *acb* sont dans le même rapport que les distances AB et *ab*. Remarquons, en effet, que si l'équilibre subsiste sur la chaînette ACB, cet équilibre ne sera pas troublé (2e partie, 85) en diminuant proportionnellement les longueurs de ses éléments ou de ses diverses dimensions. Ainsi, lorsque ACB est réduit à la forme *acb*, non-seulement l'équilibre aura lieu pour cette dernière, mais encore il n'y aura pas une seule de ses parties qui ne soit parallèle et proportionnelle à une des parties de la première. Mais, puisque les éléments de la petite chaînette *acb* sont parallèles à ceux de la grande ACB, toutes les tensions de cette dernière pourront être comprises dans l'angle A'SB' qui intercepte les diverses tensions de la grande; on pourra alors trouver dans cet angle la position d'une droite *a'b'* parallèle

à A′B′ et qui représente le poids de la petite chaîne, comme A′B′ représente le poids de la grande. Avec un peu d'attention, on reconnaît que les deux tensions Sf′ et SF′, situées sur une même droite convergente en S, appartiennent aux éléments parallèles des deux courbes, et sont ce que j'appelle des *tensions homologues*. Or, à cause des parallèles A′B′ et $a'b'$, on a la proportion

$$Sf'' : SF' :: a'b' : A'B',$$

qui nous apprend que, *pour deux chaînettes semblables, les tensions aux points semblablement placés sur chacune d'elles sont entre elles dans le rapport des poids de ces chaînettes.*

91. *Construction de la chaînette en se donnant son poids, sa longueur et le point de concours des tensions.* — Soit A′B′ (fig. 122) une droite horizontale proportionnelle au poids de la chaînette, S le point de concours des tensions qui ont lieu dans ses divers éléments. Partageons la droite A′B′ et la longueur de la chaînette en un même grand nombre de parties; joignons les droites SA, S1, S2, S3.....; ces droites seront autant de perpendiculaires aux directions des divers éléments de la chaînette. D'un point A quelconque, abaissons une perpendiculaire A1′ à la première direction SA′, égale à une division de la longueur de la chaînette; du même point 1′ une droite 1′2′ égale à la première A1′ et perpendiculaire à S1, etc.; chacune de ces petites perpendiculaires se terminant où sa consécutive commence, et cette construction étant continuée un nombre de fois égal à celui des points de division, on formera un polygone dont les côtés donneront la chaînette avec d'autant plus d'exactitude que le nombre des divisions aura été plus grand.

Le même point de concours S donne encore le moyen de mener une tangente à une chaînette quand celle-ci est tracée. En effet, si E (fig. 123) est le point par lequel on veut mener cette tangente, et que l'horizontale A′e représente le poids de la portion AE; joignez Se, et du point E abaissez a cette droite la perpendiculaire EG; ce sera la tangente en ce point de la chaînette.

92. *Détermination du point de concours de toutes les tensions de la chaînette.* — La connaissance du point de concours dépend de celle des tensions qui s'exercent aux extrémités de la chaînette. Car A′B′ (fig. 124) étant le côté horizontal proportionnel au poids total, si des extrémités A′, B′ comme centres on décrit des arcs dont les rayons A′S et B′S sont proportionnels aux deux tensions extrêmes, leur intersection S sera le point de concours cherché. Supposons d'abord que le tracé de la chaînette, soit donné, il est évident que, d'après les conditions de l'équilibre, les deux tangentes AO, BO (fig. 125) aux deux points extrêmes se couperont en un même point O de la verticale OL passant par le centre de gravité de la chaînette, ou par son point le plus bas. Si donc on prend sur cette verticale, à partir du

point de concours O de ces tangentes, une partie OG proportionnelle au poids total, et que l'on constrnise sur ces tangentes un parallélogramme dont OG est la diagonale, les côtés A'O et OB' donneront l'un la tension extrême en A et l'autre la tension en B. Mais, si l'on a seulement les deux points de suspension A et B (fig. 126), ainsi que la longueur et le poids total d'une chaînette, voici comment on procédera pour avoir les deux tensions extrêmes. On prendra une chaîne beaucoup plus courte, et on la suspendra sur un tableau vertical, à deux points a et b situés sur une droite parallèle à AB et distants entre eux d'une quantité ab qui soit avec AB dans le même rapport que celui des longueurs des deux chaînes. Cette petite chaîne étant ainsi suspendue, on mesurera avec un dynamomètre les efforts exercés par elle aux deux points a et b; et il est évident que les tensions qui auront lieu sur la grande chaîne aux points A et B seront respectivement égales aux produits des efforts précédents multipliés par le rapport, non plus ici des longueurs, mais des poids des deux chaînes.

Au lieu de mesurer avec le dynamomètre les tensions aux extrémités de la petite chaînette, on pourra mener par le point a de suspension le plus bas, l'horizontale ad qui coupe en d la petite chaînette, et réduire ainsi le problème au cas où les deux tensions extrêmes seraient égales, car alors la portion de chaîne acd est en équilibre aussi bien que la chaînette totale acb. Cela posé, connaissant la longueur et le poids de acd, et portant sur une horizontale quelconque une partie $a'b'$ (fig. 127) proportionnelle au poids total de acb, on sera sûr que le point de concours des tentions sera sur la perpendiculaire C'K' qui partage également en C' la grandeur $a'd'$ proportionnelle au poids acd (fig. 126) de la portion de chaînette située au-dessous de l'horizontale ad. Prenons sur C'K' un point O arbitraire, et construisons par ce point de concours, et à partir de a, la chaînette dont tous les éléments soient perpendiculaires à toutes les tensions a'O qui concourent de $a'b'$ au point O; on portera perpendiculairement à C'K' une ordonnée Og égale à la différence de ab (fig. 128), véritable distance des points de suspension, et de la corde ae qui termine la chaînette obtenue. Cette ordonnée Og sera portée à droite ou à gauche de C'K', selon que ae sera plus petit ou plus grand que la vraie distance ab. Recommençant pour un nouveau point O' (fig. 127), on aura une nouvelle chaînette ac' et une nouvelle perpendiculaire O'g'. La courbe passant par les extrémités g, g' de ces perpendiculaires coupera C'K' en un point S qui sera le point cherché; et dès lors les distances Sa' et Sb' seront les tensions aux points extrêmes.

93. *Plus petite et plus grande tension sur une chaîne verticale.* — Nous avons vu que dans toute chaînette les tensions sont inégales d'un point à un autre, et que la plus petite a lieu au point le plus bas. Cette loi se maintient, lors même que la chaîne est verticale. En effet, le maillon le plus bas C (fig. 129) de cette dernière est seulement chargé du poids Q suspendu

à la chaîne ; le maillon D supporte à la fois le poids Q et le maillon C ; le maillon D′ est chargé du poids Q et des deux maillons C et D, etc., en sorte que le premier A supporte le poids Q et le poids total de la chaîne. Par conséquent, une telle chaîne devrait être plus forte au haut qu'au bas de sa longueur.

94. *Mesure directe de la tension en un point quelconque de la chaînette.* — Considérons encore une chaînette dont A et B (fig. 130) sont les points de suspension, et dont D est un point quelconque. Il est évident que si la chaînette entière est en équilibre, cet équilibre ne sera pas troublé en supposant que ce point quelconque D soit fixe et que l'on supprime la partie AD. Mais alors si la partie DCB est en équilibre, il en sera de même à l'égard de la portion de chaînette comprise entre le point D et le point le plus bas C, parce que, par un raisonnement analogue, nous pourrons encore supprimer la partie CB. Or, il est à observer que la partie DC étant en équilibre par rapport aux points D et C considérés comme ses points de suspension, il faudra, pour les conditions de cet équilibre, que le point de cette portion de chaîne fasse équilibre aux tensions en D et C ; ce qui ne peut avoir lieu qu'autant que les deux tangentes OD et OC coupent en un même point O la verticale PM passant par le centre de gravité de la chaînette CD. Donc, alors, en désignant par P le poids de cette dernière, P est égal et opposé à la résultante des tensions en D et C. L'une, suivant la tangente en D, sera désignée par T ; et l'autre agissant suivant la tangente horizontale OC, sera désigné par T′. A partir de l'intersection O des tangentes, prenons sur la verticale OM une partie OM égale au poids de la portion DC de chaînette, et construisons sur ces deux tangentes un parallélogramme dont OM soit la diagonale : l'un des côtés, ON ou DM, représentera la tension horizontale qui s'exerce au point le plus bas ; et l'autre, DO, la tension T au point D. Mais, par la raison que les trois forces T, T′ et P, ou les lignes DO, ON et OM qui les représentent respectivement, soit en équilibre, on pourra regarder l'une d'elles T comme égale et immédiatement opposée à la résultante des deux autres, ou ces dernières comme les composantes de la première. L'une de ces composantes T′ étant, comme nous l'avons déjà dit, une force horizontale égale à la tension qui a lieu au point le plus bas C, et l'autre P étant le poids de la chaînette comprise entre le point D et le point C, on en conclut que *la tension en un point quelconque d'une chaînette a deux composantes, composante horizontale et composante verticale, dont l'une est la tension au point le plus bas de la chaînette, et dont l'autre est le poids même de la portion de chaîne comprise entre le point le plus bas et celui que l'on considère.*

Cette même conséquence se déduit aussi de la considération du point de concours d'où partent une suite de lignes qui, aboutissant aux diverses divisions d'une droite horizontale et proportionnelles au poids de la chaînette, représentent elles-mêmes les tensions de la chaînette. Car on sait que

la perpendiculaire SK à l'horizontale (fig. 131) représente la tension au point le plus bas, et que KG est proportionnel au poids de la portion de chaîne comprise entre le point le plus bas et celui qui correspond à G sur la chaînette, et pour lequel l'élément de la courbe est perpendiculaire à SG. Ainsi, cette tension SG est l'hypoténuse d'un triangle rectangle dont un côté est constamment égal à la tension du point le plus bas, et dont l'autre côté est égal au poids de la portion de chaîne interceptée entre ce point et celui pour lequel la tension SG a lieu.

Puisque la tension à un point quelconque de la chaînette a pour composante horizontale la tension au point le plus bas, et pour composante verticale le poids de chaîne comprise entre ce dernier et le premier point, il est évident que si celui-ci est un point de suspension fixé à un pilier (fig. 132), il pourra être considéré comme sollicité par ces deux composantes. Or, celle qui provient du poids de la chaîne est détruite par la résistance du pilier, et tend elle-même à appuyer ce pilier sur sa base ; tandis que la composante ou *poussée horizontale*, qui tend à le renverser, est constante et égale à la tension horizontale du point le plus bas de la chaîne. D'où l'on conclut que, dans toute chaîne suspendue à deux points fixes également ou inégalement élevés, ces derniers sont soumis à des efforts horizontaux, constants, et égaux à la moindre tension de la chaîne.

95. *Tensions extrêmes d'une chaînette dont la flèche est fort petite.* — Il est facile de calculer les tensions d'une chaîne à ses deux points de suspension, lorsque sa flèche est peu considérable. Soit, en effet, ACB (fig. 133) une chaîne donc C est le point le plus bas, et CD la flèche, c'est-à-dire l'abaissement de ce dernier au-dessous de l'horizontale passant par l'un des points de suspension. D'après ce qui a été dit plus haut, l'équilibre peut être regardé comme ayant lieu séparément sur les parties CB et AC. Or, à cause de la petitesse de la flèche CD, la branche BC a peu de courbure, et son centre de gravité G est à-peu-près placé à son milieu comme si elle était une ligne droite; les tangentes BG′ et CG′ couperont d'ailleurs en un même point G′ la verticale GG′. Désignant par T la tension au point B suivant la première, par T_o la tension horizontale au point le plus bas C, et par p le poids de la portion de chaîne BC, on aura, à cause de l'équilibre des trois forces P, T et T_o, les deux proportions

$$p : T :: BH : HG', \text{ et } p : T :: BH : BG'.$$

La première donne $$T_o = p \cdot \frac{HG'}{BH},$$

et la dernière, $$T = p \cdot \frac{BG'}{BH};$$

sur quoi on observera que BH est égal à la flèche CD que nous appelerons f, que HG′ est la moitié de CH on de BD que nous nommerons l, parce que

G est le milieu de la ligne BC regardée comme droite, et que BH est verticale et parallèle à GG′. Enfin, à cause du triangle rectangle BGH, on a

$$BG' = \sqrt{\overline{BH}^2 + \overline{G'H}^2} = \sqrt{f^2 + \frac{l^2}{4}}.$$

Faisant ces substitutions dans les expressions de T_o et de T, en trouvera

$$T_o = \frac{p \cdot l}{2f},$$

et

$$T = \frac{p}{f}\sqrt{f^2 + \frac{l^2}{4}} = p\sqrt{1 + \frac{l^2}{4f^2}}.$$

La première exprime la tension au point le plus bas, qui est, comme on l'a vu, la même chose que la poussée horizontale exercée sur le point d'appui ou de suspension. La deuxième donne la valeur de la tension totale exercée sur ce même point d'appui et tangentiellement à la courbe. Cette dernière tension, essentielle pour en déduire les dimensions convenables à donner à la chaînette, peut se mettre sous une forme plus commode pour la pratique. En effet, on démontre qu'un radical de la forme $\sqrt{a^2 + b^2}$, et pour lequel on sait que a est plus grand que b, est équivalent, à $\frac{1}{25}$ près, à cette autre valeur rationnelle

$$\overline{0{,}96 \times a} + \overline{0{,}04 \times b};$$

et, comme dans le radical de l'expression de T, on a

$$a = \frac{l}{2f} \text{ et } b = 1,$$

on pourra donner à cette expression cette autre forme

$$T = p\left(0{,}96\,\frac{l}{2f} + 0{,}04\right).$$

96. *Application aux ponts établis sur des chaînes tendues d'une rive à l'autre.* — Nous avons déjà donné une idée de la manière simple d'établir un pont sur une rivière, en la traversant de deux ou plusieurs chaînes tendues également et parallèlement, et en chargeant ces dernières d'un ou de deux rangs de madriers. Supposons que le poids total de ces madriers soit de 2000^k, ou que le demi-poids $p = 1000^k$; que la largeur de la rivière, dont l est la moitié, soit de 16^m, ou que $l = 8^m$; et qu'enfin la flèche soit de 1^m, ou $f = 1$; on aura $\frac{l}{2f} = 4^m$, et, par suite,

$$T = 1000^k\,\overline{(0{,}96 \times 4 + 0{,}04)} = 3880^k.$$

Ce sera l'effort qui devra tendre l'ensemble de toutes les chaînes; et, si elles sont au nombre de cinq, l'effort sur chacune d'elles sera réduit

à $\frac{3880}{5} = 776^k$. Portons à 10^k l'effort qu'une chaîne peut supporter par millimètre carré de section : la section sera égale à $\frac{776}{10}$ millimètres carrés, ou à 78 millimètres carrés environ ; en sorte que la section sera un carré ayant pour côté de 8 à 9 millimètres. Telle serait du moins la dimension nécessaire à un barreau de fer, pour qu'il supportât le pont. Mais si, au lieu d'un barreau, on se sert d'une série de trousseaux de fils de fer réunis entre eux par d'autres fils en spirales, on déterminera le nombre de fils de fer convenable, pour que la section de la trousse, tant pleine que vide, soit la même que celle du barreau ; je dis *tant pleine que vide*, parce que le fil de fer a une force beaucoup plus grande qu'un barreau.

L'inconvénient des ponts posés sur des chaînes est que celles-ci ne peuvent être tendues en ligne droite, et que ces ponts ont ainsi peu de stabilité. Nous venons de démontrer en effet que la tension horizontale d'une chaîne était égale à $\frac{p \cdot l}{2f}$, expression qui prouve que si f est rendu dix fois, cent fois, etc., plus petit, la tension horizontale devient dix fois, cent fois plus grande, et qu'ainsi, malgré ces efforts énormes, la flèche ne sera jamais nulle. La même remarque s'applique à la tension extrême, puisqu'elle est la résultante du poids de la demi-chaîne et de la tension horizontale $p\ \frac{l}{2f}$.

97. *Ponts suspendus au-dessous des chaînes par des suspensoires équidistantes et verticales.* — Afin d'obvier aux inconvénients des ponts posés sur des chaînes tendues, on les suspend au contraire à deux chaînes supérieures UABC .... V, portant des suspensoires verticales en fer AA' BB', CC', ... qui se correspondent sur les deux chaînes. Chaque couple de suspensoires est réuni par des traverses horizontales dans lesquelles ces suspensoires sont boulonnées par le bas, et qui reçoivent des poutrelles qu'on recouvre de madriers. Soient alors U et V les points de suspension du polygone funiculaire UABCD .... V. Chaque couple de suspensoires peut être regardé comme chargé de la moitié de la travée du pont qui le précède, et de la moitié de celle qui le suit ; en sorte que, si toutes les travées sont égales ou si les couples de suspensoires sont équidistants, on pourra regarder le poids supporté par chaque suspensoire comme connu, et déduire la force du fer qui convient à cet effort vertical. D'ailleurs, ces poids étant très-considérables comparativement à ceux des suspensoires elles-mêmes, il est permis de faire abstraction de ces derniers, et de ne tenir compte dans l'équilibre du polygone funiculaire, que des poids du pont répartis sur chacune d'elles. — Soit uv (fig. 135) une droite horizontale, et S un point tel que uS soit perpendiculaire au côté extrême UA, et pro-

portionnel à la tension de ce côté. Supposons d'abord que le polygone UABC .... V soit disposé de telle sorte que l'un de ses côtés DE soit horizontal, et prenons sur l'horizontale *uv* des parties *ua*, *ab*, *bc*, *cd*, etc., proportionnelles aux parties du poids du pont supportées par les angles A, B, C, D, ... On sait que les lignes convergentes S*u*, S*a*, S*b*, S*c*,.... représenteront les tensions qui ont lieu sur les côtés UA, AB, BC, CD,.... auxquelles elles sont perpendiculaires, et que la perpendiculaire S*d* représentera la tension du côté horizontal DE. Cela posé, veut-on trouver la différence de hauteur d'un angle A au-dessus de son consécutif B ? en menant l'horizontale BA'', on observera que le triangle AA'' B, a ses côtés perpendiculaires à ceux du triangle S*ud*, et que ces deux triangles semblables donnent la proportion

$$AA'' : A''B :: ud : Sd,$$

et, par suite,

$$AA'' = \frac{A''B}{Sd} \times ud.$$

Supposons d'ailleurs que les suspensoires soient équidistantes, en sorte que A''B sera une partie constante égale à la longueur d'une travée. Observons, en outre, que *ud* est le poids de la portion du pont A'D' ou $\pi \times A'D'$, π étant le poids du pont sur une unité de longueur; que S*d* est la tension t_o qui a lieu sur le côté le plus bas de la chaîne; on aura alors

$$AA'' = \frac{A''B \times \pi \times A'D'}{t_o}.$$

Mais $A''B \times \pi$ n'est autre chose que le poids p d'une travée, on aura donc enfin

$$AA'' = \frac{p}{t} \times A'D';$$

et si l'on appelle K le rapport du poids d'une travée à la tension t_o qui a lieu sur le côté horizontal du polygone, on aura enfin

$$AA'' = K \times A'D'_o$$

formule qui nous apprend que la hauteur d'un angle du polygone au-dessus de son consécutif est égal au rapport K multiplié par l'intervalle compris entre la suspensoire attachée au premier angle, et l'extrémité du côté horizontal. Représentant par l la longueur d'une travée, cet intervalle sera l, $2l$, $3l$, ... nl pour la 1re, 2e, 3e, ... ne suspensoire à la suite de celle qui supporte une extrémité du côté horizontal. Ainsi, la hauteur du sommet C au-dessus de D sera Kl; celle de B au-dessus de C, 2Kl; celle de A au-dessus de C, 3Kl: donc, enfin, les hauteurs des points C, B, A, U, ... au-dessus de l'horizontale MDEN, seront Kl, Kl + 2Kl, Kl + 2Kl + 3Kl, Kl + 2Kl + 3Kl + 4Kl, et, en général, s'il y a n travées entre l'extrémité

du côté horizontal, et le sommet que l'on considère, la hauteur de ce sommet au-dessus de l'horizontale donnée par le côté le plus bas sera

$$Kl \cdot 1 + 2 + 3 + 4 + \ldots + n = Kl \cdot n \frac{(n+1)}{2}.$$

Cette expression $n \cdot \frac{(n+1)}{2} Kl$, en y faisant successivement $n = 1 = 2 = 3 = 4 = 5$, donne Kl, $3Kl$, $6Kl$, $10Kl$, $15Kl$, ... pour les hauteurs des 1er, 2e, 3e, 4e, 5e sommets à la suite du côté le plus bas du polygone. Ces nombres sont connus sous la dénomination de nombres triangulaires, parce qu'avec un nombre de boules égal à l'un d'eux (fig. 136) on peut former un triangle équilatéral qui a pour côté le plus élevé des nombres naturels dont la somme donne le nombre triangulaire que l'on considère. En partant des valeurs trouvées pour les ordonnées des divers sommets C, B, A, ... du polygone, au-dessus de l'horizontale passant par le côté le plus bas, on démontre que tous ces sommets sont sur une parabole (1) dont l'axe est vertical et passe par le milieu du côté horizontal. De là résulte un moyen très-simple de déterminer la verticale qui passe par le point milieu K du côté le plus bas du polygone. Il suffira de trouver la position O (fig. 137) de celui où cette verticale rencontre la ligne qui passe par les deux points de suspension U et V. Or, la parabole jouit de cette propriété, qu'une ligne droite coupe son axe OK en un point dont la distance OK du sommet est moyenne proportionnelle aux abscisses UM et NV des deux points U et V où cette même droite coupe la parabole (2). Remarquons d'ailleurs que l'on

---

(1) Soit y la hauteur de l'un de ces sommets, $x = nl$ sa distance horizontale au point milieu du côté le plus bas, on a

$$y = K\left(\frac{n+1}{2}\right) nl = \frac{K}{2}(n+1)\, x = \frac{K}{2}(x+l)\frac{x}{l}.$$

C'est l'équation d'une parabole dont l'axe vertical passe par le milieu de DE, et dont le sommet a pour abscisse $x = \frac{l}{2}$, et pour ordonnée $y = \frac{Kl}{8}$; ainsi, le sommet s'abaisse au-dessous du côté DE de $\frac{Kl}{8}$, quantité que l'on peut négliger dans la pratique.

(2) En effet, les abscisses KP et KQ sont proportionnelles aux carrés des ordonnées UP et VQ, et celles-ci, à cause des triangles semblables UOP et QOV, sont proportionnelles à PO et à OQ. On aura donc la proportion

$$\overline{OP}^2 : \overline{OQ}^2 :: KP : KQ;$$

d'où l'on tire

$$\overline{OP}^2 \times KQ = \overline{OQ}^2 \times KP,$$

ou

$$(OK - KP)^2 \times KQ = (KQ - OK)^2 \times KP.$$

Développant les carrés, on trouve, toutes réductions faites,

$$\overline{OK}^2 = KP \times KQ, \text{ ou bien } \overline{OK}^2 = UM \times VN.$$

doit se donner la hauteur du pont au-dessus de la rivière, et celle an-dessus du pont, de l'horizontale qui tient lieu de garde-fon et qui se confond avec le côté le plus bas du polygone funiculaire. Par conséqnent, la droite MN est donnée de position, et les hauteurs MU et NV des points de suspension U et V sont connues. Ponr trouver le point O, et par suite le point K, portez UM de N en P'; décrivez snr P'V comme diamètre la demi-circonférence P'TV; menez par le point N, à cette circonférence, la tangente NT qui sera la moyenne proportionnelle cherchée; portez enfin par un arc de cercle la distance NT de N en T'; et par le point T' menez à MN la parallèle OT' qni coupe la corde UV au point O. La verticale OK rencontrera l'horizontale MN en un point K qne l'on pourra regarder comme nne extrémité du côté horizontal du polygone, à partir de laquelle on portera les intervalles égaux de chaque suspensoire. A ces intervalles correspondront les ordonnées successives Kl, 3Kl, 5Kl, ... $n\frac{(n+1)}{2}$ Kl. En supposant que cette dernière appartienne au point de suspension U, il est évident qu'elle doit être la même que la hauteur connue h de ce point an-dessus de MN; ce qui donne le moyen de trouver le rapport K. Car on a

$$n \cdot \frac{n+1}{2} \mathrm{K}l = h,$$

d'où

$$\mathrm{K} = \frac{2h}{n(n+1)l}.$$

Ainsi, les longuenrs successives des suspensoires Kl, 3Kl, 5Kl, seront elles-mêmes déterminées.—Nons avons vu que le rapport K est égal à $\frac{p}{t_o}$, c'est-à-dire an poids d'une travée divisé par la plns petite tension. Donc on aura

$$t_o = \frac{p}{\mathrm{K}} = \frac{n(n+1)lp}{2h}.$$

Partant on aura obtenn la tension t_o. Celle du premier côté à la suite du côté horizontal sera égal à $\sqrt{t_o^2 + p^2}$, celle du denxième à $\sqrt{t_o^2 + (2p)^2}$, du troisième à $\sqrt{t_o^2 + (3p)^2}$, du n^e à $\sqrt{t_o^2 + (np)^2}$. Si les points U et V de snspension sont à même hauteur, il est évident que la courbe devient symétrique par rapport à la verticale OK; on n'a plus alors à chercher la hauteur du point O, et il ne reste qu'à calculer le rapport K d'après la hanteur des points de snspension au-dessus du côté le plus bas du polygone.

X.

CORPS POSÉS SUR D'AUTRES CORPS OU SUR DES PLANS OU SURFACES.

98. *Idée générale de la réaction des corps posés les uns sur les autres.* — Lorsque deux corps se touchent et se compriment en un certain point, il se forme à cet endroit une dépression dont l'enfoncement est perpendiculaire à leur petite surface de contact, et qui indique que la réaction des deux corps l'un contre l'autre est elle-même dirigée sur la perpendiculaire ou normale qui leur est commune. Supposons maintenant que l'un A des corps soit sollicité par des forces dont la résultante se confond avec cette perpendiculaire, et que l'autre corps A′ demeure fixe, la réaction de ce dernier détruira alors cette résultante, et le corps A demeurera au repos. Mais il est évident que l'équilibre subsistera encore si l'on remplace le corps A′ par une force égale à la réaction qu'il exerce contre le corps A, et si l'on considère ce dernier comme libre et comme sollicité par cette nouvelle force concurremment avec les autres forces données. Cette propriété que tout corps résiste à un autre selon la perpendiculaire commune qui passe par leur point de contact, s'étend au cas général où un corps est posé sur différents corps à la fois. Les réactions de ces derniers sont autant de forces véritables qu'il est permis de substituer aux divers points par lesquels le premier corps s'appuie sur les autres, et dès lors l'équilibre de ce corps est, en vertu de cette substitution, ramené à des conditions analogues à celles qui auraient lieu s'il était libre. Nous examinerons d'abord les simples circonstances d'un corps posé sur un plan par un point unique, ou par deux ou par trois, ou enfin par plusieurs points.

99. *Corps reposant par un point sur un plan.* — Considérons une sphère soumise à la seule action de son poids P, et poussée par un point m sur un plan de niveau AB (fig. 138). Puisque la réaction de ce plan a lieu selon la perpendiculaire ou la verticale du point de contact m, et qu'elle doit faire équilibre au poids P, nécessairement le centre de gravité G du corps sera compris dans cette verticale, en sorte que l'effort P du corps sera tout-à-fait détruit par la résistance du plan. De même, encore, quand un corps pose par un seul point sur un plan quelconque, et qu'il est sollicité aussi par des forces quelconques, il faut que leur résultante soit perpendiculaire au plan, et qu'elle passe par le point d'appui. La condition de passer par le point d'appui ne suffirait pas à elle seule. Car, si l'on décompose cette résultante en deux forces, l'une perpendiculaire au plan, et l'autre située dans le plan, toutes deux passant d'ailleurs par le point m, la première sera à la vérité détruite par la résistance du plan ; mais l'autre composante fera

cheminer le corps le long de ce plan, et il n'y aura plus équilibre. Donc, enfin, l'équilibre d'un corps qni s'appuie sur un plan par un seul point est sonmis à denx conditions : 1° que la résultante des forces appliquées au corps passe par le point d'appui ; 2° que sa direction soit perpendiculaire au plan.

100. *Corps reposant par deux points sur un plan.* — Mais quand le corps repose par deux points A et B (fig. 139) sur un plan, la condition de passer par un des appuis n'est plus indispensable à la résultante des forces qui le sollicitent ; il suffit qu'elle rencontre la droite AB à l'un de ses points compris entre A et B, il faut de plus qu'elle soit perpendiculaire au plan. En effet, les réactions exercées par les points d'appui, étant l'une et l'autre perpendicnlaires an plan, sont évidemment parallèles ; et, pour qu'elles fassent équilibre à la résultante des forces appliqnées au corps, cette dernière devra ponvoir se décomposer en deux forces respectivement égales et immédiatement contraires aux résistances des appuis. Or, celles-ci sont dirigées dans le même sens ; ainsi, la résultante en question aura son point d'applicatiou sur la droite AB entre les points A et B d'application de ses composantes ; elle devra d'ailleurs leur être parallèle, et, par conséquent, être comme elles, perpendiculaire au plan. — S'il s'agit d'un corps de poids P posé sur un plan de niveau, il conviendra pour l'équilibre que la verticale abaissée de son centre de gravité rencontre la ligne des appuis dans un point de l'intervalle qui les sépare.

101. *Corps posés par trois ou par plusieurs points sur un plan.* — Arrivons enfin au cas où le corps repose par trois points sur un plan quelconque. Les résistances des points d'appui étant toujours perpendiculaires à ce plan, ne pourront faire équilibre à l'action des forces extérieures qui sollicitent le corps qn'autant que la résultante de ces forces pourra se décomposer en trois forces respectivement égales aux trois premières. Cette résultante sera donc, comme celles-ci, perpendiculaire au plan ; et, comme elles sont dirigées dans le même sens, son point d'application devra se trouver dans l'intérieur dn triangle qui réunit les trois appuis. Cela résulte immédiatement de la composition des forces parallèles. Ces conditions s'étendent au cas où le nombre des appuis sur nn plan est quelconque. Il faut toujours pour l'équilibre du corps que la résultante des forces qui lui sont appliquées soit perpendicnlaire au plan, et qu'elle coupe le plan dans l'intérieur du polygone convexe qni réunit deux à deux le plus grand nombre des points d'appui. Si la résultante conpe le plan en nn point *m* extérienr au polygone (fig. 140) ou à la conrbe (fig. 141) qui réunit les appuis, le corps tendra à tourner ou à se renverser autour de l'arête *ab* du polygone on de la tangente à la conrbe la plns voisine dn point *m*. Quant à l'énergie qui sollicitera le corps à se renverser, elle sera mesurée par le produit de la résul-

tante de toutes les forces, et de la plus courte distance de sa droite de direction à l'arête ou à la tangente autour de laquelle se fera le mouvement de rotation du corps.

102. *Exemples divers.* — Nous avons déjà examiné les conditions d'équilibre d'une sphère pesante sur un plan de niveau, appliquons ces mêmes principes à d'autres exemples, et commençons par celui d'un corps posé sur une table soutenue par trois pieds. Si les trois pieds d'appui sur un plan de niveau sont en ligne droite, et que la verticale du centre de gravité du corps passe en dehors du plan vertical de cette droite, la table s'inclinera et basculera du côté où ce centre de gravité est situé, avec une énergie égale au *moment de stabilité* du corps, c'est-à-dire au produit de son poids multiplié par la distance *ag* de la projection de son centre de gravité à l'arête de rotation A*a* (fig. 142). Si cette distance est nulle, le centre de gravité passera par la droite des appuis, et il y aura équilibre : mais cet équilibre sera non stable, parce que le centre de gravité est alors le plus haut possible et qu'il tend à descendre.

Si les trois pieds ne sont pas en ligne droite et que le centre de gravité G du corps se projette dans l'intérieur du triangle, la table est évidemment en équilibre (fig. 143). Enfin, si ce même centre se projette en dehors, la table tournera autour du côté *ab*, le plus voisin de cette projection. Dans le premier cas, l'équilibre est stable, parce que, pour déranger la table de sa position, il faut élever le centre de gravité du corps. Dans le deuxième cas, l'équilibre est instable, parce que ce centre tend à descendre. Généralement, pour l'équilibre stable, il faut que le centre de gravité du corps se projette dans l'intérieur du polygone qui réunit deux à deux ses appuis sur un plan de niveau. L'énergie avec laquelle le corps s'opposera à son renversement autour d'une arête sera égale au produit de son poids par la distance de la projection de ce centre à cette arête, et ce renversement sera d'autant plus facile que cette distance deviendra moindre. Voilà pourquoi on nomme *moment de stabilité* d'un corps pesant le plus petit des moments de son poids, par rapport aux divers côtés de sa base.

Les conditions sont les mêmes si le corps pose par une face plane tout entière et terminée par une courbe quelconque. L'équilibre a lieu quand la projection du centre de gravité du corps tombe dans l'intérieur de la base. Tel sera, par exemple, un cube posé sur un plan de niveau, parce que la projection du centre de gravité coïncide avec le centre de la base (fig. 144). Il en est de même pour un prisme droit quelconque, et quelle que soit sa hauteur, seulement sa stabilité diminue à mesure que la hauteur devient plus grande. On conçoit en effet, que le centre de gravité s'élevant de plus en plus, l'angle BAG, que fait avec le plan vertical passant par l'arête A le plan qui passe par la même arête et par le centre de gravité G, est de plus

en plus petit. Ainsi, le centre de gravité G se rapproche de plus en plus du cas de l'instabilité. Supposez d'ailleurs une force horizontale p tendant à renverser le corps autour de l'arête A et appliquée au sommet du corps. Son moment sera $p \times AB$. Mais le moment de stabilité en vertu duquel le corps résistera à son renversement est égal à $P \times ag$. D'où

$$p \times AB = P \times Ag,$$

et, par suite,
$$p = P \times \frac{Ag}{AB},$$

relation qui nous apprend que p sera d'autant moindre par rapport au poids P du corps que sa hauteur AB sera plus considérable. Un cône sera difficile à renverser parce que son mouvement de stabilité est plus considérable.

Un prisme incliné conservera l'équilibre stable, tant que son centre de gravité tombera dans l'intérieur de sa face d'appui. La résistance qu'il opposera à son renversement autour de la tangente ab (fig. 145) la plus voisine de la projection g du centre de gravité, ou son moment de stabilité, sera égal à $P \times mg$. Dans le cas où le poids g tombe au dehors, le corps tend à tourner autour de la tangente la plus voisine de la projection du centre. La tour de Pise, quoique inclinée, se maintient toujours dans sa position, parce que son centre de gravité se projette dans l'intérieur de sa base sur le terrain. — Des dominos empilés les uns sur les autres et se dépassant l'un l'autre d'une même quantité, de manière à former une espèce de prisme incliné, demeurent en équilibre tant que le centre de gravité de tout le système des dominos se projette dans l'intérieur du domino le plus bas. Mais au fur et à mesure que le nombre des dominos ou que la hauteur de la pile augmente, ce centre se rapproche de l'arête A (fig. 146), le moment de stabilité diminue, et finit même par devenir négatif, ou par favoriser le renversement du système lorsque le centre de gravité tombe au dehors de l'arête A. On voit, d'après ce qui précède, que la stabilité naturelle d'un corps augmente quand sa hauteur diminue ou quand sa base augmente, et que, toutes choses égales d'ailleurs, elle est la plus grande possible lorsque le centre de gravité tombe au centre de figure même de la base. Cela explique pourquoi les soutiens isolés doivent se composer de corps élevés à l'aplomb et être établis sur des bases plus larges qu'on nomme *empatements*.

Si les corps pesants sont sollicités par d'autres forces conjointement avec l'action de leur poids, il faut que la résultante de toutes ces forces réunies, ainsi que nous l'avons dit (2e partie, 101), aille rencontrer la base de ces corps dans son intérieur. Il y a même telles forces qui, combinées avec le poids d'un corps, en augmentent la stabilité. C'est ainsi qu'un prisme incliné dont le centre de gravité tombe au dehors de sa base, serait renversé autour de B (fig. 147) si on l'abandonnait à lui-même. Mais si une force F horizontale tend à le faire tourner en sens contraire, cette force combinée

avec le poids du corps aura une résultante GO qui rencontrera la base AB en un point O qui lui sera intérieur et l'équilibre sera stable. Réciproquement, le poids du prisme s'oppose à son tour à ce que l'action de F ne le renverse autour de l'arête extérieure A et avec une énergie d'autant plus grande que le produit $P \times Ag$, c'est-à-dire son moment de stabilité naturelle, sera plus considérable.

Les murs de maison sont ordinairement poussés autour de leur pied extérieur par les combles, ou les poutres qui appuient contre eux du dedans au-dehors; mais on augmente leur stabilité naturelle en éloignant de cette même arête leur centre de gravité (fig. 148). Voilà pourquoi on leur donne du fruit ou une épaisseur plus grande à la base qu'au sommet. Toutefois ces murs ne cessent pas d'être dressés verticalement. On cache l'effet de ce changement d'épaisseur par des cordons, des plinthes, etc.

Dans les murs destinés à soutenir les terres, afin de résister à la poussée de ces dernières, on cherche à éloigner l'arête extérieure de ces murs de leur centre de gravité, soit par des talus, soit encore par de larges empatements, et de manière à remplir la condition que la résultante du poids des murs et de la poussée des terres passe dans l'intérieur de la base. Le moment de stabilité naturelle de ces constructions est toujours égal à leur propre poids multiplié par la distance de leur centre de gravité à l'arête extérieure. On voit même que l'on pourrait supprimer les talus et conserver au mur un parement vertical, pourvu que sa nouvelle épaisseur donnât lieu au même moment de stabilité, parce que la stabilité naturelle de deux murs est la même, lorsque les moments de leurs poids sont égaux. La condition que la résultante de toutes les forces passe dans l'intérieur de la base est insuffisante pour des constructions qui reposent sur un terrain mou ou compressible; il faut encore que le point de rencontre coïncide avec le centre de figure de la base. S'il n'en était pas ainsi, la pression serait plus forte du côté où la résultante traverse la base : celle-ci tournera autour de son centre de figure, attendu que le terrain n'est plus résistant, mais à l'aide de la nouvelle condition, il n'y aura plus de raison pour que le corps s'enfonce plutôt d'un côté que de l'autre.

Si la charge d'une voiture à deux roues qui est traînée sur un plan de niveau, est telle que son centre de gravité soit en dehors de l'essieu (fig. 149), elle tendra à basculer dans un sens ou dans l'autre; tantôt elle exercera une pression sur le cheval limonier, tantôt elle tendra à le soulever, et ces deux circonstances sont également des causes de fatigue pour le cheval. Mais, si le centre de gravité est compris dans le plan vertical de l'essieu, l'action verticale du poids se décomposera en deux autres forces passant par les appuis des roues sur le terrain, et qui seront immédiatement détruites par la résistance de ces derniers. Nous verrons plus loin

si cette dernière condition a encore lieu quand le terrain est incliné.

103. *Définition et équilibre du plan incliné.* — Représentons-nous un plan quelconque coupé perpendiculairement à ses horizontales et suivant sa ligne de plus grande pente AB (fig. 150). Quoique ce plan soit supposé indéfiniment prolongé, son inclinaison suffit pour définir sa base AC et sa hauteur BC, correspondantes à une même longueur donnée AB. Qu'on imagine un corps pesant posé sur ce plan, et dont G soit le centre de gravité. L'équilibre de ce corps sur ce plan exigerait: 1° que la résultante de son poids passât par un des points de la base d'appui de ce corps; 2° que cette résultante fût perpendiculaire au plan. Cette dernière condition ne peut être généralement satisfaite à l'égard d'un plan quelconque, parce que l'action de la pesanteur est toujours verticale. Dès lors cette action se décomposera en deux autres, l'une perpendiculaire au plan qui sera détruite par sa résistance, et l'autre parallèle au plan, qui fera mouvoir ou descendre le corps selon la longueur. On remarquera cependant que si la verticale du centre de gravité rencontre l'intérieur de la base d'appui du corps, ce dernier ne fera que glisser dans le sens du plan, au lieu qu'il y roulera si cette verticale tombe au dehors de cette même base. C'est ce qui arrivera à l'égard d'une boule, parce que la verticale passe toujours en dehors de son point d'appui m sur le plan. Supposons qu'une force p parallèle à ce plan s'oppose à ce que cette boule ne descende. Appelons P le poids de cette dernière. On sait que le corps devant rester en équilibre sous l'action des deux forces p et P, leur résultante GM sera perpendiculaire à AB (fig. 151), et passera par le point d'appui m. Cela posé, soit GM l'intensité de cette résultante: elle sera telle que les côtés du parallélogramme GG'MN représenteront, l'un GG' = MN la force verticale P, et l'autre GN la force p parallèle à AB. Or, le triangle GMN est semblable au triangle ABC. Car GM et MN sont perpendiculaires à AB et à AC; de plus ils sont rectangles l'un en G et l'autre en C. On aura la proportion

$$GN : MN :: BC : AB, \text{ ou } p : P :: BC : AB.$$

Ainsi, la force parallèle au plan qui retient le corps est au poids de ce corps comme la hauteur du plan est à sa longueur; on a

$$p = P \times \frac{BC}{AB}.$$

Si, au lieu de tirer dans le sens du plan, la force p qui retient le corps sur le plan était horizontale, et agissait à la manière de la puissance qui empêche un écrou de descendre le long de sa vis, GM (fig. 152) résultante du poids du corps et de cette nouvelle force n'en sera pas moins toujours perpendiculaire à AB, et le triangle GMN qui représente les deux forces qui sollicitent le corps, ainsi que leur résultante, sera encore semblable au triangle ABC. Mais comme GN est perpendiculaire à BC, et que l'angle droit

du premier triangle est en N, on aura la proportion

$$GN : MN :: BC : AC, \text{ ou } p : P :: BC : AC;$$

ce qui apprend que la force horizontale qui retient le corps sur le plan est au poids du corps comme la hauteur du plan est à sa base, ou que p est égal à $P \times \frac{BC}{AC}$. On remarquera que, dans la valeur de p, le numérateur est le même pour les deux cas et proportionnel à la hauteur du plan, mais que le dénominateur n'est autre chose que le côté du plan parallèle à la force appliquée.

104. *Mouvement sur le plan incliné.* — Nous sommes maintenant à même de trouver la loi du mouvement d'un corps pesant abandonné à lui-même sur un plan incliné. En effet, nous pouvons en décomposer son poids GM en deux autres forces, l'une MN (fig. 153) perpendiculaire au plan et détruite par la résistance de celui-ci, l'autre GN parallèle au plan et qui produira seul le mouvement. Au moyen de la similitude des triangles semblables GNM et ABC, on reconnaîtra que la dernière composante p est égale à $P \times \frac{BC}{AB}$, P étant toujours le poids du corps. Remarquons que le rapport $\frac{BC}{AB}$ reste le même dans toute la longueur du plan, et qu'ainsi la force p qui tend à faire glisser le corps demeure constante comme la pesanteur. Or, quand une force motrice est constante, le corps conserve un mouvement uniformément accéléré ainsi qu'on l'a vu dans la 1re partie. Les vitesses acquises croîtront proportionnellement au temps, et les espaces décrits comme les carrés des temps écoulés, etc. Seulement chaque degré de vitesse imprimée sera moindre que pour la pesanteur : car les vitesses imprimées au bout de la première unité de temps seront ici proportionnelles aux forces motrices. On aura donc

$$P : p :: g : g', \text{ d'où } \frac{g'}{g} = \frac{p}{P} = \frac{BC}{AB},$$

et, par suite,

$$g' = g \times \frac{BC}{AB}.$$

Telle sera la valeur de l'intensité de la gravité dans le sens du plan. C'est par la considération du plan incliné que Galilée est parvenu à découvrir les lois de la chute des corps graves. Bien que ces lois soient les mêmes dans le sens vertical que le long d'un plan incliné, on conçoit que la rapidité de mouvement et la résistance de l'air rendent extrêmement difficiles l'estimation des temps écoulés et des espaces décrits par les corps graves, lorsqu'ils tombent verticalement. Il n'en est plus de même quand ils glissent sur un plan incliné, à pente très-douce. Galilée a d'ailleurs diminué autant que possible l'influence de la résistance du plan, en posant les corps sur un chariot

dont les roues cheminaient sur des arêtes aiguës, ainsi que cela se pratique aujourd'hui dans les chemins de fer.

Considérons encore une voiture qui chemine sur un terrain incliné AB (fig. 154) et dont le brancard peut d'ailleurs être regardé comme sensiblement parallèle à ce terrain. Quoique le centre de gravité de la charge soit avec l'essieu dans un même plan perpendiculaire au terrain, cependant ici l'action verticale de cette charge passe au dehors et tend à faire tourner la voiture dans un sens opposé à celui de la montée. L'énergie de cette action, égale à $P \times mb$, sera d'autant plus grande que la verticale qui passe par le centre de gravité de la charge s'écarte plus de l'appui m des roues sur le terrain. Il conviendra, pour contre-balancer cet effet, que le conducteur se place sur le devant de sa voiture, quand elle monte, et sur l'arrière quand elle descend. A proprement parler, il n'y a point de remède contre un tel inconvénient. On le diminue, cependant, en rendant la charge la moins haute possible au-dessus de l'essieu, parce que le moment de stabilité $P \times mb$ augmente avec la hauteur Gm du centre de gravité au-dessus des appuis de la voiture sur le terrain.

105. *Frottement des corps sur un plan.* — Le frottement est la résistance qu'un corps posé sur une surface oppose au mouvement. Cette force, qui n'est point le poids du corps, mais qui est en réalité la résistance du terrain, ne doit pas être confondue avec l'adhérence. Celle-ci se manifeste lorsque la surface par laquelle le corps pose sur le plan est enduite d'une espèce de colle. Si dans cette circonstance, on cherche à détacher le corps, la résistance qu'on éprouve ne dépend nullement ici du poids du corps, mais bien du nombre des parties en contact ou de la grandeur de la surface enduite. Ainsi, l'adhérence est double, triple, quadruple, si la surface est double, triple, quadruple : en un mot, elle croît proportionnellement aux surfaces en contact ; mais elle demeure la même quel que soit le poids du corps. Le frottement, au contraire, demeure le même quelle que soit la surface, et il augmente avec le poids du corps ou plutôt avec la pression qu'il exerce contre le plan sur lequel il est mis en mouvement. Les lois de la résistance du frottement ont été découvertes par Amontons et Coulomb. Avant de donner les principes établis à cet égard par ce dernier physicien, il convient d'expliquer les principes des méthodes qui peuvent y conduire.

106. *Mesure du frottement d'une substance quelconque contre un plan.* — A l'aide du peson à ressort, dont il a été parlé plusieurs fois, on peut mesurer immédiatement la résistance opposée par le frottement d'une substance sur un plan de niveau (fig. 155). Tirez, en effet, avec le peson, cette substance chargée d'un poids quelconque, en la faisant marcher sur le plan d'un mouvement uniforme. La division sur laquelle l'aiguille de l'instrument s'arrêtera, indiquera *en poids* la résistance occasionnée par le frottement de la substance sous la charge donnée contre le plan.

Ce même frottement peut encore s'obtenir au moyen du plan incliné (fig. 156). En effet, si l'on décompose le poids P du corps en deux forces, l'une perpendiculaire et l'autre parallèle au plan de cette dernière, p est, commme l'on sait, égal à $P \times \frac{BC}{AB}$. De plus, tant que cette composante sera inférieure à la résistance ou au frottement, le corps demeurera au repos, et il ne prendra du mouvement qu'à l'instant où le plan aura reçu une inclinaison telle que la composante p soit devenue égale à la résistance cherchée F. On aura donc

$$F = P \times \frac{BC}{AB}.$$

Sans entrer dans le détail des expériences de Coulomb, qui, au lieu de l'un des moyens précédents, s'est servi de traîneaux horizontaux, nous nous bornerons à dire, avec cet habile physicien, que le frottement est généralement proportionnel à la charge du corps qui glisse, ou plutôt à l'effort perpendiculaire à la surface contre laquelle il frotte. Nous verrons, en effet, que les forces autres que la pesanteur qui sollicitent un corps, peuvent avoir des composantes perpendiculaires au plan dont l'effet est d'augmenter ou de diminuer la pression du corps contre le plan; mais c'est toujours à la pression résultante de toutes les forces que le frottement est regardé comme proportionnel. Cela posé, lorsque par les règles de la mécanique, la pression contre la surface en contact a été calculée, on en déduit immédiatement le frottement sur le plan en multipliant la première par son rapport avec cette résistance, et ce rapport, variable selon certaines circonstances, est indiqué sur des tableaux qui résultent des expériences de Coulomb. Remarquons, d'ailleurs, que la règle du frottement proportionnel à la pression n'est point générale, et que, pour des corps de substances différentes, les lois du mouvement ne sont pas toujours indépendantes de la vitesse du corps ni de l'instant où il a lieu. Lorsque du fer a reposé, par exemple, longtemps sur du bois, le frottement augmentera ensuite avec la durée du repos, parce que la compressibilité du bois permet au fer de s'y engraîner davantage; c'est environ au bout de cinq à six jours que le frottement arrive à sa plus grande limite; il devient triple ou quadruple de celui qui a lieu quand les corps sont en mouvement continuel.

Les vannes qui sont restées longtemps fermées, et que l'eau a pressées contre leurs feuillures, opposent, quand on les lève, un très-grand frottement qui diminue dès que le mouvement est établi.

Il faut donc distinguer les frottements selon deux circonstances principales. Voilà pourquoi nous présenterons ici deux tableaux différents. Dans le premier, les surfaces planes sont supposées être restées en contact assez longtemps pour que le frottement ait atteint toute sa valeur. Le deuxième est relatif au frottement des surfaces dans la supposition où le mouvement est établi depuis un certain temps.

PREMIER TABLEAU. *Frottement des surfaces planes quand elles auront été longtemps en contact.*

INDICATION DES SURFACES EN CONTACT.	RAPPORT du frottement à la pression.	OBSERVATIONS.
Chêne sur chêne, les fibres parallèles.	0,44	Le frottem^{t} parvient au *maximum* au bout de quelques secondes.
» » les fibres parallèles et la surface réduite à des arêtes arrondies.	0,42	*Idem.*
» » les fibres croisées.	0,27	*Idem.*
» » les surfaces garnies d'un enduit de suif renouvelé à chaque expérience.	0,38	Le frottem^{t} atteint son *maximum* en quelques jours. L'adhérence produit une résistance d'environ 19 k. par mètre carré.
» » Les mêmes après un long user en mettant du vieux oing. . . .	0,21	Le frottem^{t} atteint son *maximum* en quelques jours. L'adhérence produit une résistance d'environ 39 k. par mètre carré.
Chêne sur sapin, les fibres parallèles.	0,67	Le frottem^{t} atteint son *maximum* au bout de quelques secondes.
Sapin sur sapin, les fibres parallèles.	0,56	*Idem.*
Orme sur orme, les fibres parallèles.	0,46	*Idem.*
Fer sur chêne.	0,20	Il n'est point certain que le frottement ait atteint son *maximum.*
Cuivre sur chêne.	0,18	*Idem.*
Fer sur fer.	0,28	Le *maximum* du frottem^{t} a lieu au bout de quelques secondes.
Cuivre sur fer.	0,26	*Idem.*
» » la surface réduite à des pointes émoussées.	0,17	
» » les surfaces garnies d'un enduit de suif neuf.	0,11	
» » » d'un enduit d'huile.	0,17	Il a lieu au bout de quelques heures. La résistance de l'adhérence est d'environ 7 k. par mèt. carré.
» » » d'un enduit de vieux oing.	0,14	
Cuir sur marbre poli, à sec, le cuir non usé. . . .	0,40	Le frottement est moindre pour des pressions au-dessous de 0k,10 par centimètre carré.
» » le cuir poli pour l'user.	0,25	
» » le cuir légèrement huilé et onctueux.	0,32	Pression de $\frac{0^{k},15}{2}$ à $\frac{0^{k},45}{2}$ par centimètre carré.
Cuir sur fonte non polie, à sec.	0,25	
non polie, huilé.	0,21	
Cuir sur fonte ou fer poli à sec, après user. . .	0,20	Le frottem^{t} augmente un peu avec la vitesse, et diminue pour des pressions au-dessous de 0k,02 par centimètre carré.
Cuir sur chêne, les fibres en longueur, à sec, non » » poli.	0,33	Le frottement varie peu avec la vitesse.
» » après user et poli.	0,30	
» » légèrement humecté d'eau. . .	0,85	*Idem.*
» » complètement mouillé. . . .	0,75	
» » légèrement huilé ou onctueux. .	0,38	
» » fortement huilé.	0,33	
La filasse, dans les mêmes circonstances que le cuir, donne le même frottement.		
Chêne sur marbre poli à sec.	0,33	
Pierre de liais (calcaire d'un grain très-fin) bien polie sur une pierre semblable (*Rondelet*, Tr. de l'art de bâtir, t. 3, p. 243).	0,58	La valeur du frottement après que le mouvement est commencé ne peut pas différer sensiblement de celle qui a lieu à l'instant où le mouvement commence.
Pierre de Château-Landon (calcaire très-dure), dont la surface était piquée ou bouchardée sur une pierre semblable (*Boistard*, Expériences sur la main-d'œuvre, etc., p. 58).	0,78	*Idem.*
Caisse en bois glissant sur du pavé (*Régnier*, Description du dynamomètre, Journal de l'École polytechnique, 5e cahier).	0,58	*Idem.*

DEUXIÈME TABLEAU. *Frottement des surfaces planes en mouvement les unes sur les autres.*

INDICATION DES SURFACES EN CONTACT.	RAPPORT du frottement à la pression.	OBSERVATIONS.
Chêne sur chêne, les fibres parallèles.	0,11	
» » la surface réduite à des arêtes arrondies.	0,08	
» » les fibres croisées.	0,10	
» » la surface réduite à des arêtes arrondies.	0,10	
» » les fibres parallèles et les surfaces enduites de suif ou de vieux oing, renouvelé à chaque essai.	0,035	L'adhérence des surfaces occasionne une résistance d'environ 3 kilogr. par mètre carré.
» » la surface réduite à des arêtes arrondies avec enduit, ou l'enduit essuyé et les surfaces étant onctueuses.	0.06	
Chêne sur sapin, les fibres parallèles.	0,16	
Sapin sur sapin.	0,17	
Orme sur orme.	0,10	
Chêne sur fer, les fibres étant parallèles, et la vitesse très-petite.	0,08	Le frottement augmente avec la vitesse, à moins que les surfaces n'aient été usées pendant longtemps.
» » la vitesse étant de 0m,3 par seconde.	0,17	
» » les surfaces étant très-petites, sans enduit, mais restant onctueuses.	0,07	Le rapport du frottement à la pression est constant.
Fer sur fer.	0,28	Le frottement diminue quand les surfaces ont été usées pendant longtemps.
Cuivre sur fer.	0,24	Le frottement après un long user se réduit à 0,17.
Fer sur fer, avec un enduit de suif renouvelé.	0,10	L'adhérence produit une résistance d'environ 14 kilogr. par mètre carré.
Cuivre sur fer, » » »	0,10	*Idem.*
» » avec de l'huile sur un ancien enduit de suif.	0,12	
» » la surface réduite à des pointes émoussées, restant onctueuses, ou enduites de suif ou d'huile.	0,12	
Cuir sur marbre poli, à sec, le cuir non usé.	0,25	
» » poli, le cuir poli pour l'user.	0,18	
» » le cuir légèrement huilé ou onctueux.	0,20	
Cuir sur fonte non polie, à sec.	0.20	
» » non polie, huilé.	0,18	
» » ou fer poli à sec, après user.	0, 20 0,22	Si le mouvement est lent. Si le mouvement est rapide ou de 1m par 1″.
» » ou fer poli, les surfaces étant huilées.	0,16	
» » ou fer poli, les surfaces frottées avec de la plombagine ou de l'huile.	0,12	
Cuir sur chêne, à sec non poli.	0,20	
» » après user et poli.	0,18	
» » légèrement humecté d'eau.	0,65	
» » complètement mouillé.	0,50	
» » légèrement huilé ou onctueux.	0,20	
» » fortement huilé.	0,22	
Chêne sur marbre poli à sec.	0,18	
» » huilé ou onctueux.	0,12	
Corde glissant sur du bois ou sur une surface quelconque.	0,33	
La filasse, dans les mêmes circonstances que le cuir, produit le même frottement.		

107. *Observations sur les tableaux du frottement de deux surfaces.* — Les tableaux précédents ont pour but de donner les rapports du frottement aux pressions correspondantes, et cela quelle que soit la grandeur des surfaces frottantes. Il n'y a que la nature de leurs substances qui puisse influer sur ces rapports, et l'on se tromperait en croyant que le frottement augmente avec l'étendue des surfaces. Cela n'a lieu qu'à l'égard de l'adhérence qui retient deux surfaces comme collées entre elles; encore arrive-t-il souvent qu'elle soit négligeable, attendu la petitesse des surfaces en contact, ou le peu de ténacité des matières molles dont on a coutume de les enduire. Au reste, les tableaux donnent la valeur de l'adhérence dans toutes les circonstances où il faut en tenir compte. Puisque pour des substances données, le frottement est une fraction constante de la pression, il en résulte qu'un même corps traîné sur un plan donne lieu à la même résistance sous quelque face qu'il soit posé.

Passons à quelques applications pour faire apprécier l'importance des tableaux que nous avons relatés. On y voit, par exemple, que, pour du bois de chêne sur du bois de chêne en mouvement les fibres parallèles, le rapport du frottement à la pression est environ $\frac{1}{10}$ quand le mouvement est acquis, et qu'ainsi la résistance est de 100 kilogr. pour une charge de 1000 kilogr. Quant les surfaces en contact de ces morceaux de bois sont enduites de suif, le frottement est réduit à 0,035. Le frottement du fer à plat sur d'autre fer est plus fort lorsque ces fers sortent de la main de l'ouvrier que quand ils ont été usés par le mouvement. Dans le premier cas, il est entre $\frac{1}{3}$ et $\frac{1}{4}$, et il se réduit à $\frac{1}{6}$ quand les surfaces sont parfaitement polies. Un enduit d'huile ne diminue pas sensiblement la résistance de leur frottement; mais elle est réduite au $\frac{1}{10}$ en enduisant les surfaces soit avec du vieux oing, soit avec du suif; cette dernière substance est la plus avantageuse. — Un morceau de fer contre du cuivre produit un frottement de $\frac{1}{10}$ avec un enduit de suif, et de $\frac{1}{8}$ avec de l'huile. En général, le frottement est moindre à pression égale pour des substances hétérogènes que pour des substances de même nature; il est également moindre pour des corps durs que pour des corps mous. Voilà pourquoi de l'acier sur du métal de cloche, quand ces corps sont bien polis, frotte moins que du fer sur du cuivre. La raison en est que plus les corps sont durs, moins ils s'usent, et que la quantité de travail absorbée par le frottement est proportionnelle à la quantité de matière enlevée. Enfin, quand du suif est interposé entre deux surfaces, celles-ci ne sont plus immédiatement en contact, il ne reste que le suif dont il faut vaincre la ténacité, et cette résistance est peu de chose. Nous désignerons désormais par la lettre f le rapport constant du frottement à la pression.

108. *Frottement du plan.* — Considérons d'abord un plan horizontal et

indéfini MN (fig. 157), sur lequel est posé, par l'une de ses faces, un corps du poids P tiré par une force quelconque F dirigée de bas en haut, et dont ab représente l'intensité en kilogrammes. Décomposons cette force en deux autres, l'une horizontale ac, qui produit le mouvement ; et l'autre perpendiculaire bc, ou verticale, qui tend à soulever le corps et par conséquent à diminuer sa pression sur le plan. Si cette composante verticale n'existait pas, le corps presserait de tout son poids sur le plan, et la résistance qu'il opposerait au mouvement, ou son frottement, qui est toujours proportionnel à la pression, serait $f \times P$. Appelons p la composante horizontale de F, et q sa composante verticale. $P - q$ sera la pression réelle du corps contre le plan ; $f(P - q)$ ou $\overline{f \times P} - \overline{f \times q}$ sera le frottement véritable. Donc ici la composante verticale tend à diminuer le frottement du corps de $f \times q$, ou à favoriser d'autant la composante horizontale qui le fait mouvoir. On aura ainsi, pour l'équilibre,

$$p + fq = f \times P.$$

Remarquons que l'on a les proportions

$$p : F :: ac : ab, \text{ ou } p = F \times \frac{ac}{ab},$$

et

$$q : F :: bc : ab, \text{ ou } q = F \times \frac{bc}{ab}.$$

Ainsi, la relation d'équilibre deviendra

$$F\left(\frac{ac}{ab} + f\frac{bc}{ab}\right) = f \times P.$$

D'où l'on tire $$F = \frac{f \times P}{\frac{ac}{ab} + f\frac{bc}{ab}}.$$

Le rapport f est, comme l'on sait, donné par les tableaux, et ne dépend que des substances du corps P et du plan MN. Quant aux grandeurs ac et bc, elles seront immédiatement données par le rectangle dont les côtés sont parallèles et perpendiculaires au plan et dont la diagonale est proportionnelle à la force appliquée au corps. Comme cette expression se reproduira souvent, il importe de la simplifier, en prenant pour unité la grandeur ab qui représente la force F. Dès lors les côtés ac et bc ne seront plus que des fractions exprimant les rapports des composantes avec la force elle-même. Ainsi, en posant $ab = 1$, on aura

$$p = F \times ac, \quad \text{et} \quad q = F \times bc,$$

$$F(ac + f \cdot bc) = f \times P, \quad \text{et} \quad F = \frac{f \times P}{ac + f \cdot bc}.$$

La valeur de F sera évidemment la plus petite possible ou la plus avanta-

geuse, lorsque le dénominateur $ac + f.bc$ est le plus grand possible, parce que le numérateur $f \times P$ est une quantité constante, ainsi que le rapport f du frottement à la pression. Supposons ce dernier de $\frac{1}{4}$, et cherchons dans cette hypothèse la valeur *minimum* de $ac + f.bc$ ou de $ac + \frac{1}{4}\ bc$. Prenons sur la direction de F (fig. 158) une partie ab égale à l'unité. La projection sur l'horizontale aM sera la valeur de ac, et la verticale projectante de l'extrémité b celle de bc. Pour avoir $f \times bc$ ou $\frac{1}{4}\ bc$, prenez

$$ad = f \times ab = \tfrac{1}{4}\ ab,$$

et l'on aura

$$dg = \tfrac{1}{4}\ bc = f \times bc.$$

Cela posé, sur ap' perpendiculaire à ab, portons $ad' = ad$ et abaissons la verticale $d'g'$. Les triangles $ag'd'$ et agd seront égaux comme ayant les hypoténuses égales et l'angle $g'ad'$ égal à l'angle adg, parce qu'ils sont compléments du même angle dag. D'où

$$ag' = dg' = \tfrac{1}{4}\ bc = f.bc,$$

et

$$d'g' = ag = \tfrac{1}{4}\ bc = f.ac.$$

Donc on a

$$ag' + ac = g'c = \tfrac{1}{4}\ bc + ac = f.bc + ac;$$

en sorte que cette valeur, qui n'est autre que le dénominateur de F, est précisément la projection de bd'. Or, cette projection sera la plus grande possible quand elle deviendra égale ou parallèle à bd', ou quand on aura $d'g'$ ou $ag = abc$. Mais $ag = f \times ac$. Donc enfin le *minimum* de F, c'est-à-dire le cas où cette force sera la plus avantageuse, aura lieu lorsque $bc = f \times ac$: d'où $f = \frac{bc}{ac}$. Remarquons que les grandeurs bc et ac expriment, l'une la hauteur, et l'autre la base de la direction de la force par rapport au plan, et qu'ainsi le rappport $\frac{bc}{ac}$ est précisément l'inclinaison de l'angle sous lequel la force de tirage exerce son action. Par conséquent, cette action est la plus petite possible lorsqu'elle tire sous une inclinaison exprimée par le rapport du frottement à la pression ou par la valeur f relative aux substances en contact.

Les conditions relatives au meilleur tirage des chevaux sur une voiture à quatre roues sont analogues : car leur effort se décompose en deux autres : l'un horizontal, destiné à produire le mouvement, et l'autre vertical, à soulever les roues de devant, et à diminuer leur résistance, d'ailleurs plus grande en raison de ce que leurs rayons sont plus petits.

Le cas ou un corps de poids P posé sur un plan incliné AB (fig. 159) est tiré par une force F, faisant un angle quelconque avec ce plan et dirigé de bas en haut, donne lieu à des conditions d'équilibre analogues à celui de l'équilibre du plan horizontal. Décomposez la force F en deux autres, l'une

parallèle, l'autre perpendiculaire au plan. Celle-ci donnera lieu à une composante F . bc dont le frottement f. F . bc diminuera d'autant le frottement général du corps contre le plan, et par conséquent s'ajoutera à la composante parallèle F . ac qui produit le mouvement. Quant à la composante parallèle au plan du poids P, elle s'opposera au mouvement, ainsi que le frottement produit par sa composante perpendiculaire. L'une est donnée (2[e] partie, 103) par la proportion

$$x : P :: BC : AB,$$

et l'autre par la proportion

$$y : P :: AC : AB;$$

en sorte que P . AC et P . BC représentent les composantes du poids, perpendiculaire et parallèle à ce plan, en prenant pour unité la longueur AB de ce dernier. De plus, le frottement produit par la première aura pour expression f . P . AC. Maintenant que nous savons que le mouvement est favorisé par F . $ac + f$. F . bc, et qu'il est contrarié par P . BC $+ f$. P . AC, nous reconnaîtrons que l'équilibre sera établi au moyen de la relation

$$F . ac + f . F . bc = P . BC + f . P . AC,$$

ou

$$F(ac + f . bc) = P(BC + f . AC).$$

D'où l'on tire

$$F = \frac{P(BC + f . AC)}{ac + f . bc}.$$

Nous observerons encore que le numérateur de cette valeur est constant; puisqu'il dépend uniquement du poids du corps et de l'inclinaison du plan, et qu'ainsi le *minimum* F correspond au cas où le dénominateur $ac + f . bc$ est le plus grand possible, et où l'on aurait $\frac{bc}{ac} = f$. Ce qui indique que l'action d'un effort est la plus avantageuse lorsque son inclinaison par rapport au plan est égale au rapport du frottement à la pression ou au coefficient f qui est propre à la résistance des surfaces en contact. — Enfin, dans le cas particulier où l'effort F est horizontal, on verra sans peine qu'il tend alors à appuyer le corps contre le plan, ou à augmenter le frottement général du corps, en sorte que le frottement partiel f . F . bc, au lieu d'être ajouté à la composante horizontale F . ac qui produit le mouvement, doit en être retranché : cela revient à substituer $- bc$ à $+ bc$ dans la valeur précédente de F. Cette remarque est indispensable pour le frottement de la vis à filet carré, frottement tellement majeur que dans le cas où les filets sont inclinés au $\frac{1}{6}$, la puissance est triple environ de ce qu'elle serait pour vaincre une même résistance donnée, si ce frottement n'existait pas.

109. *Quantité de travail sur un plan incliné.* — Le plan incliné est une machine de la plus grande utilité dans les arts, et facilite le transport des fardeaux les plus lourds à une hauteur considérable. Si, par exemple, il

s'agissait de construire une tour en pierres de taille, il faudrait beaucoup d'hommes pour élever les matériaux selon une direction verticale, au lieu qu'on les amène très-facilement au moyen de rampes assez douces pour que les hommes, les chevaux et les voitures puissent les parcourir. Il y a plus ; c'est que la puissance pour trainer les poids est fort réduite par l'emploi des rampes. En effet, pour conduire une pierre le long d'une rampe AB (fig. 160), les ouvriers ont coutume de la faire tourner sur ses arêtes perpendiculaires à la pente, on, comme on dit communément, ils lui font *faire quartier;* si cette pierre est un cylindre, ils la font rouler, de sorte que dans ces diverses opérations les résistances du frottement sont évitées. L'effort F, qui est ici parallèle à la longueur du plan AB, n'a plus alors à vaincre que la résistance du poids P du corps, et, d'après ce qui a été démontré (2e partie, 103) on a

$$F = \frac{BC}{AB} \times P.$$

Si la pente du plan est telle que sa longueur AB soit cent fois sa hauteur correspondante BC, l'effort à exercer contre le corps n'est plus alors que le centième de son poids. Mais a-t-on gagné sous le rapport du travail ? Rappelons-nous que lorsqu'il y a équilibre, on lorsque le corps est mû uniformément, la quantité de travail de la puissance est égale à la quantité de travail de la résistance. Ici le chemin parcouru dans la direction de F est AB ; son travail est F $\times$ AB, et celui du poids est P $\times$ BC, parce que le poids monte en réalité de la hauteur BC, pendant qu'il parcourt la longueur AB. On a donc.

$$F \times AB = P \times BC.$$

Par conséquent, le travail est le même soit qu'on élève le corps directement, ou le long d'un plan incliné ; ce dernier n'a d'autre but que de faciliter l'élévation du fardeau selon les localités.

Lorsque le corps est posé sur une surface courbe (fig. 161) il ne la touche que selon une petite surface que l'on regardera comme un point, et en imaginant à ce point un plan tangent, le corps sera dans le même état que s'il posait sur ce nouveau plan par un point. Ainsi, les considérations d'équilibre deviennent absolument les mêmes que pour un plan incliné ordinaire.

110. *Mesure de la tension d'une corde, de la part de son propre poids.* — Ce qui précède nous permet d'estimer la tension que le poids d'une corde lui occasionne dans le sens de sa longueur. Soit, en effet, une corde posée sur une surface dont A (fig. 162) est le point le plus élevé; et considérons d'abord la partie AF qui tend à se précipiter le long de la surface, abstraction faite du frottement. La question consiste à trouver la force nécessaire pour retenir cette corde, et qui est évidemment égale et opposée à la tension sur cette partie AF. Désignons par p le poids de l'unité de longueur de la corde, et raisonnons sur l'élément MN dont le poids sera $p \times$ MN.

Menons par le point O de cet élément, la verticale OG proportionnelle à $p \times MN$, et décomposons ce poids en deux forces, l'une GQ perpendiculaire à la surface, l'autre QO tangentielle à cette même surface. Il est visible que la première composante sera détruite par la résistance de AMN, et que l'autre donnera la mesure de la tension due au poids de MN. Ayant mené une verticale quelconque *af*, la verticale MN' et les horizontales M*m*, N*n*, on formera le triangle MNN' semblable au triangle QOG; en sorte qu'on aura la proportion

$$QO : OG :: MN' : MN,$$

et, par suite,

$$QO = \frac{OG \times MN'}{MN}.$$

Remarquons que QO est la tension *t* due au poids de l'élément MN, que OG représente son poids ou $p \times MN$, et que $MN' = mn$. D'où l'on tire

$$t = \frac{p \times MN \times mn}{MN} = p \times mn.$$

Ce dernier produit est le poids d'un morceau de corde égal à *mn*, ou dont la longueur est celle de la projection verticale de MN. Or, le total de la partie AF se compose d'une somme d'éléments tels que MN et qui produisent chacun une tension égale au poids de sa projection, et la somme de ces tensions, ou la tension totale qui entraîne AF de haut en bas, sera égale à la somme des poids des projections verticales de tous ces éléments, c'est-à-dire au poids de la projection verticale *af* de cette partie AF. Par conséquent, la tension ou la force nécessaire pour empêcher une portion de corde de glisser sur une surface est mesurée par le poids d'un autre morceau dont la longueur est la même que la projection verticale de cette portion. On démontrerait de même que la tension de la partie AP qui tend à entraîner la corde en sens contraire à celui de la tension AF est égale à *ap*; de sorte que la corde sera entraînée avec une force mesurée par *pf* ou par le poids d'une longueur égale à la différence de niveau entre ses extrémités, et cette tension résultante agira du côté de l'extrémité la plus basse.

Si les deux extrémités d'une même corde sont à même hauteur, ou si la corde est *sans fin* (fig. 163), la tension qu'elle éprouve de la part de son poids est nulle, et il n'y a pas lieu d'en tenir compte.

111. *Centre de gravité d'un arc de cercle.* — Nous pouvons encore trouver par le même principe le centre de gravité d'un arc de cercle. Car ce qui précède est indépendant de la flexibilité de la corde ou de la chaîne, et subsiste encore lorsque celle-ci est rigide, comme, par exemple, une jante de roue. Soit donc MAN (fig. 164) un arc de cercle composé d'une jante inflexible, et disposé de manière que le rayon AO qui passe par

son milieu A soit horizontal. Appelons F l'effort tangentiel appliqué en M pour empêcher la jante MAN de tourner sur son propre cercle autour de O. La condition d'équilibre entre cette force F et le poids P de la jante exige que leurs moments soient égaux. Or, le bras de levier de ce dernier est la distance GO du centre de gravité de l'arc au centre de rotation, distance que je désigne par x. On aura donc

$$E \times R = P \times x.$$

Remarquons que P est le poids de la longueur S de l'arc MAN, et que la force F est celui de la projection verticale de cet arc, ou de sa corde MN que nous nommerons C. On pourra donc remplacer P et F par S et C dans l'équation d'équilibre; ce qui donne

$$C \times R = S \times x,$$

ou la proportion

$$S : C :: R : x,$$

qui nous apprend que *le centre de gravité d'un arc de cercle est situé sur le rayon qui le partage en deux parties égales, et que sa distance au centre est une quatrième proportionnelle aux longueurs de l'arc, de sa corde et de son rayon.*

112. *Frottement d'une corde qui glisse sur un rouleau fixe.* — Considérons encore une corde qui glisse sur un rouleau fixe (fig. 165) et qui supporte un poids P à une de ses extrémités a, tandis que l'autre est tirée par une force T qui l'entraîne. Cette dernière doit non-seulement soulever le poids P, mais encore vaincre le frottement que produit la corde en glissant sur tout l'arc du rouleau enveloppé par elle; de sorte que si cette surface était parfaitement polie, le frottement serait nul et T serait égal à P dans le cas de l'équilibre. Partageons l'arc enveloppé at_4 en un nombre de parties très-petites et égales; et menons par les points de division des tangentes qui se coupent deux à deux et parmi lesquelles les directions des forces extrêmes P et T sont évidemment comprises. J'ai dit que les divisions devaient être très-peu espacées, afin que les arcs de cercle qui les embrassent puissent se confondre sensiblement avec les cordes at_1, t_1t_2, t_2t_3, ... qui les sous-tendent. La tension de la corde sur la tangente ab est évidemment égale à P. Soit t_1 la tension qui agit en t_1 sur la deuxième tangente bb'. Elle doit vaincre à la fois et le poids P et le frottement qui a lieu sur l'arc élémentaire at_1 compris entre les points de contact. Appelons p la pression exercée sur cet élément, f le coefficient relatif au frottement de la corde sur le rouleau qui, comme nous l'avons dit, ne tourne pas, $f \cdot p$ sera ce frottement, et l'on aura

$$t_1 = P + f \cdot p.$$

Pour trouver p, nous ferons abstractions du poids de la corde, et nous observerons que les deux tangentes ab et bt sont égales. De plus, si l'on

construit le losange abt_1m, et si l'on considère le côté ab comme proportionnel à la force P, cette même force sera encore la tension qui a eu lieu de b en t_1. La diagonale bm du losange étant perpendiculaire à la corde at_1 et la partageant en deux parties égales, on voit qu'elle sera égale à la pression p exercée par la tension de la courbe sur l'élément at_1. Les deux triangles mab et t_1oa sont isocèles; les angles de leurs sommets respectifs a et o sont égaux, parce qu'ils sont suppléments du même angle abt_1. Ainsi ces triangles sont semblables et donnent la proportion

$$mb : at_1 :: ab : oa.$$

mb est la pression p; at_1 corde de l'arc compris entre a et t_1 équivaut à ce même arc que nous appelerons s; ab équivaut à P; enfin, oa est le rayon R du rouleau. Donc la proportion revient à cette autre,

$$p : s :: \mathrm{P} : \mathrm{R} \text{; d'où } p = \frac{s}{\mathrm{R}} \times \mathrm{P}.$$

Donc enfin on a $$t_1 = \mathrm{P} + fp,$$

ou $$t_1 = \mathrm{P} + f \times \frac{s}{\mathrm{R}}\,\mathrm{P} = \mathrm{P}\left(1 + \frac{fs}{\mathrm{R}}\right).$$

Appelons t_2 la tension qui agit sur la troisième tangente $b''t_2$, et au troisième point t_2 de division de l'arc total à partir de a; on reconnaîtra que cette tension aura à vaincre la tension t_1 sur $b't_1$ et le frottement produit sur l'arc élémentaire t_2t_1 égal à s ou à l'arc at_1. En un mot, t_2 sera dans les mêmes circonstances par rapport à t_1, que t_1 par rapport à P. Donc on aura

$$t_2 = t_1\left(1 + \frac{fs}{\mathrm{R}}\right).$$

Si on appelle t_3, t_4 les tensions qui ont lieu sur les autres tangentes consécutives, et aux points t_3 et t_4, et si l'on observe que la dernière tension t_4 est égale à la force T, on aura

$$t_3 = t_4\left(1 + \frac{fs}{\mathrm{R}}\right),$$

$$t_4 \text{ ou } \mathrm{T} = t_3\left(1 + \frac{fs}{\mathrm{R}}\right) = t_2\left(1 + \frac{fs}{\mathrm{R}}\right)^2 = t_1\left(1 + \frac{fs}{\mathrm{R}}\right)^3$$
$$= \mathrm{P}\left(1 + \frac{fs}{\mathrm{R}}\right)^4$$

L'arc du rouleau, au lieu de contenir quatre petits arcs élémentaires, aurait pu en contenir 5, 6, ... ou n; et l'on aurait eu

$$\mathrm{T} = \mathrm{P}\left(1 + \frac{fs}{\mathrm{R}}\right)^5,\ \mathrm{T} = \mathrm{P}\left(1 + \frac{fs}{\mathrm{R}}\right)^6,$$

et $$T = P\left(1+\frac{fs}{R}\right)^n \text{ (1)};$$

d'où $$\frac{T}{P} = \left(1+\frac{fs}{R}\right)^n.$$

On voit que le rapport de la puissance T à la résistance P croît très-rapidement à mesure que l'arc enveloppé est plus grand ou contient plus d'arcs élémentaires s : car, pour obtenir ce rapport, il faut multiplier la quantité $1+\frac{fs}{R}$ toujours plus grande que l'unité 3, 4, 5, ... ($n-1$) fois par elle-même, selon que l'arc enveloppé contient 4, 5, 6, ... n de ces parties. Supposons, par exemple, qu'une corde soit enroulée trois fois autour d'un rouleau, ou d'un pieu cylindrique de 1 décimètre de rayon. L'arc enveloppé sera égal à 3 circonférences ou à

$3 \,.\, 2\pi \,.\, R = 3 \times 2 \,.\, \frac{22}{7} \times 1^{dm} = 18^{dm},8 = 19^{dm}$ environ. Le coefficient du frottement d'une corde sur du bois ou sur toute autre substance étant environ $\frac{1}{3}$, on a

$$1+\frac{fs}{R} = 1+\frac{1}{3}\cdot\frac{s}{R} = \frac{4}{3},$$

en prenant ici l'arc élémentaire égal au rayon. D'où

$$n = \frac{19^{dm}}{1^{dm}} = 19,$$

et, par suite,

$$\frac{T}{P} = \left(\frac{4}{3}\right)^{19} = 236.$$

---

(1) On peut ramener cette formule à sa valeur comme sous la forme d'exponentielle, ainsi qu'il suit : développant le binôme on a

$$T = P\left(1+\frac{nsf}{R}+\frac{n(n-1)}{2}\,\frac{s^2f^2}{R^2}+\frac{n\,.\,(n-1)\,(n-2)}{2\,.\,3}\,\frac{s^3\,.\,f^3}{R^3}+\ldots\right).$$

Si on remarque que le nombre n est très-grand quand l'arc s élémentaire est très-petit, on pourra négliger toute puissance de n devant celle qui lui est immédiatement supérieure; on réduira alors la valeur de T à cette autre :

$$T = P\left(1+\frac{nsf}{R}+\frac{n^2s^2f^2}{2R^2}+\frac{n^3s^3f^3}{2\,.\,3R^3}+\ldots\right).$$

Or, ns est l'arc entier S enveloppé par la corde; d'où

$$T = P\left(1+\frac{fS}{R}+\frac{f^2S^2}{2\,.\,R^2}+\frac{f^3S^3}{2\,.\,3R^3}+\ldots\right) = Pe^{\frac{fS}{R}}\ldots$$

e est égal à 2,71825; c'est la base du système des *Logarithmes Népériens*.

Par conséquent, la force capable de faire glisser la corde autour du pieu devrait être 236 fois plus grande que celle qui l'y retient. Réciproquement, si un très-grand effort agit sur l'extrémité d'une corde enroulée autour d'un rouleau cylindrique semblable au précédent, il suffira d'une force 236 fois moins grande à l'autre extrémité, pour s'opposer à l'effet de ce même effort.

Ce principe explique pourquoi en général l'amarre qui retient un vaisseau ne glisse pas quand elle est enroulée un certain nombre de fois autour d'un pieu cylindrique; il en est de même des effets du cabestan, de la chèvre et en général de toutes les manœuvres de force.

Les tonneliers ont aussi recours à ce principe, pour faire descendre les tonneaux de vin dans les caves. Chaque tonneau repose sur un traîneau qui glisse sur l'escalier de la cave, et il est embrassé par une corde dont les deux bouts, après s'être enroulés un certain nombre de fois autour de deux cylindres debout appuyés à l'extérieur de la porte de la cave, sont retenus par deux hommes. L'effort que ces deux hommes opposent à la descente du tonneau est d'autant plus faible que le nombre des enroulements autour du cylindre est plus considérable; et comme d'ailleurs cet effort est ici la résistance à un travail dans lequel le poids du tonneau est la puissance, on voit que les hommes avec un effort très-minime peuvent empêcher que cette descente ne soit trop rapide. Le calcul de cette résistance est même facile à faire, quand on connaît le poids du tonneau et en ayant recours à la théorie du plan incliné et du frottement des cordes contre un rouleau fixe.

113. *Équilibre. Théorie du coin.* — Toutes les applications présentées jusqu'ici n'ont été relatives qu'aux corps posés sur une surface; et cependant un corps peut poser à la fois sur deux ou trois surfaces. Tel est, par exemple, le coin ou prisme triangulaire dont les trois faces sont perpendiculaires au triangle ABC (fig. 166). L'arête C qui correspond à l'angle le plus aigu du triangle se nomme le tranchant du coin; la face opposée BA en est la tête, et les faces BC, BA les côtés. L'usage du coin réduit à sa plus grande simplicité, consiste à enfoncer cette machine par son tranchant C dans la substance que l'on veut diviser en fendre, de manière que lors d'un enfoncement quelconque, le coin repose ou s'appuie par ses côtés en deux points *a* et *b* (fig. 167) de la substance. Nous supposerons que la puissance F qui le fait descendre soit perpendiculaire à la tête, parce que si elle était oblique, elle tendrait à faire tourner le coin sur lui-même, et donnerait lieu à des complications inutiles à considérer en ce sens et que la puissance agit toujours de la première manière dans la pratique. Cette force F, perpendiculaire à la tête AB, a d'ailleurs pour but de vaincre les résistances que la matière oppose au mouvement du coin contre ses côtés, et nous avons vu (2e partie, 98) que ces résistances devaient être respecti-

vement perpendiculaires aux surfaces sur lesquelles elles ont lieu, et passer par les points de contact de ces surfaces. Ainsi, les résistances de la matière contre le coin seront deux forces Q et R appliquées en *a* et *b* et perpendiculaires aux côtés AC et BC du coin. La force F, qui leur fait équilibre, sera égale et directement opposée à leur résultante; et comme celle-ci doit passer par le point de concours des forces Q et R, il faudra nécessairement que les trois forces F, Q et R se coupent en un même point; autrement le coin prendrait un mouvement qui tendrait à le renverser et qui serait ainsi étranger à l'objet qu'on se propose. Donc, enfin, si ces résistances sont données, la diagonale du parallélogramme construit sur leurs intensités et à leur point de concours donnera l'intensité de la force F à appliquer perpendiculairement à la tête du coin, pour que celui-ci vainque ses résistances. Or, remarquons qu'en prenant sur la direction de Q, à partir de O, une ligne O*m* égale à cette force, et en menant par le point *m* une perpendiculaire à BC égale à *mn* ou à l'intensité de R, on obtiendra un triangle O*mn*, dont deux côtés représenteront les deux résistances Q et R, et dont le troisième O*n* représentera leur résultante ou la puissance F qui lui est égale et directement opposée. Le triangle O*mn* est semblable au triangle ABC : car leurs côtés étant respectivement perpendiculaires, l'angle O*mn* est égal à l'angle C; l'angle *mn*O est égal à l'angle B; enfin, l'angle *m*O*n* est égal à l'angle A. Ainsi, les côtés O*n* et AB opposés à ces angles sont homologues; il en est de même des côtés *m*O et AC, et des côtés *mn* et BC. On aura donc la proportion

$$On : mO : mn :: AB : AC : BC,$$

ou, en remplaçant les grandeurs O*n*, *m*O et *mn* par les forces F, Q et R qu'elles représentent,

$$F : Q : R :: AB : AC : BC;$$

ce qui indique que dans l'équilibre du coin, la puissance perpendiculaire à la tête, et les deux résistances perpendiculaires aux côtés sont proportionnelles à cette tête et à ces côtés.

Plusieurs cas particuliers se présentent selon la forme du coin. Ainsi, par exemple, si sa forme est celle d'un triangle ABC (fig. 168) rectangle en A, et que les points d'appui *a* et *b* des résistances Q et R sur les côtés soient sur une même droite *ab* parallèle à la tête, il est impossible que la puissance F, perpendiculaire à cette dernière, concoure au point commun des directions de ces résistances, à moins qu'elle ne soit appliquée selon la direction F*b* parallèle au côté AC, et passant par le point d'application de la résistance qui est perpendiculaire à l'hypothénuse. Dans le cas où le coin est un triangle isocèle (fig. 169), ce qui a presque toujours lieu dans la pratique, on a $AC = BC$; et comme,

d'après ce qui précède, les relations qui satisfont à l'équilibre sont

$$Q = \frac{F \times AC}{AB} \text{ et } R = \frac{F \times BC}{AB},$$

on voit qu'à cause de $AC = BC$, on a $Q = R$. D'où l'on tire la proportion

$$F : Q :: AB : AC.$$

Ordinairement quand on veut séparer des corps, on se sert de coins dont la tête est fort petite par rapport à leurs côtés; si elle est dix fois moindre, ou que AB soit le dixième de AC, F est le dixième de la réaction Q à vaincre. Ainsi, l'avantage des coins serait tel qu'en diminuant leur tête, ou l'angle de leur tranchant, on pourrait avec des efforts ordinaires vaincre des résistances considérables, ou dix fois, cent fois plus grandes, selon que la tête est le dixième ou le centième du côté.

114. *Influence du frottement sur les effets du coin.* — On reconnaît déjà, d'après ce qui vient d'être dit, combien les coins sont utiles dans les arts. Mais ce serait prendre une idée bien inexacte des effets du coin, si, comme précédemment, on les considérait indépendamment des frottements occasionnés sur les côtés. Les frottements sont, en effet, proportionnels aux pressions Q et R, et si ces dernières, par suite de la dimension de la tête, deviennent énormes par rapport à la puissance F destinée à les surmonter, il doit en être de même à l'égard des frottements qui sont toujours contraires à l'action de la puissance. Celle-ci devra donc faire équilibre à la résultante des résistances Q et R et à la résultante des frottements qui seront $f \cdot Q$ et $f \cdot R$ (f étant le rapport du frottement à la pression pour les substances du coin et de la matière qu'il divise), et qui, agissant le long des côtés AC et BC, pourront être regardés comme appliqués au sommet C. Bornons-nous au cas du coin isocèle; on aura

$$Q = R, f \cdot Q = f \cdot R.$$

Si, de plus, les points d'appui a et b des résistances Q et R sont sur une parallèle à la tête AB, on voit sans peine que la résultante de ces résistances est située sur la droite CD (fig. 170) qui passe par le sommet C et par le milieu D de la tête; que si On est l'intensité de cette résultante et que Om et mn soient les intensités ainsi que les directions des deux résistances égales Q et R, le triangle Omn semblable à ABC donne

$$On = \frac{Q \times AB}{AC}.$$

Prenons en outre sur les prolongements de AC et BC deux portions $b'C$, et $a'C$, proportionnelles à fQ : la diagonale Cc' du losange $Cba'c'$ donnera l'intensité de la résultante due aux deux frottements qui ont lieu sur les deux côtés du coin; on a d'ailleurs $Cc' = 2CI$. Enfin, cette dernière résultante des frottements est évidemment située sur la ligne CD aussi bien que celle

des deux résistances Q, et, par conséquent, elle s'ajoute à cette dernière pour contrarier le mouvement que doit produire la puissance F. On aura donc pour l'équilibre

$$F = On + 2CI.$$

Mais l'autre diagonale $b'a'$ du losange $b'Ca'c'$ est perpendiculaire à Cc' et le triangle a'CI semblable à ACD donne la proportion

$$a'C \text{ ou } f.Q : AC :: CI : CD,$$

d'où

$$CI = f.Q \times \frac{CD}{AC}.$$

Substituant à On et CI leurs valeurs trouvées au moyen de Q et fQ dans la valeur de F, on a

$$F = Q.\frac{AB}{AC} + 2fQ.\frac{CD}{AC}.$$

Veut-on juger quelle est l'influence de l'augmentation que le frottement apporte à la puissance? considérons la circonstance où ce frottement est le moindre possible, c'est-à-dire celle où son rapport f à la pression est un dixième; et cela arrivera lorsque le coin est en cuivre bien graissé avec du suif et pénétrant un morceau de fer; imaginons que la forme du coin soit telle que sa tête ait une longueur dix fois moindre que son côté ou que $AB = \frac{1}{10}$ AC. Il est évident que la perpendiculaire CD diffère très-peu de AC, et que $\frac{CD}{AC}$ sera sensiblement l'unité; enfin, supposons la résistance $Q = 1000^k$. Nous aurons, après ces diverses substitutions,

$$F = \left(1000^k \times \frac{1}{10}\right) + 2\left(\frac{1}{10} \times 1000 \times 1\right) = 300^k.$$

Or, en ne tenant pas compte du frottement, on aurait simplement

$$F = Q \times \frac{AB}{AC} = 100^k.$$

Ainsi, la puissance en ayant égard au frottement dans le coin est triple de ce qu'elle serait si le frottement n'existait pas.

115. *Forme nécessaire au coin.* — Un cas très-remarquable est celui où, après avoir été enfoncé dans une substance, du bois, par exemple, le coin se relève naturellement. A cet effet, il faut faire attention que les deux parties de la substance séparées par le coin tendent à se rapprocher et produisent contre les appuis a et b des côtés (fig. 171) deux résistances égales à Q dans le cas du coin isocèle, et dont la résultante pousse le coin de bas en haut. Cette résultante, comme nous l'avons vu, est égale à $Q \times \frac{AB}{AC}$. Toutefois les deux frottements Q, fQ qui naissent sur l'un et l'au-

tre côté s'opposeront à ce mouvement, parce que le frottement est toujours contraire, dans quelque direction que le mouvement tend à s'opérer. Or, nous savons que leur résultante est $2f \cdot Q \times \frac{CD}{AC}$ et que de plus elle agit dans la direction de CD, comme la résultante des résistances Q. Donc le coin s'échapperait au dehors de la tête AB, s'il n'y avait pas frottement, ou bien encore si la résultante des résistances $Q \times \frac{AB}{AC}$ était plus grande que $2f \cdot Q \times \frac{CD}{AC}$. Si l'on pose l'égalité $Q \times \frac{AB}{AC} = 2fQ \times \frac{CD}{AC}$ et que l'on supprime le facteur commun $\frac{Q}{AC}$, on aura

$$AB = 2f. CD.$$

Donc, quand AB sera plus grand que $2f \cdot CD$, le coin, au lieu de s'enfoncer, sera poussé au dehors du corps. Supposons $f = \frac{1}{10}$: on trouvera que AB ou la tête du coin devra être moindre que $2 \cdot \frac{1}{10} \times CD$, ou que $\frac{1}{5}CD$, pour que ce coin puisse pénétrer dans le corps. Ce résultat donne encore le moyen de mesurer le frottement : car si pour une certaine ouverture de l'angle du coin, ce dernier ne se relève ni ne s'enfonce, quand on l'insère dans la substance, pour laquelle ce frottement est recherché, ce sera une preuve que le rapport f du frottement à la pression est le même que le rapport $\frac{AB}{2CD}$.

116. *Presse à coin.* — La presse à coin, réduite à son état le plus simple, consiste dans un coin tronqué ABFE (fig. 172), qui glisse entre deux blocs, dont l'un, *ahgf*, repose contre un appui O*g* fixe et qui ne peut céder, et dont l'autre, *bikl*, transmet l'action du coin contre la substance H à presser ; et il en résulte de cette dernière une réaction qui dépend de l'état où se trouve cette substance et que l'on peut regarder comme la résistance à vaincre par la puissance F perpendiculaire à la tête du coin. Cette résistance P produit en outre une pression Q perpendiculaire au côté BC, et donne naissance à un frottement $f \cdot Q$ qui agit le long de ce côté. Enfin, la même pression et le même frottement se manifestent de la part du bloc fixe *afgh* contre le côté AC du coin. Cela posé, pour l'équilibre, il faut que le travail de la puissance F soit égal au travail de la résistance P en vertu de laquelle la substance est pressée, et au travail des deux frottements qui ont lieu le long des côtés AC et BC, lesquels sont égaux et également inclinés. Or, puisque le bloc *afgh* est fixe, les chemins décrits par les divers points du coin ABFE sont parallèles à *ah ;* en sorte que si la tête AB a pris la position A'B', le corps se sera comprimé de B'B', = AA'', tandis que les chemins par-

courus dans les directions de AC et de BC seront AA′ = BB″ et que le chemin parcouru perpendiculairement à la tête AB sera DD′ ou la hauteur verticale x du triangle AA′A″. Le travail de la résistance opposée par la réaction du corps à comprimer sera P × AA″; ceux des deux frottements contre AC et BC, qui sont égaux, seront $2f$. Q . AA′, et enfin celui de la puissance F sera F × DD′. Donc, on aura

$$F \times DD' = P \cdot AA'' + 2fQ \cdot AA'.$$

Nous avons dit que DD′ est la hauteur x du triangle AA′A″ qui est semblable au triangle ABC et qui donne la proportion

$$x : AA'' :: CD : AB \text{, ou } x = DD' = \frac{AC}{AB} \cdot AA''.$$

Les mêmes triangles donnent en outre

$$AA' : AA', :: AC : AB \text{, ou } AA' = \frac{AC}{AB} \times AA''.$$

Remplaçant dans la relation précédente des quantités de travail DD′ et AA′ par leurs valeurs en AA″ que nous représenterons par e et qui exprime la compression de la matière, nous aurons

$$F \cdot e \cdot \frac{CD}{AB} = P \cdot e + 2fQ \cdot \frac{AC}{AB} \cdot e.$$

Or, la résistance P ou sn est l'hypoténuse d'un triangle snm dont deux côtés sn et sm sont perpendiculaires aux côtés CD et BC du triangle BCD; ces triangles sont d'ailleurs rectangles, l'un en D et l'autre en m. Enfin, sm représente la composante Q perpendiculaire à BC de la force P. Donc on aura $sn : sm ::$ BC ou AC : CD, ou bien encore

$$P : Q :: AC : CD, \text{ d'où } Q = \frac{P \times CD}{AC};$$

ce qui donne

$$F \times e \cdot \frac{CD}{AB} = P \cdot e + 2f \cdot P \cdot \frac{CD}{AB} \cdot e.$$

Ainsi, quand e ou la compression du corps sera connue, on pourra avoir à chaque instant le travail de la puissance ou $F \times e \cdot \frac{CD}{AB}$, et ce travail est évidemment plus grand que le travail Pe de la résistance.

Supposons que la réaction P du corps à presser soit de 1000 kil. et que la tête AB du coin soit $\frac{1}{20}$ de sa longueur CD, ou que l'on ait CD = 20AB; nous aurons

$$20 \cdot F \cdot e = 1000\, e + 40 \cdot f \cdot 1000\, e;$$

et si nous posons encore $f = \frac{1}{10}$, nous trouverons

$$20 \, . \, \mathrm{F} \, . \, e = 1000\, e + 4000\, e.$$

Il faut observer que 4000 e est la quantité de travail absorbée par le frottement, que 1000 e est le travail utilisé et que le travail de la puissance devient 5000 e. Ainsi, dans cet exemple, on voit que la résistance utile ne reçoit que le cinquième du travail de la puissance. Divisons l'expression précédente par e; on aura

$$\mathrm{F}\frac{\mathrm{CD}}{\mathrm{AB}} = \mathrm{P} + 2f\mathrm{P}\frac{\mathrm{CD}}{\mathrm{AB}},$$

ou

$$20\mathrm{F} = 1000^{k} + \frac{1000}{5} \, . \, 20\,;$$

d'où

$$\mathrm{F} = \frac{1000}{20} + \frac{1000}{5} = 50^{k} + 200^{k} = 250^{k}\,;$$

puissance qui est fort petite comparativement à la résistance 1000^{k}. Ainsi, l'avantage de la presse à coin est que son travail peut s'exécuter avec une faible puissance. Toutefois cette machine est défectueuse à canse de la grande quantité de travail que les frottements absorbent à eux seuls.

Il y a deux espèces de dispositifs pour une presse à coin. Le premier est un grand bassin ABCD (fig. 173) dans lequel on établit la matière H a presser contre une de ses parois CD, et qui reçoit un ou plusieurs coins a, a', a''. que l'on enfonce de force entre des blocs b, b', b'', ... terminés par des plans inclinés comme ceux des coins que l'on enfonce. Le second consiste dans un châssis (fig. 174) placé debout et composé d'une semelle, d'un chapeau, et de montants fortement consolidés par des liens de fer boulonnés. Ce chapeau est rempli de coins alternatifs, tels qu'on les voit dans la figure 174 et qui serrent le corps que l'on veut comprimer contre un plateau supérieur. Il convient dans ces divers systèmes que les extrémités des coins soient extrêmement solides, ou qu'ils soient susceptibles de la moindre déformation possible. On voit d'ailleurs que le placement et le déplacement de ces coins exigent une perte considérable de temps.

117. *Effet du choc dans l'emploi du coin.* — Presque toujours l'enfoncement des coins s'opère par le choc : en indiquant les diverses actions qui se développent alors, nous montrerons que ce mode est une source de nouvelles pertes de travail. Quand un marteau vient frapper la tête du coin, il y a deux époques distinctes d'action : l'une qui correspond à la durée du choc, c'est-à-dire à l'intervalle compris entre l'instant où le marteau frappe et l'instant où la compression mutuelle du marteau et du coin est la plus grande ; l'autre qui vient ensuite et pendant laquelle le corps ou matière à

presser donne par sa réaction naissance à une résistance analogue à la force que nous avons précédemment désignée par P et à des frottements dus aux pressions Q et R que cette résistance produit sur les côtés du coin. De plus, l'inertie du coin qui est mis en jeu par le choc, agit d'abord comme résistance pendant la durée du choc ; puis elle devient puissance contre la véritable résistance P à vaincre.

Qu'arrive-t-il pendant la première époque? c'est que le choc développe à chaque instant, entre le marteau et le coin, des pressions variables et mesurables en poids ; ces pressions sont d'autant plus considérables que la durée du choc pendant laquelle elles ont lieu est plus courte. Or, la résistance de l'inertie qui augmente avec ces pressions motrices leur fait continuellement équilibre, ainsi que les frottements produits par cette inertie contre les côtés du coin ; d'où il suit que le travail de ces frottements pendant la durée du choc est perdu pour l'inertie, quand celle-ci devient une puissance contre la résistance P. Ce n'est pas tout. Une partie du travail des pressions motrices a été consommée par la déformation du coin, qui ne peut manquer de s'opérer par suite de leur grande intensité. Quant à l'action que conserve l'inertie du coin, après le choc, on reconnaîtra sans peine, comme dans le cas précédent (2e partie, 116), que son travail ou la moitié de la force vive du coin sera égal au travail de P augmenté du travail des frottements dus à cette dernière résistance. D'où l'on voit qu'en partant immédiatement du travail du marteau ou de la moitié de sa force vive, une grande partie de ce travail est consommée inutilement par la déformation du coin et par les frottements que la résistance de l'inertie occasionne pendant la durée du choc et que ces pertes n'auraient pas lieu si le coin était simplement soumis à des pressions ordinaires.

S'il s'agit de la presse à coin dont le détail a été donné (2e partie, 116), on fera attention que, par suite du choc de la masse m (fig. 175) contre le coin mobile ABC, ce dernier doit glisser le long de la face ab du coin fixe, et que tous les points du coin ABC sont animés d'un mouvement de transport parallèle au côté AC. Par conséquent, les résistances opposées à chaque petit instant par l'inertie des diverses parties du coin ABC, seront autant de forces dont la résultante, c'est-à-dire l'inertie totale du coin, passera par le centre de gravité G et sera égale à $M \times \frac{v}{t}$; M étant la masse du coin, et v le petit degré de vitesse imprimé dans le petit temps t. Connaissant la direction de cette force, on pourra exprimer sa pression sur le côté BC et par suite le frottement qu'elle doit faire naître. Enfin, en formant les produits de l'inertie et du frottement par les petits chemins respectifs de leurs points d'application et en égalant leur somme à la quantité de travail de la force de percussion du marteau diminuée de celle que consomme la défor-

mation du coin, on aura tout ce qu'il faut ponr conclure la force d'inertie regardée comme pnissance à l'égard de la réaction du corps H qne l'on vent comprimer.

118. *Formes diverses du coin et son application aux outils.* — Malgré le désavantage du coin sous le rapport des consommations inutiles de travail qu'il occasionne, cette machine est universellement en usage. La forme prismatique n'est ponrtant pas toujours celle qu'on lui donne. Lorsque le coin est une pyramide à trois ou qnatre faces (fig. 176), les considérations relatives à l'équilibre entre la puissance et la résistance sont analogues à celles du prisme. La première est égale et opposée à la résultante de trois ou qnatre forces qui dépendent des longuenrs de chaque face et de la grandeur des côtés qui forment la tête. Le coin consiste encore dans un prisme tronqué. Sonvent enfin, ce n'est autre chose qu'un cône surmonté d'une tête cylindrique; mais la condition de son éqnilibre rentre dans celle du coin isocèle, c'est-à-dire que la puissance est à la résistance dans le rapport dn diamètre de la tête à la longueur du côté du cône.

Exemples d'outils. — Presque tous les outils des arts se rapportent au coin : tels sont les divers ciseaux, les couteaux, les clous, les limes, etc. — Les limes sont des prismes méplats dont les surfaces sont striées d'entailles faites au ciseau. Ces entailles pratiquées sous un certain angle sont recroisées par d'autres faites sous un angle différent, de manière à former de petites pyramides, ou un grand nombre de coins dont les pointes ou tranchants arrachent la matière. — Les scies (fig. 177) sont un assemblage de coins, dont la face inférieure est légèrement inclinée en se dirigeant vers le tranchant *b*. Ce dernier dans le sens de l'épaisseur de la lame s'incline alternativement d'nne dent à l'autre, tantôt à gauche et tantôt à droite. Enfin, ces dents sont dévoyées de part et d'autre du plan de la lame, de manière à former ce qu'on nomme la voie, afin que l'ouverture faite dans le bois soit plus large que l'épaisseur de la scie, et que celle-ci puisse joner plus librement.

Tous les coins, quels qu'ils soient, sont toujours destinés à agir par leur tranchant on par leurs extrémités pointnes. Il y a donc pour chaque outil un angle convenable selon lequel il convient de le terminer. Trop aigu il pourrait se rompre; il ne saurait s'enfoncer an contraire s'il était trop obtus. Pour avoir la limite des inclinaisons des faces qui aboutissent au tranchaut de chaque outil, il faudrait étudier parmi les outils destinés an même usage celui qui marche le mieux; cette étude est du plus haut intérêt ponr l'ouvrier. Quoi qn'il en soit, on voit qn'il y a une relation nécessaire entre l'angle du coin, et la résistance des matières à diviser. Si cette matière est très-dure, comme du fer percé à froid, l'angle du biseau (fig. 178) sera de 90°; les emporte-pièces, les burins sont de ce genre. Pour des matières moins dures, l'angle n'a pasbesoin d'être aussi ouvert.

Les ciseaux des varlopes, par exemple, sont terminés par des angles réduits à 30°. Remarquez que ces ciseaux taillent le bois dans la longueur de ses fibres, et que ces dernières offrent une résistance beaucoup plus forte perpendiculairement à leur longueur, aussi donne-t-on un angle plus obtus à la besaguë, laquelle est destinée à travailler le bois dans un sens perpendiculaire à ses fibres. Cette angle devient au contraire extrêmement aigu pour l'instrument avec lequel on coupe les substances molles, telles que les viandes et le pain. Il en est de même à l'égard des rasoirs, parce que les poils, quoique durs, ne sont pas, à cause de leur isolement sur la peau, susceptibles d'une grande résistance.

En général, tous les outils donnent lieu à des frottements qui consomment, ainsi que nous l'avons vu, une quantité énorme de travail comparativement à celle qui est utilisée. Mais si elle augmente à mesure que l'angle du coin devient plus aigu, elle diminue aussi avec le rapport du frottement à la pression, et l'on sait que ce rapport est moindre selon que les surfaces sont plus polies ou plus onctueuses. C'est ce qui démontre la nécessité de donner du poli aux outils, et de frotter fréquemment leurs tranchants avec des matières grasses; et parmi ces dernières on devra préférer le suif au vieux oing. Enfin, comme on agit par le choc, il faut que l'outil soit résistant et de bonne qualité.

L'inclinaison sous laquelle on présente l'outil à la matière n'est pas non plus indifférente. Soit un ciseau ABCD (fig. 179) terminé par le plan incliné CD et chassé perpendiculairement à la surface LM de la matière par une force F. Si le tranchant C se trouve à l'extrémité de la face AC parallèle à la force F, il est évident que la résistance Q contre cette face est bien moindre que la résistance R exercée contre la face inclinée CD: car, d'après ce qui précède, l'une est proportionnelle à aC, tandis que l'autre est proportionnelle à CD. Il résulte de là que le ciseau tendra à marcher vers la gauche plutôt que vers la droite, et qu'après un petit enfoncement aC il cessera de s'avancer. Mais alors l'ouvrier ne manque pas de retourner l'instrument, la face CD en avant, et la face AC en arrière; puis il enlève la partie aCD, en inclinant légèrement et en faisant mordre le tranchant de façon que la nouvelle face inférieure éprouve à son tour une résistance moindre. Ces deux opérations seront continuées alternativement jusqu'au fond du trou ou de la mortaise que l'on veut pratiquer en LM.

Dans le rabot, le ciseau est couché, et le fer tendrait à s'enfoncer de plus en plus, si l'instrument appuyé sur la surface du bois qu'on veut aplanir ne s'y opposait (fig. 180), et si d'ailleurs la face *cd* par sa grande résistance ne tendait à relever l'instrument. Aussi le fer a-t-il deux positions distinctes, selon qu'on veut enlever de minces copeaux, ou faire des rainures dans le bois. Pour le premier objet, le tranchant C est en avant, et la face *cd* couchée en arrière. Dans le second cas, l'outil est retourné et la face *cd* occupe

une position antérieure et verticale. Ces exemples démontrent donc bien le rôle que joue l'inclinaison des faces dans l'effet des outils.

XI.

PIÈCES QUI TOURNENT OU ROULENT LES UNES SUR LES AUTRES.

119. *Idée du frottement produit par le mouvement des pièces qui tournent sur elles-mêmes.* — Les pièces de rotation, telles que les roues, et qui tournent sur d'autres pièces, occasionnent dans leur mouvement des frottements auxquels on doit avoir égard dans le calcul des machines, et dont la nature est différente selon que ces roues portent sur leurs appuis par des tourillons ou par des pivots. On nomme tourillons des cylindres *aa* (fig. 181) dont le diamètre est le plus petit possible et qui sont fixés perpendiculairement au plan de la roue, dans le prolongement de l'axe de cette dernière, et aux extrémités de l'arbre de couche. Ce dernier consiste d'ailleurs dans un cylindre AB beaucoup plus gros que les tourillons et qui traverse la roue à son milieu et dans le sens de l'axe de son mouvement. Ces tourillons *a* reposent dans une boîte C*m*D (fig. 182) de forme cylindrique concave, par une arête perpendiculaire à leur circonférence. — Le pivot a une forme analogue à celle du tourillon, si ce n'est qu'il appuie par le cercle qui termine sa tête, contre le fond d'une crapaudine EFGHIK (fig. 183). Si les directions des forces qui font tourner la roue dans ce dernier cas étaient telles que le cylindre du pivot fût en outre pressé latéralement par une arête, contre le cylindre de sa crapaudine, la résistance serait compliquée des deux frottements simples dont il s'agit; mais ordinairement on s'arrange de manière que la pression totale s'exerce dans la direction de l'axe du pivot. De ces deux frottements, l'un qui a lieu de la part d'un pivot contre le fond de sa crapaudine, est analogue à celui de deux surfaces glissant l'une contre l'autre, et son rapport à la pression s'obtient encore à l'aide des deux tableaux exposés au n° 106. Quant à celui du tourillon dans son palier, Coulomb a fait des expériences qui démontrent que ce frottement est de beaucoup inférieur au premier. Il n'y aura d'ailleurs plus à tenir compte de l'adhérence parce que dans le mouvement de rotation des pièces, sur des paliers, les surfaces ne frottent que sur une arête ou sur une surface fort petite. Nous donnerons en son lieu le tableau de Coulomb, sur ce nouveau genre de frottement; mais il convient auparavant de parler de celui d'un pivot contre le fond de sa crapaudine.

120. *Frottement d'un pivot contre sa crapaudine.* — Il ne suffit pas de

connaître le rapport du frottement à la pression dans le mouvement des pièces de rotation ; il faut encore savoir comment ce frottement se comporte avec les autres forces qui le sollicitent, selon les deux dispositions que nous venons d'indiquer. Commençons par le cas d'un pivot qui tourne autour de son axe, et pressé contre sa crapaudine par une force N (fig. 184) que nous supposerons agissant dans la direction de cet axe. Mais si cette force N perpendiculaire à la surface pressée passe par le centre du cercle du pivot, il est permis de la regarder comme la résultante des pressions partielles qui ont lieu sur tous les éléments de la base, de sorte qu'elle est répartie proportionnellement dans tous les points de cette surface. Ainsi, désignant par a un petit élément et par A la surface totale, $\frac{aN}{A}$ sera évidemment la partie de la pression qui supporte cet élément ; et $f \times \frac{aN}{A}$, le frottement qui s'exerce sur cet élément. Non-seulement ce frottement sera censé appliqué au centre de cet élément, mais encore il agira dans une direction immédiatement contraire à celle du mouvement du pivot, c'est-à-dire perpendiculairement au rayon du cercle décrit par ce centre autour du centre du pivot.

Si donc on appelle r ce rayon, ou le bras de levier de ce frottement partiel, $f \times \frac{a \times N}{A} \times r$ ne sera autre chose que le moment du frottement qui est exercé sur l'élément a. Maintenant, si je considère tous les éléments du cercle ABD, tels que $mnqp$ qui sont groupés dans un même secteur ACB dont l'angle au centre est très-petit ; il est visible que les frottements produits dans ce groupe d'éléments pourront être regardés comme perpendiculaires au rayon Co qui passe par tous leurs milieux, ou comme parallèles entre eux ; et en vertu de leur parallélisme, leur résultante sera égale à leur somme, parallèle à leur direction commune, et appliquée au centre de gravité de la surface ACB, dont tous les points sont sollicités par ces forces parallèles. Ainsi, la résultante sera $f . \frac{N \times ACB}{A}$; quant à son bras de levier, il sera $\frac{2}{3}$ R (R étant le rayon du cercle), attendu que le secteur ACB est un triangle dont le centre de gravité est aux deux tiers du rayon Co qui va du sommet C au milieu o de la base AB. Ainsi, le moment de cette résultante, ou la somme des moments de tous les petits éléments qui entrent dans la composition du secteur ACB sera égale à $fN \times \frac{ACB}{A} \times \frac{2}{3} R$, ou à $f . \frac{N}{A} . \frac{2}{3} R \times ACB$. Si l'on en fait autant pour tous les autres secteurs, et que l'on prenne la somme des moments de tous les

frottements qu'ils produisent, afin d'avoir le moment du frottement qui a lieu sur le cercle entier, on trouvera pour résultat le produit de la somme des surfaces de tous ces secteurs, multipliée par le facteur commun $\frac{fN}{A} \cdot \frac{2}{3} R$; mais comme la somme des surfaces des secteurs est précisément la surface entière A du cercle de base du pivot, on voit en définitive que le moment total du frottement sur cette base se réduit à . . . . . . $f \cdot N \times \frac{2}{3} R$, formule qui nous apprend que l'on pourra supposer le frottement total $f \cdot N$ comme concentré en un seul point situé sur les $\frac{2}{3}$ du rayon à partir du centre du cercle, et comme agissant avec ce bras de levier unique, que l'on nomme aussi *bras de levier moyen* du frottement.

Il se pourrait que l'extrémité d'un axe, au lieu de frotter par tout un cercle, ne frottât que par un anneau ou surface comprise entre deux cercles concentriques. C'est ce qui arrive lorsque l'arbre de couche d'une roue est pressé par une force N (fig. 185) dirigée dans le sens de son axe, contre ses épaulements *abcd*. Dans ce cas la surface A du frottement total est réduite à $\pi \cdot R^2 - \pi \cdot R'^2$ (π étant le rapport de la circonférence au diamètre, et R, R′ les rayons des cercles extérieur et intérieur de l'anneau). Le frottement sur le secteur élémentaire ACB sera $\frac{f \cdot N \times ACB}{A}$ ou $\frac{f \cdot N \cdot ACB}{\pi(R^2 - R'^2)}$; il aura pour moment $\frac{f \cdot N \cdot ACB}{\pi(R^2 - R'^2)} \cdot \frac{2}{3} R$. De même, le moment du frottement sur le secteur intérieur A′CB′ aura pour expression $\frac{f \cdot N \cdot A'CB'}{\pi(R^2 - R'^2)} \times \frac{2}{3} R'$. La différence de ces deux moments donnera visiblement le moment du frottement qui a lieu sur la différence AA′B′B de ces deux secteurs, et on aura

$$\frac{f \cdot N}{\pi(R^2 - R'^2)} \times \left(\frac{2}{3} R \cdot ACB - \frac{2}{3} R' \cdot A'CB' \right).$$

Maintenant, si on détermine de la même manière les moments des frottements qui ont lieu sur les autres éléments semblables à AA′B′B de la surface comprise entre les deux cercles de rayon R et R′, et qu'on en fasse la somme, cette somme donnera le moment du frottement total qui a lieu sur l'anneau. Or, il faut remarquer : 1° que cette somme renfermera le facteur commun $\frac{f \cdot N}{\pi(R^2 - R'^2)}$; 2° que le second facteur se composera de deux termes dont l'un sera le produit de $\frac{2}{3} R$ multiplié par la somme de tous les secteurs ACB qui forment la surface du cercle extérieur ou πR^2, et dont

l'autre retranché sera le produit de $\frac{2}{3}$ R' multiplié par la somme de tous les secteurs A'CB' du cercle intérieur, ou par π . R'². On aura donc pour le moment total du frottement de l'anneau l'expression

$$\frac{f \cdot N}{\pi(R^2 - R'^2)}\left(\frac{2}{3}R \cdot \pi R^2 - \frac{2}{3}R' \cdot \pi R'^2\right);$$

ou cette autre, après toute réduction,

$$f \cdot N\left(\frac{\frac{2}{3}R^3 - \frac{2}{3}R'^3}{R^2 - R'^2}\right).$$

Enfin, si on nomme l la largeur AA' ou BB' de l'anneau, r le rayon moyen de cet anneau ou la distance de son milieu au centre, le calcul apprend que $\frac{\frac{2}{3}R^3 - \frac{2}{3}R'^3}{R^2 - R'^2}$ revient à $r + \frac{12l^2}{r}$. Nous appellerons cette valeur r_1, et le moment total du frottement de l'anneau deviendra en définitive $f . N . r_1$. Mais, comme f . N est lui-même le frottement total, on voit que r_1 ou $r + \frac{12l^2}{r}$ est encore ici le bras de levier moyen du frottement de l'anneau, supposé concentré à une distance r_1 de son centre.

Puisque le frottement total f. N peut être regardé comme ayant son point d'application à une distance du centre égale à $\frac{2}{3}$ R ou à $r + \frac{l^2}{12r} = r_1$, selon que le pivot frotte sur un cercle entier ou sur un anneau, et d'ailleurs le petit chemin décrit par ce point d'application est censé situé dans la direction même de cette résistance, la quantité de travail élémentaire consommée par le frottement sera donc égale au produit de f N et de ce petit chemin décrit. Or ce dernier, en désignant par s_1 l'arc décrit à l'unité de distance pendant un très-petit temps, aura dans les mêmes circonstances, pour valeur $\frac{2}{3}R . s_1$, ou $r_1 s_1$. Donc, enfin, la quantité élémentaire de travail cherchée sera représentée ou par $\frac{2}{3}$ R. $s_1 . f.$ N, ou par $f.N\left(r + \frac{l^2}{12r}\right)s_1$.

Plusieurs remarques doivent être faites à cet égard; le coefficient f du frottement sera ici déduit des deux tableaux donnés au n° 106, parce que le pivot glisse contre sa crapaudine, et que ce mouvement est le même que celui de deux surfaces en contact.

La quantité de travail du frottement augmentant avec le rayon du cercle entier du pivot, ou avec le rayon moyen de l'anneau, il y a de l'avantage à diminuer autant que possible ces rayons ; mais cette limite est elle-même

relative à la solidité du pivot. Au reste, c'est dans ce but que l'on amincit quelquefois les pivots en forme conique (fig. 186). Souvent encore on termine leur extrémité inférieure par une surface convexe (fig. 187), ainsi que le fond de la crapaudine ; il faut alors considérer seulement le petit cercle de contact qui a toujours une certaine étendue par suite de la compression et de l'user. Nous finissons ce paragraphe en rappelant que le moment du frottement se trouvera facilement quand cela sera utile, puisqu'on remplace cette résistance par une force unique égale au produit de la pression totale multipliée par un certain coefficient obtenu dans les tables, et que le bras de levier de cette force n'est autre chose que ce que nous avons calculé sous le nom de *bras le levier moyen* du frottement.

121. *Frottement d'un tourillon dans un palier ou boîte.* — Nous savons que le tourillon est un cylindre posé sur un autre par une arête; on a soin d'ailleurs de leur donner peu de jeu, c'est-à-dire une très-faible différence entre leurs rayons, afin d'éviter toute espèce d'emboîtement, lorsque la pièce qui s'appuie sur ce tourillon est mise en mouvement. Mais, comme le frottement qui en résulte a été reconnu par Coulomb bien inférieur à celui qui a lieu selon les circonstances prévues par les tableaux du n° 106, nous commencerons par présenter le troisième tableau, relatif aux pièces de rotation.

TROISIÈME TABLEAU. *Frottement des axes dans leurs boîtes.*

INDICATION DES AXES MIS EN EXPÉRIENCE.	RAPPORT DU FROTTEMENT A LA PRESSION.
Axe de fer dans une boite en cuivre.	0,155
» » avec un enduit de suif.	0,085
» » avec un enduit de vieux oing.	0,12
» » les surfaces étant pénétrées par le suif et restant onctueuses.	0,127
» » avec un enduit d'huile.	0,13
» » avec un enduit qui n'avait pas été renouvelé depuis longtemps, quoique la machine eût servi continuellement.	0,155
Axe de chêne vert, dans une boite de gaïac avec un enduit de suif.	0,038
» » l'enduit étant essuyé et les surfaces restant onctueuses.	0.06
» » après avoir servi longtemps, sans qu'on eût rafraîchi l'enduit.	0.07
» » dans une boite d'orme enduite de suif.	0.05
» » l'enduit étant essuyé, et les surfaces restant onctueuses.	0.05
Axe de buis dans une boîte de gaïac enduite de suif.	0,045
» » l'enduit étant essuyé et les surfaces restant onctueuses.	0,07
» » dans une boîte d'orme enduite de suif.	0.055
» » l'enduit étaut essuyé, les surfaces restant onctueuses.	0,05

Examinons maintenant le rôle que joue ce frottement au milieu des autres forces qui sollicitent la pièce de rotation. Lorsque celle-ci est au repos, il est évident que le tourillon A (fig. 188) de cette pièce occupe le point *o* le plus bas du cercle *poq* qui constitue le profil de sa boîte. Si la

machine est ensuite mise en mouvement, le tourillon A tournera autour de son point d'appui contre ce palier ; et il cheminerait même indéfiniment, sur la surface de ce dernier, si elle était de niveau. Mais comme il n'en est pas ainsi, le tourillon A montera sur le palier poq, tant que les efforts moteurs l'emporteront sur le frottement, puis il s'arrêtera en un point m dont l'inclinaison de la tangente sera telle que le frottement soit capable d'y retenir le tourillon. Ce dernier, posé ainsi par un point m sur la surface poq, ne saura s'y maintenir en équilibre, à moins que la résultante de toutes les forces qui agissent sur le tourillon, y compris le frottement (2e partie 99), ne passe par le point d'appui m, et qu'elle ne soit perpendiculaire à la tangente. Or, le frottement s'exerce le long de cette tangente et est immédiatement appliquée au point m. Donc, la résultante N de toutes les autres forces devra aussi passer par ce point et selon une direction quelconque mN. La seconde condition que la résultante du frottement et de cette force N soit perpendiculaire à la tangente, revient à celle que la composante de la première dans la direction de cette tangente soit immédiatement égale et contraire au frottement.

Prenons sur mN une partie md égale à l'unité, et formons sur md le rectangle $damb$. La composante de N perpendiculaire à la tangente sera (2e partie, 108) N . ma, pression qui donnera lieu au frottement f. N . ma, f étant un des coefficients donnés par le troisième tableau. Enfin N . mb sera la composante de N le long de la tangente, et l'on aura

$$N \cdot mb = fN \cdot ma\,;$$

d'où

$$f = \frac{mb}{ma},$$

relation qui indique que le rapport du frottement à la pression sur le tourillon est immédiatement donné par l'inclinaison de l'angle de la pression N avec la tangente au cercle de ce tourillon menée par le point d'appui. On aura ainsi le moyen de trouver géométriquement ce point d'appui. Quant au frottement, il est f . ma . N. Remarquons que le triangle rectangle mad donne

$$1 = \overline{ma}^2 + \overline{mb}^2 = \overline{ma}^2 + f^2 \cdot \overline{ma}^2,$$

ou

$$1 = (1 + f^2)\,\overline{ma}^2\,;$$

d'où

$$ma = \frac{1}{\sqrt{1+f^2}}\,;$$

et, par suite,

$$f \cdot ma \cdot N = N\,\frac{f}{\sqrt{1+f^2}}.$$

Telle sera donc l'expression du frottement autour du tourillon N; et pour l'avoir il ne suffira pas de multiplier la résultante des forces données par

le coefficient f; il faudra encore diviser le produit f . N par $\sqrt{1+f_2}$.
Toutefois on remarquera que lorsque f est moindre que $\frac{1}{3}$, $\sqrt{1+f^2}$ ne diffère presque pas de l'unité ; en sorte que le frottement est sensiblement f. N ou le même que si la résultante N était perpendiculaire au tourillon, quoiqu'en réalité elle ne le soit pas.

Lorsque le tourillon reste fixe et ne fait pas corps avec la roue, la roue tourne alors de manière que c'est son propre centre A (fig. 189) qui demeure fixe. Le bras de levier de ce frottement est alors le rayon de l'œil de la roue, lequel est plus grand que le tourillon à cause du jeu, au lieu que quand le tourillon est mobile, comme dans le premier cas, c'est au contraire le rayon de celui-ci qui est le bras de levier du frottement. Donc, à égalité de rayon, il y a du désavantage à ne pas rendre le tourillon mobile.

L'expression du frottement $\frac{N.\ f}{\sqrt{1+f^2}}$ étant indépendante de la longueur du tourillon, on voit qu'on ne gagne rien à l'allonger ou à le raccourcir ; il n'y a que la résultante N qui puisse modifier l'intensité de cette résistance. — La quantité de travail consommée par ce genre de frottement est encore très-facile à mesurer ; elle est égale au produit de la résistance, et du chemin décrit sur la circonférence du tourillon. Si l'on représente par r son rayon, et par s_1 l'arc décrit à l'unité de distance, on aura $r \times s_1$ pour l'arc développé sur le tourillon dans un temps quelconque, et f. N $\times r \times s_1$ pour la quantité de travail absorbée par la résistance du frottement.

122. *Idée sur les dimensions des tourillons. Avantage des couteaux.* — La quantité de travail consommée étant représentée par . . . . f. N. r. s_1, on observera que dans cette expression, les quantités f, N et s_1 ne sauraient être changées, attendu qu'elles dépendent des substances en contact, des forces appliquées, et du mouvement convenable à la machine. Il ne reste donc que r, ou le rayon du tourillon, dont on puisse disposer. Plus il est grand, plus la quantité de travail consommée est considérable. Si donc on veut le réduire, il faut construire le tourillon en substance très-dure, en acier, par exemple. On peut encore le diminuer, dans le cas où les forces appliquées sont d'une faible intensité. Dans toute autre circonstance, il n'y a pas moyen d'affaiblir les frottements des tourillons. Il arrive quelquefois que, pour empêcher l'arbre ou les tourillons de glisser dans le sens de leur longueur, on les interrompt par des espèces de renflements (fig. 190) qui circulent dans des logements plus profonds que ceux des tourillons. Ces renflements sont ordinairement des troncs de cône opposés par une base commune. On leur donne la forme d'un tronc de cône, afin de diminuer la portion de surface qu'ils présentent à la paroi qui leur sert pour ainsi dire

de guide. Mais on commettrait une erreur grave, si l'on prétendait diminuer le frottement, en laissant rouler l'arbre sur l'arête circulaire de ce renflement, sous prétexte que cette circonférence est, pour ainsi dire, une ligne mathématique.

Loin d'avoir rien gagné, on augmenterait au contraire la quantité de travail du frottement, parce que celle-ci ne dépend pas du plus ou moins de longueur du tourillon, et parce qu'elle croîtrait proportionnellement au rayon du cercle commun aux deux cônes de renflement dont il est question. Cette modification n'a d'ailleurs rien de commun avec les couteaux, dont l'emploi est fort avantageux. Il faut d'abord se rappeler que leur usage est borné au seul cas où une pièce de rotation (fig. 191) ne doit faire que de petites oscillations. Les couteaux sont alors des espèces de coins qui supportent l'axe, et dont les pointes sont arrondies en cercle fort petit. Le mouvement s'opérant autour du centre de ce petit cercle, et le frottement ne s'exerçant que sur l'arc de ce dernier, on voit comment, par des efforts même considérables, la quantité de travail $fN \cdot r \times s_1$ est peu appréciable, attendu la petitesse du rayon r. C'est en terminant son axe de suspension par des couteaux, qu'une balance est rendue semblable.

123. *Frottement dit de seconde espèce, ou produit par le roulement de deux surfaces.* — Il est encore une dernière espèce de frottement qui résulte de deux surfaces qui roulent l'une sur l'autre. Mais ici, comme les parties de ces surfaces s'appliquent entre elles une à une, et qu'elles se détachent les unes des autres perpendiculairement à la direction du mouvement qui est celle de la tangente commune, il n'y a point, à proprement parler, de frottement dans ce mouvement, ou du moins il est assez faible pour être négligeable.

Quand un rouleau chemine en roulant sur un plan, les arcs des divers points de sa surface se développent sur celle du terrain; et le frottement n'existe pour ainsi dire pas, surtout si ce rouleau est bien cylindrique et que la surface soit unie. En général, ce frottement, dit *de seconde espèce*, est d'autant moindre que le diamètre du cylindre mobile est plus petit. Une roue de deux pieds de diamètre qui roule sur un terrain, et qui est chargée d'un poids de 100 kilogr., donne lieu à une résistance qui ne dépasse pas le trentième de la pression, c'est-à-dire 3 kilogr. Toutefois, si le corps roule sur une surface raboteuse, telle que du sable, de la terre, etc., cette résistance devient sensible.

Le frottement de roulement présente, dans les voitures, des résistances réelles, surtout quand le terrain est compressible, et que les roues s'y enfoncent; car ces voitures sont ensuite obligées de se relever sur un plan incliné, et elles exigent alors une nouvelle quantité de travail. Mais, en général, lorsque la surface sur laquelle un corps chemine en roulant, reste

plane et la même sur une certaine étendue, on peut regarder le frottement de roulement ou de seconde espèce comme très-petit. Son peu de résistance explique l'emploi des rouleaux dans le transport des blocs de pierre, ou des plus lourds fardeaux (fig. 192). C'est, comme l'on sait, sur deux rouleaux qu'est portée la charge ; et ces rouleaux cheminent eux-mêmes sur des madriers établis à la surface du terrain, afin qu'ils ne puissent pas s'y enfoncer. Un troisième rouleau, placé en avant des deux premiers, reçoit le bloc ou la charge au moment où le rouleau d'arrière est dégagé; celui-ci est remis en avant et destiné à recevoir la charge au moment où elle est poussée jusqu'à lui, etc. Telles sont les opérations à faire successivement. Le frottement du roulement consomme incomparablement moins de travail que si le bloc de pierre, ou fardeau, était traîné sur la surface même du terrain.

124. *Emploi du frottement de seconde espèce pour diminuer les autres frottements.* — Le frottement de seconde espèce, combiné, soit avec le frottement des surfaces qui glissent les unes sur les autres, soit avec le frottement des tourillons, peut diminuer ces frottements ainsi que leur quantité de travail. Représentons-nous, par exemple, une roulette et un axe qui lui est fixé et dont les tourillons peuvent tourner dans une crapaudine (fig. 193) ; supposons une charge P en équilibre sur cette roue, et placée sur une table AB, horizontale et tangente à la circonférence de la roulette. Si cette dernière ne pouvait tourner, il est évident que la puissance F, capable de faire glisser la charge P sur la surface de la roue, serait égale à $f.P$, c'est-à-dire au frottement de glissement qui résulterait de la charge P. Mais, si on rend aux tourillons la faculté de tourner sur leur palier, la charge P portera elle-même sur les tourillons, et ce sera sur ces derniers que le frottement $f.P$ sera produit. Appelant r leur rayon et s_1 le chemin décrit à l'unité de distance, $f.P \times r.s_1$ sera la quantité de travail de ce frottement, et elle devra être égale à celle de la puissance F capable de la vaincre. Or, le chemin parcouru par le point d'application de cette puissance et dans sa direction sera égal au développement de l'arc de la circonférence de la roulette, décrit en même temps que celui du frottement, c'est-à-dire à $R.s_1$ (R étant le rayon de la roulette). On aura donc

$$F \times R.s_1 = f.P.r \times s_1,$$

d'où

$$F = fP \times \frac{r}{R}.$$

Donc, la puissance F, de fP qu'elle était avant le roulement de la roulette, est réduite à $fP \times \frac{r}{R}$, ou dans le rapport du rayon du tourillon à celui de la roulette. Il en est de même de sa quantité de travail, qui diminue aussi

selon ce rapport. On remarquera que si les surfaces de AB et de la roue étaient tellement polies que le coefficient f fût très-petit, ou que le frottement de glissement en M devînt moindre que $f \cdot P \cdot \frac{r}{R}$ ou que F, les roulettes ne tourneraient pas ; mais cette circonstance n'arrive presque jamais dans la pratique.

Quoi qu'il en soit, les roulettes fixes ont l'avantage de diminuer la quantité de travail que développerait le frottement si ces roulettes n'existaient pas. Telle est, par exemple, dans les scieries, la disposition des chariots qui amènent la pièce de bois sous l'action de la scie (fig. 194) ; l'utilité des rouleaux tournants à axe fixe, sur lesquels ces chariots cheminent, devient ici de toute évidence.

Lorsqu'un tourillon est destiné à supporter une charge considérable, sa grosseur doit être proportionnée en conséquence; mais comme la quantité de travail consommée par son frottement augmente à la fois avec la pression qu'il éprouve et la grandeur de son rayon, il importe de réduire cette quantité de travail et voici par quel moyen. Imaginez que ce tourillon A (fig. 195) repose sur deux grandes roues de rayons R et R′, qui, elles-mêmes, peuvent tourner avec des tourillons de rayons r et r' beaucoup plus petits que les premiers. Décomposons, au moyen du parallélogramme, la charge ou pression du tourillon A en deux autres forces N et N′, dirigées suivant les lignes qui joignent son centre à ceux des grandes roues. Si ces dernières ne tournaient pas, le frottement du tourillon sur la première (R) serait $f \cdot N$; et celui qui aurait lieu sur la deuxième (R′) serait $f \cdot N'$. La quantité de travail totale consommée sur le tourillon serait enfin

$$(f \cdot N + f \cdot N') A \cdot s_1,$$

A étant le rayon du tourillon et s_1 le petit arc décrit à l'unité de distance de son axe. Mais si, au contraire, chaque grande roue a la faculté de se mouvoir autour de son tourillon respectif, on reconnaît, d'après ce qui précède, que le frottement $f \cdot N$ sur le tourillon A est réduit à $f \cdot N \times \frac{r}{R}$, et le frottement $f \cdot N'$ à $f \cdot N' \times \frac{r'}{R'}$. Partant, la quantité de travail devient ainsi .... $\left(fN \times \frac{r}{R} + fN' \frac{r'}{R'}\right) As_1$, quantité bien inférieure à celle $(fN + fN') As_1$ qui aurait eu lieu sans le concours du roulement des deux grandes roues, et d'autant moindre que R et R′ sont plus grands par rapport aux tourillons respectifs r et r'. Une disposition de tourillon établie sur ce principe donne lieu à une sujétion que l'on doit éviter, à moins de circonstances toutes particulières. Quand un tourillon repose sur deux ou trois roulettes (fig. 196), il est assez ordinaire qu'il s'use inégalement, et

qu'il fasse naître sur leurs surfaces des cavités qui ne lui permettent plus ensuite de tourner.

Nous sommes naturellement conduits au dispositif des tourillons de la cloche de Mutte à Metz. Comme elle ne doit faire que des oscillations et non des révolutions, il convient, au lieu de roulettes, d'avoir recours à des secteurs d'une amplitude à peu près égale à celle d'une oscillation. Ces secteurs, au nombre de trois (fig. 197), tournent avec des tourillons très-petits comparativement à leurs rayons respectifs, et sont placés l'un au-dessous, et les deux autres à gauche et à droite du centre du tourillon de la cloche, de sorte que ce dernier, quand il est mis en mouvement, repose constamment sur le premier, et alternativement sur l'un des deux autres. La pression du tourillon principal étant égale à la résultante de la force centrifuge de la cloche et de son poids, qui est au moins de 18,000 livres, on conçoit que les frottements de son tourillon absorberait une énorme quantité de travail, si on ne l'avait diminué par l'influence du roulement de ces grands secteurs; cette diminution se calcule d'ailleurs, comme nous l'avons montré pour deux cercles, au moyen du rapport des rayons de chaque tourillon des secteurs aux rayons de ces derniers. Le balancier supérieur, qui supporte deux tiges fixées elles-mêmes à chaque secteur latéral, a pour but d'empêcher que ces secteurs ne tombent tout-à-fait lorsque la cloche est poussée contre l'un d'eux par l'effet de sa force centrifuge. On a dans ces derniers temps présenté un appareil analogue, comme s'il s'agissait d'un perfectionnement nouveau; mais celui que nous venons de décrire est inventé depuis au moins trois cents ans.

Supposons actuellement que la roulette, au lieu de tourner sur son axe fixe, soit mobile sur un plan AB (fig. 198), et que la charge P, au lieu de reposer sur la circonférence de la roulette, repose sur une chape qui reçoit elle-même l'axe de la roulette : non-seulement la pression aura lieu sur l'essieu, mais encore, quelque part que soit placée la puissance F, le chemin décrit par son point d'application sera le même que celui qui est parcouru par l'essieu de la roulette. Les raisonnements sont d'ailleurs toujours les mêmes, c'est-à-dire que le travail de la puissance est égal à celui du frottement autour de l'axe, en négligeant toutefois le frottement de roulement qui a lieu en M. Remarquons que le chemin parcouru par la puissance est égal à l'arc que développe la circonférence de la roulette, ou à $R \times s_1$, et que celui qui est parcouru par le frottement autour de l'axe, dont le rayon est r, est égal à $r \times s_1$; d'où l'on tire

$$F \times R \times s_1 = f \cdot P \cdot r \times s_1,$$

et, par suite,

$$F = f \cdot P \times \frac{r}{R}.$$

Telle est la théorie des roulettes de lit, ou des roues de voitures. Dans ces

dernières, l'essieu ne tournant pas, c'est autour du centre de la roue que le mouvement de celle-ci s'opère, de sorte que r est nécessairement (2e partie, 121) plus grand que le rayon de l'essieu. On termine ordinairement les extrémités de cet essieu en forme de cônes dits *fusées* (fig. 199) dont l'arête inférieure est sensiblement horizontale. Le rayon, ou bras de levier du frottement, est alors la distance du centre de la roue au point de contact de cette dernière avec la fusée. Dans l'emploi des voitures, nous ne pourrions faire abstraction du frottement de roulement sur le terrain. On conçoit, en effet, qu'une roue qui parcourt une surface couverte de pierrailles rencontre des obstacles qu'elle doit franchir ou écraser et qui produisent une résistance plus ou moins considérable.

La force de traction, par rapport à la charge, est d'un huitième sur une route en cailloutis ou en pierres concassées ; d'un douzième sur une route dont les pierres sont plus serrées ; d'un vingtième sur une route pavée ; d'un trentième sur une route damée et bien unie. Quand une voiture roule sur une surface bien lisse, telle que de la glace ou de la neige, il arrive que les roues ne tournent pas ; c'est qu'alors la résistance du terrain en contact des roues est moindre que $f \cdot P \cdot \frac{r}{R}$.

Le rouleau du laboureur (fig. 200) destiné à briser les mottes de terre est encore du même genre. Sa quantité de travail diminue avec le rayon de son boulon, et est d'autant moindre que le rayon de sa circonférence R est plus grand par rapport au rayon r du boulon.

On voit enfin l'avantage des grandes roues ; car, si on ne les employait pas, et que la charge fût tirée ou traînée à terre, l'effort de traction deviendrait $f \cdot P$, et le coefficient f serait à peu près de $\frac{1}{2}$. Sur la neige et la glace il devient, au contraire, très-petit, et de là l'usage des traîneaux dans lesquels on se passe de roues. — Les trique-bales, qui servent au transport des lourds fardeaux, ont des roues de huit à dix pieds. Toutes les fois qu'une voiture a des roues d'inégale grandeur, il faut charger davantage les roues de derrière qui sont les plus grandes, que celles de devant, afin que leur résistance ne soit pas inégale, ou qu'elles ne s'usent pas plus les unes que les autres. Les roues de voitures ont ordinairement de trois à six pieds de diamètre : trop grandes elles augmentent la dépense, ainsi que l'instabilité de la charge (2e partie, 102 et 104).

125. *Résistance due à la roideur des cordages.* — Considérons un rouleau (fig. 201) tournant sur un axe, et portant à sa circonférence une gorge dans laquelle est passée une corde. Un poids Q est suspendu à l'une des extrémités, tandis qu'une puissance F agit à l'autre pour le faire monter par l'intermédiaire de cette corde. Celle-ci, par suite de sa roideur, oppose une certaine résistance du côté de Q, pour se plier autour du rouleau, et doit nécessaire-

ment consommer une partie de la force motrice F. La mesure de la résistance due à la roideur des cordes a été encore l'objet de plusieurs expériences de Coulomb, d'après lesquelles il résulte que, pour un rouleau donné, cette résistance se compose de deux parties dont une demeure constante quand la corde est la même, et dont l'autre varie proportionnellement au poids Q suspendu. En désignant par K la première, et par $I \times Q$ la deuxième partie, la résistance totale d'une corde sera exprimée par $K + I.Q$. K peut être regardé comme représentant la roideur constante qui provient de la torsion ou tension naturelle des fils; I est celle qui est relative à la tension de la même corde pour un kilogramme de résistance. Coulomb observe, en outre, que cette roideur varie en raison inverse des diamètres du rouleau; en sorte que, si $K + I.Q$ est la roideur d'une corde autour d'un rouleau de 1 mètre de diamètre, et que 2R soit le diamètre de celui que l'on considère, $\frac{K + IQ}{2R}$ donnera la mesure de cette roideur autour de ce dernier. Il ne reste donc plus qu'à avoir le tableau des valeurs de K et de I pour les cordes employées dans la pratique, lorsqu'elles sont pliées autour d'un rouleau de 1 mètre de diamètre, puisqu'il suffira de diviser la roideur qui en résulte par le diamètre du rouleau véritable autour duquel la corde peut être enroulée.

Toutefois, comme il est impossible de prévoir les diamètres de toutes les cordes, et qu'il y en a une infinité, Coulomb a encore donné la loi sur la roideur en vertu des diamètres des cordes. Il distingue : 1° les cordes blanches, sèches ou mouillées; 2° les cordes à demi usées, soit sèches, soit mouillées; 3° les cordes goudronnées; 4° enfin, les ficelles. La roideur des premières est à-peu-près proportionnelle au carré des diamètres de ces cordes; celle de la deuxième classe varie comme la racine cubique du carré des diamètres; celle de la troisième classe est proportionnelle au nombre des fils de caret de chaque corde (*voyez* plus loin dans la table). Quant à la roideur des ficelles, elle varie proportionnellement à leur diamètre.

TABLEAU *des poids nécessaires pour plier différentes cordes autour d'un rouleau de* 1^{m} *de diamètre.*

N° I. CORDES BLANCHES SÈCHES. — *Roideur proportionnelle au carré du diamètre.*

DIAMÈTRES DES CORDES EN CENTIMÈTRES.	ROIDEUR NATURELLE OU VALEUR DE K.	ROIDEUR POUR 1 K. DE CHARGE OU VALEUR DE I.
	k	k
1	0,055615	0,0024546
2	0,222460	0,0097582
4	0.889840	0,0389528
8	3,559360	0,1558112

N° II. CORDES BLANCHES IMBIBÉES D'EAU. — *Roideur proportionnelle au carré du diamètre.*

DIAMÈTRES DES CORDES EN CENTIMÈTRES.	ROIDEUR NATURELLE OU VALEUR DE K.	ROIDEUR POUR 1 K. DE CHARGE OU VALEUR DE I.
	k	k
1	0,111250	0,0024546
2	0,444920	0,0097582
4	1,779680	0,0389528
8	7,118720	0,1558112

N° III. CORDES SÈCHES A DEMI USÉES. — *Roideur proportionnelle à la racine carrée du cube du diamètre.*

DIAMÈTRES DES CORDES EN CENTIMÈTRES.	ROIDEUR NATURELLE OU VALEUR DE K.	ROIDEUR POUR 1 K. DE CHARGE OU VALEUR DE I.
	k	k
1	0,055615	0,0024546
2	0,157279	0,0068850
4	0,444785	0,0194708
8	1,257832	0,0550654

N° IV. CORDES MOUILLÉES A DEMI USÉES. — *Roideur proportionnelle à la racine carrée du cube du diamètre.*

DIAMÈTRES DES CORDES EN CENTIMÈTRES.	ROIDEUR NATURELLE OU VALEUR DE K.	ROIDEUR POUR 1 K. DE CHARGE OU VALEUR DE I.
	k	k
1	0,111250	0,0024546
2	0,314558	0,0068850
4	0,889570	0,0194708
8	2,515704	0,0550654

CARRÉS DES RAPPORTS DE diamètres intermédiaires A CEUX DU TABLEAU.	
RAPPORTS.	CARRÉS.
1,0	1,00
1,1	1,21
1,2	1,44
1,3	1,69
1,4	1,96
1,5	2,25
1,6	2,56
1,7	2,89
1,8	3,24
1,9	3,61
2,0	4,00

RACINES CARRÉES DES CUBES DES RAPPORTS DE diamètres intermédiaires A CEUX DU TABLEAU.	
RAPPORTS.	PUISSANCES $\frac{3}{2}$
1,0	1,000
1,1	1,154
1,2	1,315
1,3	1,482
1,4	1,657
1,5	1,837
1,6	2,024
1,7	2,217
1,8	2,415
1,9	2,619
2,0	2,828

N° V. CORDES GOUDRONNÉES. — *Roideur proportionnelle au nombre des fils de caret.*

(Les cordes se composent ordinairement de trois torons ou cordes moins grosses entrelacées et tordues ; les torons sont formés eux-mêmes d'un certain nombre de ficelles ou brins qu'on nomme fils de caret.)

NOMBRE DES FILS DE CARET.	POIDS DE 1 MÈTRE DE LONGUEUR DE CORDE.	ROIDEUR NATURELLE OU VALEUR DE K.	ROIDEUR POUR 1 K. DE CHARGE OU VALEUR DE I.
	k	k	k
6	0,0693	0,212080	0,0023968
15	0,1652	0,105928	0,0060592
30	0,3326	0,349600	0,0125514

Observations. — La roideur des ficelles ou cordes au-dessous de 1 centimètre de diamètre s'obtient, selon les circonstances, des tableaux n^{os} I, II, III et IV, en y réduisant les valeurs de K et de I, proportionnellement à ces petits diamètres. — Les mêmes valeurs, dans le tableau n° V, sont proportionnelles au nombre des fils de caret de la corde. Deux applications sont nécessaires pour montrer l'usage des tableaux ci-dessus.

On demande la résistance de la roideur d'une corde blanche sèche, de 3 centimètres de diamètre, chargée d'un poids de 400 kilogr., et s'enroulant sur un rouleau dont le diamètre est 0^m,50. Je cherche dans le tableau n° I la corde qui se rapproche le plus de la proposée : son diamètre est de deux centimètres ; le rapport des deux diamètres est $\frac{3}{2} = 1,5$, ont le carré donné par le tableau annexé et qui est à deux colonnes, est 2,25. C'est par ce coefficient que je multiplie les valeurs 0,222460 et 0,0097382 de K et de I, qui correspond au diamètre de 2 centimètres. Les produits sont 0^k,50 et 0^k,0219. La roideur de la corde serait par conséquent . . . . $0,50 + \overline{400 \times 0,0219}$ ou 9^k,26 si le rouleau était de 1^m. Divisons alors cette résistance par 0^m,50 qui est celui du rouleau proposé ; le quotient, 18^k,52, sera la roideur véritable de la corde.

La corde est supposée mouillée, à demi usée, de cinq centimètres de diamètre, et chargée de 2000 kilogr. On suppose, en outre, un diamètre de 0^m,25 au rouleau. A cet effet nous aurons recours au tableau n° IV, et nous y choisirons d'abord la corde de 4 centimètres, dont le diamètre est immédiatement inférieur à 5 centimètres. Le rapport de ces deux diamètres étant $\frac{5}{4}$ ou 1,25, ou 1,30 environ, et la puissance $\frac{3}{2}$ de ce rapport étant 1,482 d'après le tableau à deux colonnes annexé, on multipliera par 1,482 les valeurs 0,889570 et 0,0194708. Les produits 1^{k}32 et 0^k,02886 sont tels que la somme 1^k,32 $+ \overline{1000 \times 0,02886}$, ou 30^k,18, serait la roideur de la corde sur un rouleau de 1 mètre. Divisant donc par le diamètre 0,25, le quotient 120^k,72 sera la roideur demandée.

XII.

CALCUL DES ROUES ET DE LEURS RÉSISTANCES.

126. *Roue plane, sollicitée par deux forces situées dans son plan, et à égales distances du centre de rotation.* — Une roulette plane (fig. 202) tournant autour de son tourillon, peut être tirée en sens contraire par deux forces F et Q, situées dans son plan et tangentes à sa circonférence, et elle donne lieu à des conditions d'équilibre qu'il importe de connaître pour la pratique. Les circonstances seront d'ailleurs les mêmes lorsque ces forces ne seraient pas tangentes à cette circonférence : il suffit que leurs directions soient l'une et l'autre à des distances égales du centre : car on peut toujours se représenter le cercle tangent à ces deux droites, et raisonner sur ce nouveau cercle comme sur la roulette. Cela posé, ces deux forces appartenant à un même plan perpendiculaire à l'axe du mouvement, il faudra, pour l'équilibre, que la force F ou la puissance détruise à chaque instant l'effet de la résistance Q ou que les quantités de travail élémentaires qu'elles développent soient égales. Or, les points d'application A et B de ces forces appartenant à un même cercle, les chemins qu'ils décrivent simultanément seront égaux; et puisque les produits de ces chemins par les forces F et Q doivent être aussi égaux, il en sera de même de ces forces. Donc on aura $F = Q$.

Il y aura effectivement équilibre dans le cas de l'égalité des deux forces, si l'on faisait abstraction du frottement produit par le tourillon de la roulette sur sa crapaudine. Ce frottement existant, la puissance F n'aura pas seulement à vaincre le travail de la résistance Q ; elle aura encore à surmonter le travail occasionné par l'autre résistance. D'après cela, on voit que la roulette est soumise à trois forces, qui sont la puissance, la résistance et le frottement, et qu'elle doit-être en équilibre sur sa crapaudine ; ce qui ne peut avoir lieu (2e partie, 99) qu'autant que la résultante de ces trois forces passe par le tourillon et à son point de contact avec la crapaudine. Or, déjà la force du frottement s'y trouve naturellement appliquée ; il devra donc en être de même à l'égard de la résultante des deux forces F et Q. Cette dernière, que nous nommerons N, n'est autre chose que la pression sur l'appui, et elle y produit le frottement f. N dont le bras de levier r est le rayon du tourillon. En appelant R le rayon de la roulette, $F . R$, $Q . R$ et $f . N . r$ seront évidemment les moments de la puissance, de la résistance et du frottement, dont le premier, favorable au mouvement, est égal à la somme des deux autres qui lui sont contraires. On aura, par conséquent,

$$F . R = Q . R + f . N . r.$$

Ayant le moment $F . R$, on divisera par R, et on en conclura l'effort F de la puissance ; mais cela suppose que l'on connaisse la pression N, laquelle

est la résultante de la résistance donnée Q et de la force F qu'on ne connaît pas encore. Il peut arriver deux cas : ou que le rayon du tourillon r soit très-petit par rapport à R, ou qu'il lui soit comparable. Dans le premier cas, on remarquera que, dans la relation $F \cdot R = Q \cdot R + r \cdot f \cdot N$, l'erreur serait fort petite en ne déterminant qu'approximativement la valeur de N, et, par suite, de f N. Car, en la multipliant par r, l'erreur à laquelle le produit $r \cdot f$ N donnera lieu sera très-minime, comparativement à F . R et à Q . R, vu la petite dimension du rayon du tourillon r.

Reste maintenant à expliquer comment on aura cette valeur approchée. Si l'on fait d'abord abstraction du frottement, on a $F = Q$. Prolongeons ces deux forces jusqu'à ce qu'elles se rencontrent en M, et faisons attention que la résultante N de deux forces égales est la diagonale Mc du losange Macb dont les côtés Ma et Mb sont égaux à Q. Cette diagonale devra d'ailleurs passer par le centre C du cercle. Joignez les rayons AC, BC et la corde AB; observez que les diagonales Mc et ab du losange sont perpendiculaires entre elles, que Md est la moitié de la diagonale ou $\frac{1}{2}$ N. Les triangles ACD et aMd sont d'ailleurs semblables : car ils ont chacun un angle droit, l'un en D et l'autre en d. Enfin, l'angle CAD ayant ses côtés perpendiculaires à ceux de l'angle aMd, ces deux angles sont égaux. On aura donc la proportion

$$Md : Ma :: AD : AC,$$

ou

$$Md = \frac{Ma \times AD}{AC} = \frac{Q \times AD}{R},$$

et, par suite,

$$N = 2Md = \frac{Q \times 2AD}{R} = \frac{Q \times AB}{R}.$$

La pression N sur le tourillon sera alors facile à calculer, puisque cela se borne à multiplier la résistance donnée Q par le rapport de la corde qui sous-tend l'arc compris entre les directions des forces, au rayon du cercle. On aura donc

$$FR = Q \cdot R + rf \cdot \frac{Q \cdot AB}{R}.$$

Veut-on avoir la quantité de travail que doit dépenser la puissance en un temps déterminé ? S étant l'arc parcouru par son point d'application, FS sera cette quantité de travail, et si s_1 est le même arc décrit à l'unité de distance, on aura

$$S = Rs_1 \text{ ou } FS = F \cdot Rs_1.$$

Il suffira donc de multiplier la relation des moments par s_1 ; ce qui donne

$$F \cdot Rs_1 = Q \cdot R \cdot s_1 + rs_1 f \cdot \frac{Q \cdot AB}{R}.$$

Cette nouvelle égalité indique que le travail de la puissance est égale à la

somme du travail de la résistance, et de celui qui est consommé par le frottement. Arrivons au deuxième cas où le rayon du tourillon r est comparable au rayon R de la roulette. On fera d'abord attention que la pression N est la résultante des deux forces F et Q, et que F devant toujours être plus grand que Q, la résultante est trop faible quand on substitue Q à F. Appelons N_1 cette dernière résultante, c'est-à-dire $\frac{Q \times AB}{R}$. Si N_1 est trop faible, il en sera de même de la valeur de F déduite de cette relation

$$F = Q + \frac{r}{R} f . N_1 = F_1.$$

Toutefois cette valeur F_1, ainsi obtenue, est déjà plus grande que Q. Si donc je regarde maintenant la pression N comme la résultante de deux forces égales à F_1 et que je fasse

$$N = \frac{F_1 \times AB}{R} = N_2,$$

il est évident que cette nouvelle pression N_2 sera trop forte et qu'il en sera de même de la valeur

$$F = Q + \frac{r}{R} . f . N_2 = F_2.$$

Ainsi, puisque la véritable expression de la puissance est plus petite que F_2 et plus grande que F_1, que, de plus, elle diffère très-peu de toutes deux, il sera permis de la regarder comme égale à leur moyenne ou à $\frac{F_1 + F_2}{2}$ ou bien à

$$Q + \frac{r}{R} . f . \frac{N_1 + N_2}{2}.$$

Cette méthode, comme on voit, revient à considérer la pression comme une moyenne entre les deux résultantes de la puissance et de la résistance: 1° en supposant à la puissance la valeur qu'elle aurait indépendamment de la considération du frottement, et à la résistance sa valeur donnée; 2° en supposant à la puissance une seconde valeur approchée, et à la résistance celle qu'elle devrait avoir pour faire équilibre à cette nouvelle puissance, si le frottement n'existait pas. Nous verrons tout à l'heure que cette méthode est générale.

127. *Même roue soumise à deux forces situées dans son plan, mais à des distances inégales du centre.* — La puissance agit quelquefois sur une roue hors de son centre et à une distance différente de celle de la résistance; elle peut être, par exemple, appliquée à un corps fixé à la circonférence de la roue. C'est ainsi que, pour faire tourner une roue, un homme exerce son action contre une cheville, tandis que le poids, ou la résistance à vaincre, exerce la sienne sur le cercle lui-même. Les raisonnements sont encore ana-

logues aux précédents, quoique les forces F et Q (fig. 203) cessent ici d'être égales. Ainsi, en désignant par R la distance AC de la première au centre et par R′ la distance CB de la deuxième, ces deux forces, qui sont d'ailleurs toujours situées dans le plan de la roue, et par conséquent dans un plan perpendiculaire à l'axe du mouvement, devront, pour qu'elles se fassent équilibre, détruire leur effet réciproque, si l'on fait abstraction du frottement : autrement dit, leurs quantités de travail seront égales. Or, s_1 représentant le chemin parcouru à l'unité de distance dans un même petit temps par rapport au centre, pour tous les rayons compris dans le plan de la roue, Rs_1 et $R's_1$ seront les chemins décrits par les points d'application A et B des forces F et Q, et l'on aura $F \cdot Rs_1$ et $Q \cdot R's_1$ pour leurs quantités de travail. Donc, on a

$$FRs_1 = QR's_1, \text{ ou } FR = QR',$$

ou enfin

$$F = \frac{QR'}{R},$$

et cela indépendamment de la considération du frottement. Si l'on veut en tenir compte, il est évident que son moment, plus celui de la résistance, doit être égal au moment de la puissance.

On fera voir encore que, puisque l'équilibre subsiste, il est indispensable que la résultante de ces trois forces, ou seulement celle de la puissance et de la résistance, passe par l'appui du tourillon contre son palier; et on reconnaîtrait en même temps que cette résultante N, des forces F et Q, n'est autre chose que la pression exercée contre les surfaces frottantes, que le frottement est $f \cdot N$, et qu'enfin $f \cdot N \cdot r$ est son moment. Ainsi, on aura

$$FR = QR' + f \cdot N \cdot r.$$

Avant d'aller plus loin, nous ferons remarquer que, puisque la résultante N doit passer par le centre C de la roue, on peut la supposer appliquée en ce point et l'y décomposer en deux autres dont les directions sont parallèles aux forces F et Q, et qui produiront ces dernières, mais appliquées en C ; ce qui montre qu'on peut imaginer ces forces transportées en un même point de l'axe, et les composer ensuite en une seule de laquelle résulte la pression sur l'axe.

Des difficultés analogues au cas précédent se représentent ici pour la détermination de N, attendu qu'on ne connaît pas à l'avance la valeur F de l'une de ses composantes. Mais on fera deux hypothèses, selon que le rayon du tourillon r est très-petit ou comparable à R. Dans le premier cas, on prendra pour F la valeur trop faible $Q \cdot \frac{R'}{R}$; je dis *trop faible* parce que F doit vaincre à la fois le travail de la résistance et celui du frottement. On cherchera d'abord la résultante N_1 des deux forces $Q\frac{R'}{R}$ et Q. Puis on aura

une nouvelle valeur de F, au moyen de la relation

$$FR = QR' + fN_1 r,$$

ou de

$$F = Q \cdot \frac{R'}{R} + fN_1 \cdot \frac{r}{R}.$$

J'appelerai F_1 cette valeur très-approchée, dont on se contentera tant que r sera très-petit par rapport à R. Mais si le rayon r est comparable à R ou à la distance AC, il faudra recourir à la dernière méthode indiquée précédemment. Ainsi, ayant déjà la première valeur approchée F_1, on fera attention que F_1 est plus grand que $\frac{QR'}{R}$, ou Q moindre que $\frac{F_1 R}{R'}$. Donc, si je remplace Q par cette valeur $\frac{F_1 R}{R'}$, déjà trop forte, et que je la compose avec F_1 pour obtenir la résultante N_2, cette nouvelle pression sera trop considérable, et, substituée à N dans la relation des moments, elle donnera pour F une valeur

$$F_2 = \frac{QR'}{R} + \frac{r}{R} \cdot f \cdot N_2$$

qui sera trop forte. Mais, comme la véritable expression de la puissance diffère très-peu de F_1 et de F_2, et qu'elle est comprise entre ces deux quantités, elle pourra donc être représentée par

$$\frac{F_1 + F_2}{2}, \text{ ou par } \frac{QR'}{R} + \frac{r}{R} \cdot f \frac{N_1 + F_2}{2}.$$

128. *Équilibre de la poulie fixe.* — Nous pouvons maintenant déterminer les conditions d'équilibre entre une puissance et une résistance, lorsqu'elles sont appliquées à une poulie fixe dont la surface extérieure est creusée en gorge et reçoit une corde aux extrémités de laquelle ces deux forces sont censées tirer. La résistance sera, par exemple, un poids Q (fig. 204) qu'il s'agit de soulever. Lorsque la poulie est fixe, ses deux tourillons font corps avec elle et tournent pendant le mouvement, chacun sur un œil pratiqué dans une chape immobile. On a soin de renfler la poulie vers ses épaulements, afin que, dans le cas où elle serait poussée parallèlement à son axe, la surface frottante de ces épaulements soit diminuée le plus possible. La puissance F n'aura pas seulement à vaincre la résistance Q; elle aura encore à surmonter celles de la roideur de la corde, et du frottement sur le tourillon. Remarquez d'ailleurs que cette roideur ne résiste que du côté B où la corde s'enroule sur la poulie, et nullement du côté où elle se déroule; il y a plus, c'est que si la corde était élastique, elle favoriserait la puissance vers ce dernier côté. Ainsi, la résistance de la corde est en B. Quand les cordes ont de très-gros diamètres, on peut regarder que la puissance et la résistance agissent sur leur ligne milieu; ainsi, les deux forces ont leurs

directions tangentes à une circonférence dont le rayon est égal à celui de la poulie augmenté de celui de la corde.

Nous raisonnerons donc comme au nº 126, afin de parvenir à l'équilibre des forces F et Q. On aura d'abord $F = Q$, en faisant abstraction de toute résistance. Appelons N_1 la résultante des deux forces égales à Q et appliquées au centre C de la poulie parallèlement à la direction des deux forces données; N_1 sera d'abord considéré comme une première valeur de la pression sur l'axe du mouvement; fN_1 sera le frottement, et fN_1r son moment. Quant à la résistance de la roideur de la corde qu'il faut ajouter à la résistance Q, son expression (2ᵉ partie, 125) est égale à $\frac{K + IQ}{2R}$, K et I étant les coefficients relatifs l'un à la tension naturelle, et l'autre à la tension du poids Q, et R étant le rayon de la poulie augmenté comme il a été dit. On aura, par conséquent, en vertu du principe des moments,

$$F \cdot R = R \cdot Q + R\left(\frac{K + IQ}{2R}\right) + r \cdot f \cdot N_1.$$

Divisant par R, on trouvera

$$F = Q + \frac{K + IQ}{2R} + \frac{r}{R} \cdot f \cdot N^1 = F_1.$$

Mais cette valeur F_1 est trop faible pour la puissance, parce que dans l'estimation de la pression N_1 nous avions supposé cette puissance simplement égale à Q. Toutefois F_1 étant déjà plus grand que Q, il est évident que si nous prenons pour pression la résultante N_2 de deux forces égales à F_1 et appliquées en C, la nouvelle valeur

$$F_2 = Q + \frac{K + IQ}{2R} + \frac{r}{R} \cdot f \cdot N_2$$

sera à son tour trop forte. On voit donc clairement que comme d'ailleurs la véritable puissance ne diffère que de très-peu des quantités obtenues F_1 et F_2, elle sera suffisamment exprimée par la moyenne

$$\frac{F_1 + F_2}{2} = Q + \frac{K + IQ}{2R} + \frac{r}{R} \cdot f \cdot \frac{N_1 + N_2}{2}.$$

Il arrive fréquemment dans la pratique que les deux forces, puissance et résistance, tirent les deux branches de la corde (fig. 205) selon des directions parallèles et verticales. Telle est, par exemple, la circonstance de l'homme qui tire de l'eau d'un puits. Non-seulement il tire verticalement sur une poulie, mais il en est de même à l'égard du sceau qui apporte l'eau. Dans ce cas il y a une simplification notable, en ce que la pression N exercée sur les tourillons de la poulie, et qui est la résultante des forces parallèles F et Q, devient ici égale à leur somme $F + Q$. Si d'ailleurs la poulie est très-pesante, ou que, les deux forces étant peu considérables, le poids *m*

de cette poulie leur devienne comparable, ce sera une troisième force qu'il faudra comprendre dans les deux autres pour l'évaluation de la pression sur le tourillon. On aura donc

$$N = F + Q + m, \text{ ou } N = F + Q - m,$$

selon que les cordons seront tirés l'un et l'autre de haut en bas ou de bas en haut. Il en serait de même du cas plus général où les deux forces F et Q ne seraient plus parallèles, et où l'on aurait à tenir compte du poids de la poulie; la pression N, à laquelle le frottement sur le tourillon est toujours proportionnel, serait encore la résultante des trois forces F, Q et m que l'on combinerait deux à deux à l'aide du principe du parallélogramme.

Pour mieux faire apprécier l'influence du frottement, et de la roideur des cordes dans la poulie, nous appliquerons un exemple au cas particulier d'une poulie à deux cordons parallèles. On aura alors

$$N = F + Q + m,$$

et $$F = Q + \frac{K + IQ}{2K} + f(F + Q + m)\frac{r}{R}.$$

Supposons Q = 1000 kilogr., R ou le rayon de la circonférence à laquelle les deux forces sont tangentes = 0,20, r ou le rayon du tourillon = $0^m,02$, f le coefficient du frottement $= \frac{1}{8}$ pour du fer sur du cuivre sans graissage, et enfin imaginons que la corde soit une corde blanche sèche dont le diamètre soit de 2 centimètres. Des trois termes de la valeur de F, le premier Q est la résistance 1000 kilog. qui serait aussi celle de la puissance F, abstraction faite des autres résistances. Le deuxième $\frac{K + IQ}{2R}$ est relatif à la roideur de la corde; les valeurs de K et de I, d'après le tableau n° 1 du paragraphe 125, sont pour la corde de 2 centimètres, $0_k,2225$ et $0^k,00974$. On a d'ailleurs $R = 0^m,20$. Donc, on aura, pour l'expression numérique de la roideur de la corde,

$$\frac{0,2225 + \overline{0,00974 \times 1000^k}}{2 \times 0,20} = \frac{9^k,9625}{0,40} = \frac{99_k,625}{4}$$
$$= 24^k,906 = 25^k \text{ environ.}$$

Quant à la résistance du frottement $f(F + m + Q)\frac{r}{R}$, nous prendrons pour F la valeur approchée 1000^k, qu'elle aurait sans le frottement, et pour m 20^k qu'on suppose être le poids de la poulie; et nous aurons

$$f(F + m + Q)\frac{r}{R} = \frac{1}{8}(1000 + 20 + 1000)\frac{0,02}{0,20}$$
$$= \frac{1}{8} \times 2020 \times \frac{1}{10} = \frac{202}{8} = 25^k,25.$$

On aura donc, en définitive,

$$F = 1000^k + 25^k + 25^k,25 = 10500_k,25.$$

Sans les résistances, cette valeur de F eût été de 100 kilogr.

Si au lieu de $R = 0,20$, nous avions $R = 0,1$, la roideur de la corde deviendrait 50 kilogr., et le frottement $50^k,56$, en sorte que la puissance serait augmentée de 100^k sur 1000^k par suite de ces résistances. Or, le travail consiste ici dans le produit du poids Q ou de 1000^k et du chemin parcouru. Ce dernier chemin étant aussi celui de la puissance, on reconnaîtra facilement que son travail, par l'effet des résistances tant de la roideur de la corde que du frottement, est augmenté d'un vingtième, ou d'un dixième, selon que le rayon est de 2 décimètres ou de 1 décimètre; fractions qui ne sont point à négliger.

129. *Équilibre de la poulie mobile.* — Jusqu'ici l'axe de la poulie a été supposé demeurer immobile ou n'avoir aucun mouvement de transport; et cependant les poulies peuvent être mobiles, ou soutenues par leur gorge sur une corde dont un bout est tiré par une puissance et dont l'autre est attaché à un crochet fixe en Q (fig. 206). Cette même poulie est, en outre, embrassée par une chape ou espèce de fourche qui porte les tourillons de la poulie, et dont la queue se termine en un crochet destiné à recevoir le poids qu'on veut soulever. Ce système est précisément celui des réverbères des rues. De quelque manière que la puissance F soit appliquée, son objet est d'élever un poids P qui presse immédiatement l'essieu de la poulie sur sa chape, et qui fait naître au point fixe Q une tension telle que la résultante de cette dernière composée avec la puissance F détruise le poids P ou lui soit égale et immédiatement contraire; ce qui exige que les deux branches de la corde de suspension suffisamment prolongées se rencontrent en un même point O sur la verticale de P. Donc, réciproquement, si on regarde le poids P comme immédiatement appliqué en O et qu'on le décompose en deux autres forces O*a* et O*b*, dirigées suivant les tangentes au cercle de la poulie, l'une sera la tension Q et l'autre la force F. Or, l'équilibre serait ainsi établi indépendamment du frottement et des autres résistances; toutefois cette décomposition donne déjà une première valeur approchée de la puissance F.

Pour avoir la véritable, il faut observer qu'elle doit vaincre non seulement la tension Q de l'autre branche de corde, mais encore le frottement qui s'exerce au tourillon et qui est proportionnel au poids à soulever P; il faudra également tenir compte de la roideur de la corde en B, ou du côté de la tension résistante Q. Ainsi, le moment de la puissance F sera égal à celui de Q augmenté de ceux de la roideur et du frottement. Donc, on aura

$$F \cdot R = Q \cdot R + \frac{K + IQ}{2R} \cdot R + rf \cdot P.$$

Quant à la valeur de Q, cette force est la composante de P décomposée suivant un losange, attendu que la verticale de ce poids passe par le centre de la poulie et partage l'angle des directions de F et Q en parties égales; et l'on ferait voir, comme au n° 126, qu'on aura

$$Q = \frac{R \times P}{AB}.$$

Donc, en définitive, on parviendra au moment F . R de la puissance dont le quotient qui résulte de la division par R donne la valeur cherchée de F.

130. *Équilibre des moufles.* — On nomme *moufle* le système de plusieurs genres de poulies portée sur une chape commune (fig. 207). Quand on fait usage de cette machine, elle doit se composer de deux moufles, dont l'une est fixe, et l'autre mobile; une corde tirée par une puissance F embrasse tour à tour les poulies d'une chape à l'autre; enfin la moufle mobile porte le fardeau R qu'on veut élever. En observant le jeu de cette machine, on reconnaît facilement que la longueur du cordon sur lequel est appliquée la puissance F augmente de la somme de tous les raccourcissements des autres cordons partiels, et que ces derniers sont, chacun, égaux à la montée du poids R. Par conséquent, s'il y a quatre cordons en sus de celui de la puissance, le chemin parcouru par la résistance sera le quart de celui que décrit cette dernière; il en sera le sixième, si le nombre des cordons, outre celui de F, est porté à six. L'équilibre est alors soumis à une condition bien simple, quand on fait abstraction des frottements; car le travail de la puissance F, ou son produit par le chemin qu'elle parcourt, étant égal au travail de la résistance R, c'est-à-dire à son produit par la hauteur dont elle monte, cela revient à dire que la puissance serait le quart ou le sixième de la résistance, selon que le nombre des cordons qui soulèvent le poids est de quatre ou de six.

Mais, si l'on veut tenir compte des frottements, il faut marcher de poulie en poulie, ainsi qu'il suit. Pour la poulie n° 1, la tension t_1 du dernier cordon est la résistance, tandis que la tension t_2 du cordon adjacent en est la puissance. Observant en outre que les cordons sont parallèles, et appelant R_1, r_1, f, K, I, le rayon de cette poulie, celui de son boulon, le coefficient du frottement, et les coefficients relatifs à la roideur de la corde, on aura, pour l'équilibre de la poulie n° 1,

$$t_2 R_1 = t_1 R_1 + \frac{K + I \cdot t_1}{2R_1} R_1 + r_1 f(t_1 + t_2);$$

relation qui donnera t_2 au moyen de t_1. Quant à l'équilibre de la poulie n° 2, où t_2 devient la résistance, tandis que la puissance est la tension t_3 du troisième cordon, on aura

$$t_3 R_2 = t_2 R_2 + \frac{K + I \cdot t_2}{2R_2} R_2 + r_2 f(t_2 + t_3),$$

ce qui donnera t_3 au moyen de t_2 ou de t_1. La poulie n° 3 donne lieu à cette autre relation

$$t_4 R_3 = t_3 R_3 + \frac{K + I \cdot t_3}{2R_3} R_3 + r_3 f(t_3 + t_4).$$

Enfin, de la poulie n° 4, en remarquant que t_5 n'est autre chose que la puissance cherchée F, on obtient

$$F \cdot R_4 = t_4 R_4 + \frac{K + I \cdot t_4}{2R_4} R_4 + r_4 f(t_4 + F)\,;$$

de sorte qu'en dernière analyse on arrive à la puissance F au moyen de t_1 qu'on ne connaît pas. Mais faisons attention que tous les cordons sont parallèles, et que les tensions t_1, t_2, t_3 et t_4, qui supportent le poids R, peuvent être regardées comme des composantes de cette résistance, et cette dernière comme égale à leur somme. On aura donc

$$t_1 + t_2 + t_3 + t_4 = R.$$

Cette méthode ne laisse pas que d'être assez pénible ; mais on peut la simplifier par une considération suffisamment exacte. En effet, si les tensions t_1, t_2, t_3 et t_4 servent à soutenir le poids R, y compris celui des chapes et des poulies, il est évident que sans le frottement et la roideur des cordes, elles seraient égales entre elles. On prendra donc t_1 comme étant égal à $\frac{R}{4}$, et l'on cheminera de poulie en poulie pour en déduire des valeurs correspondantes pour t_2, t_3, t_4, lesquelles seront plus grandes que t_1 ou que $\frac{R}{4}$, en sorte que leur somme surpassera R. Mais, comme cela ne saurait être, on en conclut que ces tensions sont trop fortes.

Maintenant, si l'on suppose que les véritables tensions soient proportionnelles à celles qui viennent d'être obtenues et dont la somme est $R' > R$, on aura de nouvelles valeurs approchées des premières en partageant leur véritable somme qui est R en parties proportionnelles aux deuxièmes ; ce à quoi l'on parviendra en multipliant celles-ci par $\frac{R}{R'}$; la valeur de t_1, qui en résultera, sera $\frac{R}{4} \times \frac{R}{R'}$ ou $\frac{R_2}{4R'}$; puis on recommencera les calculs que l'on poursuivra jusqu'à t_4 ; enfin, à l'aide de cette dernière considérée comme résistance sur la poulie n° 4, on tirera une valeur plus approchée de la puissance F.

Pour mieux faire comprendre l'esprit de cette méthode, nous l'appliquerons à un exemple particulier. Les rayons des poulies n°s 1, 2, 3 et 4, c'est-à-dire R_1, R_2, R_3 et R_4, sont de $0^m,08$, $0^m,12$, $0^m,16$ et $0^m,20$. Les rayons r_1, r_2, r_3, r_4, de leurs boulons, sont tous de $0^m,02$. La corde, qui passe

dans les gorges des poulies, est une corde blanche sèche et à $0^m,02$ de diamètre, de sorte que les coefficients K et I relatifs à sa roideur sont encore, comme au n° 128, $0^k,2225$ et $0^k,00974$. Enfin, nous supposerons que le coefficient est $\frac{1}{8}$ ou celui du frottement de fer sur cuivre sans graissage, et que le poids à soulever, y compris celui des poulies, est 1200 kilogr., ou que R = 1200 kilogr. Sans le frottement on aurait $t_1 = \frac{1200^k}{4}$ (parce que le nombre des cordons qui supportent ensemble le fardeau est de 4), ou $t_1 = 300^k$. Faisant cette hypothèse dans la relation de la poulie n° 1, $t_2 = t_1 + \frac{K + It_1}{2R_1} + \frac{r}{R_1} f(t_1 + t_2)$, et imaginant que la valeur de t_2 qui entre dans le terme du frottement est égale d'abord à 300^k comme t_1, on aura $t_2 = 339_k$. Passant à la deuxième poulie et considérant la résistance t_2 comme égale à 339^k, on trouvera $t_3 = 368^k$. Passant encore à la troisième poulie, on tirera de la valeur de $t_3 = 368$ celle de $t_4 = 391^k$. La somme $t_1 + t_2 + t_3 + t_4$, ou 1398^k, est évidemment plus forte que le poids total 1200^k. Pour avoir des valeurs plus approchées, on multipliera chaque tension précédente par le rapport $\frac{1200^k}{1398}$ ou par 0,86; ce qui donnera

pour t_1,	$0,86 \times 300$,	ou	258^k;
» t_2,	$0,86 \times 339$,	»	291^k;
» t_3,	$0,86 \times 368$,	»	316^k;
» t_4,	$0,86 \times 391$,	»	336^k.

Afin d'avoir la valeur de F ou de la puissance, on posera l'équation

$$F = t_4 + \frac{K + It_4}{2R_4} + \frac{r_4}{R_4} f(t_4 + F),$$

et on substituera à t_4 la valeur 336 kilogr.; ce qui donnera

$$F = 336^k + \frac{0,2225 + 0,00974 \cdot 336}{2 \cdot 0,2} + \frac{0,02}{0,2} \cdot \frac{1}{8}(336 + 336)$$
$$= 336^k + 9^k + 8^k \text{ environ } = 353^k.$$

Or, sans les frottements et la roideur des cordes la puissance n'eût été que de 300 kilogr.; ces dernières résistances l'augmentent donc de 53 kilogr. ou de $\frac{1}{6}$ environ; et, comme la quantité de travail de la puissance est proportionnelle à son intensité, on voit que le moteur doit dépenser pour vaincre la roideur et le frottement un sixième de travail en sus de ce qu'il lui faudrait si ces résistances n'existaient pas.

Équilibre des roues en général. — Les conditions d'équilibre n'offrent pas

plus de difficultés à l'égard des roues quelconques montées sur un même arbre qui repose lui-même sur deux tourillons ; ce qu'il importe c'est que les forces soient appliquées dans le plan de ces roues ou dans des plans perpendiculaires à l'axe ; autrement les composantes de ces forces, parallèles à l'axe, pousseraient celui-ci contre les épaulements des coussinets et y produiraient un frottement (2e partie, 120) dont le bras de levier peut être considérable.

Toutefois il y a des cas où la décomposition est nécessaire ; cette circonstance arrive pour les roues d'angles. On cherchera alors l'effort qui pousse dans la longueur de l'arbre, ainsi que le travail des frottements qui s'exercent aux épaulements, et ce travail sera compris parmi ceux que doit vaincre le travail de la puissance. Si la résistance utile est un poids Q (fig. 208) suspendu à une corde qui s'enroule autour de l'arbre, la puissance F appliquée tangentiellement à la roue tirera de bas en haut et de haut en bas, selon que son point d'application sera, par rapport au treuil, du même côté ou d'un côté différent que le point d'application de la résistance. Quelquefois la puissance agit au bout d'un levier, comme dans ces mécanismes appelés *haquets*, à l'aide desquels on charge les tonneaux de vin sur les voitures. Tantôt encore la puissance agit sur des roues à chevilles, sur des roues à marcher, sur des cabestans, sur des roues dentées, sur des roues à cordes sans fin, etc. ; le tour prend toutes sortes de dispositions différentes, mais qui rentrent les unes dans les autres, quant aux conditions de l'équilibre.

Quoi qu'il en soit, la force F étant appliquée tangentiellement à un cercle de rayon R (fig. 208), son plan perpendiculaire à l'axe du tour coupera l'arbre suivant un autre cercle égal à celui qui correspond à la section du plan qui contient la résistance Q. Si E est le point d'application de cette résistance, nous pouvons imaginer par ce point et par l'axe un nouveau plan qui rencontre le petit cercle contenu dans le plan de la force F, en un point E′ situé de l'autre côté du treuil et symétrique par rapport au point E. Appliquons au point E′ deux forces Q' et Q_1, égales et parallèles à Q, et qui soient directement opposées. Ces deux forces qui s'entre-détruisent ne fatigueront pas la roue, et ne sauront en rien altérer le mouvement. De plus, la force Q_1 et la force Q se composeront en une seule S, égale au double de l'une d'elles ou à 2Q et qui passera par l'axe, en sorte qu'elle ne pourra faire aucun travail. L'équilibre est donc réduit à celui des deux forces F et Q', égale à Q, qui sont ainsi ramenées dans un seul plan perpendiculaire à l'axe du tour. En suivant la marche du numéro 127, on verra que, sans la considération du frottement, les travaux de ces forces doivent être égaux, ou qu'en appelant s_1 le petit arc décrit par le tour à l'unité de distance, et R, R′ les distances des forces F et Q' ou Q à l'axe, on a

$$FRs_1 = QR's_1, \text{ ou } FR = QR'.$$

L'équilibre exigeant que la résultante des forces F et Q' ou Q passe par l'axe ou que l'on reproduise ces forces en C (fig. 209), on aura alors les forces F, Q et S, toutes trois appliquées à l'axe, et qui pourront être, chacune, décomposées en deux forces parallèles appliquées aux centres des tourillons A et B. De cette manière on aura deux groupes de forces dont les unes concourent au premier tourillon et les autres au second. Appelons N_1 la résultante des unes et N_2 la résultante des autres, $f.N_1$ sera le frottement exercé sur le tourillon A, et $f.N_2$ le frottement exercé sur le tourillon B. Leurs quantités de travail seront d'ailleurs $rs_1 f.N_1$ et $rs_1 f N_2$, et devront être vaincues par le travail de la puissance F, en outre du travail de la résistance Q. Donc, on a

$$FRs_1 = QR's_1 + rs_1 fN_1 + rs_1 f.N_2,$$

ou, en divisant par s_1,

$$FR = QR' + rfN_1 + rfN_2.$$

Ces calculs de la décomposition des forces F, Q' et S ou 2Q, en couples de composantes parallèles appliquées aux tourillons A et B, prouvent que, lorsque ceux-ci ont des rayons égaux r, le résultat est le même que celui qui est relatif à un seul tourillon pressé par la résultante de toutes les forces extérieures données, et transportées en un même point ; on comprendra d'ailleurs parmi ces forces le poids de tout le système du tour, et, en désignant par N cette résultante totale, on aura

$$F.R = QR' + r.f.N.$$

Ce qu'il est essentiel de retenir des raisonnements qui viennent d'être exposés, c'est que dans le calcul on peut agir comme si les forces étaient dans un seul plan, quelle que soit la distance de ceux qui les contiennent en réalité ; et calculer le frottement comme s'il n'y avait qu'un seul tourillon. Quand l'axe des roues est vertical, le poids P de ces roues porte sur le pivot inférieur qui fait fonction de tourillon, et produit sur le fond de la crapaudine un frottement fP dont le bras de levier est (2[e] partie, 120) deux tiers du rayon de ce pivot que j'appellerai r'. On comprendra donc parmi les moments des résistances le moment $\frac{2}{3} fPr'$. Le reste rentrera dans le cas général que nous avons détaillé.

132. *Roues combinées.* — Les roues dans les machines sont souvent combinées entre elles de manière à se transmettre le mouvement selon des conditions données. On connaît trois moyens principaux pour ces combinaisons dans le cas de deux roues à axes parallèles : 1° l'emploi de cordes, de courroies ou de chaînes sans fin ; 2° le contact naturel et le roulement des couronnes ou tambours de ces roues ; 3° l'engrenage de dents ou de courbes en saillies fixées aux couronnes. Dans ces circons-

tances les puissances, en transmettant leur action d'une pièce à l'autre, font naître des frottements qu'il est utile de connaître, parce qu'ils ne sauraient être toujours négligeables.

133. *Résistances dues aux tensions des courroies.* — Lorsque deux tours se communiquent entre eux par une corde ou courroie sans fin (fig. 210), la puissance F est appliquée à l'un d'eux; son action se transmet par une des branches de la corde à l'autre tour sur lequel la résistance opère. En désignant par T la tension de la branche de corde qui tire sur le deuxième tour et par t la tension de l'autre branche qui cède, et en considérant ce qui se passe sur ce dernier tour, on reconnaît qu'il ne tourne qu'en vertu de la différence $T - t$ des tensions, et qu'il est ainsi sollicité d'une part par la puissance $T\ t$ — et de l'autre par la résistance Q. Faisant d'abord abstraction du frottement, on trouvera cette différence $T - t$ par l'égalité de sa quantité de travail à celle de Q. De cette manière on n'obtient, et d'une manière approchée, que la différence des tensions, et non les tensions individuelles sur chaque branche.

On remarquera toutefois que quand le système est en mouvement, la branche qui entraîne le tour auquel la résistance est appliquée, est plus tendue que celle qui cède, et que les tensions sont les mêmes quand le système est au repos; de sorte qu'il est permis de supposer que l'une s'augmente de ce dont l'autre diminue, ou que la première a sur la tension primitive un excès précisément égal à celui de la tension primitive sur la seconde. Donc, la différence entre les tensions T et t est double de cet excès, et si l'on appelle celui-ci K, la différence approchée $T - t$ déjà obtenue précédemment pourra être représentée par 2K. Si nous désignons par T′ la tension avec laquelle la corde ou la courroie a été primitivement bandée, nous aurons

$$T = T' + K\text{, et } t = T' - K.$$

D'après cela, on voit que si l'on connaissait T′, on en déduirait T et t; puis regardant la pression exercée comme la résultante N des trois forces T, t et Q, on égalerait de nouveau le travail de $T - t$ à celui de Q augmenté du travail absorbé par le frottement du deuxième tour sur son tourillon proportionnel à la pression ainsi calculée.

On considérerait de même le travail de $T - t$ ainsi obtenu comme le travail à vaincre sur le premier tour par la puissance F, laquelle aurait également à vaincre le travail consommé par le frottement autour de son tourillon; ce frottement serait d'ailleurs lui-même proportionnel à la résultante des forces F, T et t; et l'on verra enfin que le travail de cette puissance est égal au travail de Q augmenté des quantités de travail absorbées par les frottements sur l'un et l'autre tourillon. Mais cette connaissance dépend évidemment de celle de la tension primitive T′. Or, cette tension

est arbitraire ; il suffit qu'elle soit seulement capable d'entraîner le deuxième tour dans le mouvement imprimé par le premier à la corde. Il est vrai qu'en augmentant outre mesure cette tension primitive, ce serait aussi augmenter le frottement des tourillons qui croît avec cette dernière.

En général, la tension primitive de la courroie doit être telle que le deuxième tour ne puisse glisser sous l'action de la résistance Q, ou que cette dernière soit moindre que le frottement de la corde ou courroie sur ce même tour. Soit R′ le rayon de l'arbre sur lequel la résistance Q agit, et R_1' le rayon du tambour qu'embrasse la corde et qui est monté sur cet arbre ; $\frac{QR'}{R_1'}$ sera la force qui, appliquée au rayon R_1', devra produire le même effet que Q, et cette force devra être au plus égale au frottement de la courroie pour qu'il n'y ait pas glissement. Remarquons que la courroie est sollicitée par une résistance $T'-K$ et par une puissance $T'+K$, et que le frottement de la courroie sur le tambour de rayon R_1' et sur l'arc égal à s' (2[e] partie, 112) a pour expression

$$(T'-K)\left(1+\frac{fs'}{nR_1'}\right)^n-(T'-K).$$

On devra donc avoir l'égalité

$$\frac{QR'}{R_1'}=(T'-K)\left\{\left(1+\frac{fs'}{nR_1'}\right)^n-1\right\},$$

de laquelle on déduira la valeur de T′. Dès lors il n'y a plus aucune difficulté pour calculer T, t, les frottements exercés sur les tourillons, et leurs quantités de travail. En un mot, on aura la quantité de travail de la puissance qui sera égale à la somme de ces dernières et de celle de la résistance. La considération de la tension primitive d'une corde ou courroie sans fin n'est pas indifférente, parce qu'elle est tendue avec un effort qui n'est pas moindre que 500 à 600 kilogr. (*Exemple : scierie de M. de Neuville*).

134. *Résistance des chaînes.* — Dans le calcul précédent de la quantité de travail de la puissance, on n'a pas eu égard à la résistance de la courroie. Si elle est mince, sa roideur est peu de chose ; la petite épaisseur de cette courroie la rend flexible, et susceptible d'une résistance que l'on peut négliger sans qu'il en résulte une erreur sensible. Si c'est une corde, la roideur ne se manifeste qu'aux points des tambours où elle s'enroule, et nullement vers ceux où la corde se déroule. Ainsi, au point a cette résistance sera $\frac{K+IQ}{2R'}$; au point b elle sera $\frac{K'+I't}{2R_1'}$; au point c elle sera nulle ; elle a lieu au point d avec une intensité égale à $\frac{K'+I'T}{2R_1}$; enfin elle est nulle aux points e et f. Ces résistances ainsi évaluées donneront

lieu d'ailleurs à des quantités de travail à comprendre parmi celle que doit surmonter la puissance F.

Si la communication est établie au moyen d'une chaîne sans fin, les articulations de cette chaîne seront regardées comme des tourillons qui tournent sur des crapaudines, en même temps que celles-ci sont emportées dans le mouvement des tambours. Dans ce cas l'angle décrit par chaque boulon d'articulation dans sa crapaudine est égal à celui qui est décrit par le tambour, en sorte que si s_1 est l'arc décrit à l'unité de distance par ce dernier et que r soit le rayon de chaque boulon, rs_1 est le chemin décrit par le point d'application du frottement de la chaîne contre son boulon. Quant au frottement, il est proportionnel à la tension qui a lieu dans la partie de la chaîne qui commence soit à s'enrouler sur le tambour, soit à se dérouler. Ainsi, il sera $f \cdot t$ du côté où la branche de la chaîne sans fin éprouve une tension t; et il sera $f \cdot T$ du côté où l'autre branche est tirée avec une force T. On comprendra alors les quantités de travail $f \cdot t \cdot rs_1$ et $f \cdot T \cdot rs_1$ parmi celles qui doivent être vaincues conjointement avec la résistance utile.

135. *Résistances des roues à couronne, et des roues d'engrenage.* — Nous avons dit que les roues se transmettent le mouvement en roulant l'une sur l'autre. Il faut que leurs circonférences soient garnies chacune d'une couronne de buffle, que l'on rapproche l'une contre l'autre au moyen d'une pression extérieure convenable. Désignons par T (fig. 211) l'effort mutuel qu'elles exercent l'une contre l'autre. Il est évident qu'il agira de haut en bas sur la deuxième roue pour faire monter le poids Q, et que son travail sera égal au travail de ce poids augmenté de celui qu'absorbe le frottement du tourillon de la roue que l'on considère. La pression sur ce tourillon sera d'ailleurs la résultante des forces T et Q et de la pression extérieure transportée parallèlement sur le centre C'. Pour avoir la puissance F de la première roue, on l'obtiendra en observant que son travail est égal au travail de la force T déterminé sur la deuxième roue, plus le travail consommé par le frottement du tourillon C. Ce frottement est d'ailleurs proportionnel à la résultante des forces F, T et de la pression extérieure transportée parallèlement sur le centre C'. On voit d'ailleurs que le travail de la puissance F équivaut à celui de la résistance Q augmenté des quantités de travail consommées par les frottements autour des centres C et C'. On n'a pas tenu compte du frottement des couronnes de buffle l'une contre l'autre, parce que ce frottement est de la deuxième espèce et qu'il peut être négligé.

Supposons maintenant deux roues portant à leur circonférence des dents qui engrènent l'une dans l'autre (fig. 212). Quoique celles-ci se touchent par des points qui varient à chaque instant, le mouvement est le même

que si ces roues se pressaient immédiatement sur leurs couronnes moyennes. Les rayons de ces dernières s'obtiennent en partageant l'intervalle CC′ des centres en parties proportionnelles au nombre des dents, ou réciproquement proportionnelles aux nombres des tours que les deux roues font simultanément. Soit T le point qui satisfait à cette condition sur l'intervalle CC′, CT et C′T seront les rayons cherchés. En appelant comme tout à l'heure T l'effort mutuel de ces deux couronnes, on le déterminera par la deuxième roue et par la condition que sa quantité de travail vainque celle de Q et du frottement exercé autour du tourillon C′. Or, la puissance F n'a pas seulement à vaincre le travail de T et celui du frottement autour de C, il faut encore qu'elle surmonte le frottement des dents les unes contre les autres, lequel sera fT. Toutefois, puisque le point de contact de ces dents change continuellement, le bras de levier de ce nouveau frottement est nécessairement aussi variable. En cherchant la quantité de travail consommée par le frottement des dents les unes contre les autres, on a reconnu qu'elle était la même que si ce frottement s'exerçait à la circonférence C avec un bras de levier égal au rayon de cette roue, et avec une intensité constante et égale à $fT\,\frac{m+m'}{mm'}\,\pi$. Par conséquent, on tiendra compte de cette résistance, en substituant à T dans le calcul de F la résistance $T+fT\,\frac{m+m'}{mm'}\,\pi$, ou T′, et en considérant la pression exercée en C et à laquelle le frottement de ce tourillon est proportionnel, comme étant la résultante des forces F et T′ transportée parallèlement sur ce centre.

XIII.

CALCULS RELATIFS A LA VIS ET A SON ÉCROU.

136. *Description succincte de la vis à filets carrés et de son écrou.* — Pour se faire une idée de la forme d'une vis à filets carrés, qu'on se représente un cylindre BCED (fig. 213) plein à base circulaire qu'on nomme noyau, et dont l'axe AA' est vertical. Si on fixe à la surface de ce noyau un rectangle *abcd* dont le plan contienne l'axe AA' et qui n'est autre chose que le profil du filet de la vis, il est évident que, par suite d'un mouvement de rotation autour de l'axe AA', ce rectangle engendrera un anneau, tant qu'il demeurera à la même hauteur. Mais si en même temps qu'il tourne, il descend le long de l'axe de quantités proportionnelles aux arcs décrits, ou si pour un quart de révolution, il est descendu du quart de la hauteur verticale que ce profil parcourt pendant une révolution complète, on aura ce qu'on appelle un filet carré en saillie sur le noyau. Chacun des sommets du rectangle a décrit une courbe rampante qu'on nomme *hélice*, et qui jouit de la propriété que l'un de ses points étant pris pour origine, tant par rapport à la courbe elle-même qu'à sa projection sur un plan horizontal quelconque, les hauteurs de tous ses points au-dessus du premier sont entre elles comme les arcs décrits horizontalement à partir de ce point d'origine. On nomme encore *pas* de la vis la hauteur dont le profil s'est élevé après avoir parcouru une circonférence entière autour de l'axe AA'; cette hauteur est encore mesurée par l'intervalle *aa'* entre les surfaces supérieures de deux filets consécutifs. Chaque surface supérieure se compose d'un faisceau d'hélices qui toutes ont le même pas, mais qui appartiennent à des cylindres de rayons différents. Celle qui est tracée sur le noyau est celle dont le rayon est le plus petit, tandis que le rayon le plus grand appartient à l'hélice engendrée par le sommet extérieur *a* du rectangle. La pente ou la roideur d'une hélice sur une même surface du filet va donc en diminuant du noyau à l'arête extérieure du filet. Après s'être ainsi figuré la génération de la vis, il faut en outre concevoir que l'on taille en creux un autre corps de la même manière que la vis est taillée en plein; c'est ce qu'on nomme l'écrou de cette dernière. Dès lors l'écrou et la vis pourront s'adapter, et ils auront nécessairement l'un sur l'autre un double mouvement de rotation et de translation. Dans tous les cas, si l'on imprime un simple mouvement de rotation à l'un de ces corps, l'autre sera posé sur la surface supérieure d'un filet du premier comme sur un plan incliné.

137. *Mode d'action de la vis à filets carrés; son équilibre indépendamment des frottements.* — Pour élever des fardeaux ou produire du travail, on emploie le système de la vis et de son écrou de deux manières, soit en fixant invariablement l'écrou, et en laissant la vis tout à fait libre, soit encore en fixant invariablement la vis, et en laissant à l'écrou la faculté de se mou-

voir. Dans le premier cas, c'est-à-dire dans celui où l'écrou est fixe et la vis mobile, on agit snr cette dernière au moyen de leviers R (fig. 214) embarrés dans sa tête; non-senlement alors elle tourne dans son écron, mais encore elle sonlève le poids Q attaché à son extrémité.

Mais quand la vis est fixe, et que l'écrou est mobile, la puissance est alors appliqnée sur des leviers R (fig. 215) insérés dans des ouvertures pratiquées à la surface de l'écrou; et ce dernier, en tournant autour de la vis, chemine dans le sens de la longueur de son axe et sonlève en même temps la charge Q'.

Dans tous les cas, en appelant F la puissanee et Q la résistance à vaincre, il est évident que la première doit agir dans le plan du mouvement de son levier, ou perpendiculairement à l'axe de ce mouvement, comme dans le treuil; et si l'on fait abstraction du frottement, son travail doit être égal à celui de la résistance produit dans le même temps. Or, remarquons que lorsque cette dernière s'élève d'une certaine hauteur, le point d'application de la puissance a dû parcourir un certain arc, et qu'en vertu de la propriété de la vis, le rapport entre ces deux quantités est toujours le même au bout d'un temps quelconque, quels que soient la hauteur dont a monté la résistance, et l'arc décrit par la puissance, pourvu que cette hauteur et cet arc soient simultanés. Nous pouvons donc considérer ce qui a lieu dans une révolution complète. Or, la puissance a décrit une circonférence, pendant que la résistance s'est élevée d'un pas de vis; et si on appelle h la hauteur de ce pas, et R la distance du point d'application de la puissance à l'axe, h et $2\pi R$ seront les chemins décrits par la résistance Q et par la puissance F dans leurs propres directions. Ainsi, $F \,.\, 2\pi R$ sera le travail de la puissance et $Q \,.\, h$ celui de la résistance au bout d'une révolution complète; et l'on aura pour condition d'équilibre, indépendamment des frottements,

$$F \times 2\pi R = Q \times h, \quad \text{ou} \quad F : Q :: h : 2\pi R :$$

ce qui indique que la puissance est à la résistance comme le pas de la vis est à la circonférence décrite par le point d'application de la puissance.

138. *Équilibre de la vis à filets carrés en tenant compte des frottements.* — Nous venons de dire que l'on pouvait comparer l'écrou qui marche sur une vis fixe, ou nne vis sur son écrou, à un corps posé sur un plan incliné. Toutefois à la puissance F destinée à faire monter le corps sur le plan, et qui est horizontal, il convient d'en substituer une autre horizontale comme elle, et qui, étant capable du même travail, est immédiatement appliquée sur l'hélice dont l'inclinaison est celle du plan incliné que l'on considère. Il faut d'ailleurs se rappeler que toutes les hélices d'un même filet ont des inclinaisons d'autant plus roides que les cylindres auxquels elles appartiennent ont des rayons plus petits, et que l'inclinaison qui représente simultanément les inclinaisons de ces diverses hélices correspond à celle de

l'hélice moyenne du filet et qui a pour rayon une longueur que je désignerai par r. Or, la puissance horizontale capable du même travail que F et appliquée à la distance r de l'axe du mouvement sera telle que l'on aura $2\pi . F' . r = 2\pi . F . R$ (R étant toujours la longueur du bras de levier de la véritable puissance F).

Concevons maintenant que le cylindre de rayon r soit développé sur un plan; dans ce développement le cercle de sa section perpendiculaire aux arêtes va devenir une ligne droite, et celles-ci des perpendiculaires à cette droite; et comme les hauteurs des points de l'hélice de ce cylindre moyen ne sont nullement altérées par l'effet de ce développement, et qu'elles sont proportionnelles aux arcs correspondants, cette hélice deviendra une droite inclinée ayant pour base AC (fig. 216) le développement du cercle $2\pi r$, et pour hauteur BC le pas de vis h. Cela posé, la puissance F′ horizontale devant élever le poids Q sur un plan incliné dont la base et la hauteur sont les quantités précédentes, cette puissance F′ et ce poids Q seront, pour que l'équilibre ait lieu sans la considération du frottement (2e partie, 105) dans le rapport de la hauteur à la base de ce plan. Donc, on aura

$$F' : Q :: h : 2\pi r,$$

et, par conséquent, $2\pi r . F' = Q . h$;

ou bien, à cause de $2\pi r . F' = 2\pi R . F$, on trouvera encore

$$2\pi R . F = Q . h,$$

relation qui conduit à la même conclusion que tout à l'heure.

Cette manière d'envisager le mouvement de la vis s'applique très-facilement au cas où l'on veut faire entrer en considération les frottements. En effet, on a vu que, dans le cas d'un plan incliné, toute force horizontale F′ capable d'y élever un poids Q, et de vaincre en même temps la résistance du frottement, était donnée (2e partie, 108) par la formule $F' = \frac{Q\,(BC + f . AC)}{ac - f . bc}$. Nous ferons remarquer que, dans cette formule, le coefficient f est le rapport du frottement à la pression, relatif aux surfaces des substances en contact, c'est-à-dire ici de la vis et de son écrou, que BC et AC (fig. 217) représentent des fractions qui expriment le rapport de la hauteur et de la base du plan à sa longueur, que ac et bc sont des fractions exprimant les rapports des composantes parallèles et perpendiculaires au plan, à la force horizontale motrice F prise pour unité, et qu'enfin le terme $f . bc$ dans le dénominateur est pris négativement conformément à l'observation qui a été faite au même n° (108). Or, le triangle abc, qui représente la force motrice ab prise pour unité et ses deux composantes ac et bc, est semblable au triangle ABC, parce que l'angle cab est égal à l'angle BAC et l'angle cba égal à l'angle CBA. Donc, la fraction cb sera égale à la

fraction CB, et la fraction *ca* à la fraction CA. Faisant cette substitution dans F′, nous aurons

$$F' = \frac{Q\,(BC + f\,.\,AC)}{CA - f\,.\,BC}.$$

Il est évident encore que les longueurs BC et AC sont toutes deux proportionnelles au pas h et à la circonférence $2\pi r$ de l'hélice moyenne dont l'inclinaison est celle du plan incliné que l'on a substitué à la surface du filet. Cela résulte immédiatement de la propriété qu'a cette hélice, que ses éléments en projection horizontale et en projection verticale sont toujours dans un rapport constant. On pourra donc mettre h et $2\pi r$ à la place de BC et de AC : car cela revient à multiplier les deux termes de la fraction qui entre dans l'expression de F′, par le rapport commun des deux dernières grandeurs aux premières. On aura donc évidemment

$$F' = \frac{Q\,(h + f\,.\,2\pi r)}{2\pi r - f\,.\,h},$$

et, par suite,

$$2\pi r\,.\,F' = \frac{Q\,(h + f\,.\,2\pi r)}{1 - \dfrac{f\,.\,h}{2\pi r}} = Q\,.\,h + f\,.\,Q\,\frac{h^2 + 4\pi^2 r^2}{2\pi r - fh}.$$

Mais on a toujours $2\pi R\,.\,F = 2\pi r\,.\,F'$, donc on aura, en définitive,

$$2\pi R\,.\,F = Q\,.\,h + f\,.\,Q\,\frac{h^2 + 4\pi^2 r^2}{2\pi r - fh},$$

relation qui nous apprend que la quantité de travail $2\pi R\,.\,F$. de la puissance est plus grande que la quantité de travail $Q\,.\,h$ de la résistance, et qu'elle est augmentée de toute celle qu'absorbe le frottement, c'est-à-dire de $f\,.\,Q\,\dfrac{h^2 + 4\pi^2 r^2}{2\pi r - fh}$.

139. *Dimensions à donner à la vis à filets carrés ; influence de son frottement.* — Si l'on fait attention que dans l'expression $f\,.\,Q\,\dfrac{h^2 + 4\pi^2 r^2}{2\pi r - fh}$ de la quantité de travail absorbée par le frottement de la vis à filets carrés, le numérateur croît plus rapidement que le dénominateur quand on fait augmenter $2\pi r$, c'est-à-dire la circonférence ou le rayon de l'hélice moyenne, on reconnaît sans peine que ce rayon influe pour beaucoup à l'égard de ce travail nuisible. C'est pourquoi l'on doit tâcher de le diminuer le plus possible dans chaque cas, sans rien ôter à la solidité de la vis. Soit bo (fig. 218) le rayon de l'hélice intérieure ou du noyau, ao celui de l'hélice extérieure ; on donne ordinairement à la saillie ab des filets une longueur égale à son épaisseur ad mesurée dans le sens de l'axe, et pour la facilité de l'exécution on fait les vides égaux aux pleins, c'est-à-dire que $ad = ad'$. D'après cela, s'il n'y a qu'un filet de vis, ou si les profils $abcd$, $a'b'c'd'$ consécutifs appartiennent au même filet, le pas aa' sera égal à $2ad = 2ab$: autrement dit,

la saillie du filet est égale à la moitié du pas. S'il y avait deux filets distincts, c'est-à-dire, si a', a'' appartiennent au même filet, le pas $a'\,a''$ serait double du précédent ou $4ab$. La saillie serait alors le quart du pas, etc. On emploie ainsi plusieurs filets de vis, afin de pouvoir faire varier le pas sans changer la grosseur du noyau qui a des dimensions déterminées, ainsi qu'on va le voir.

Les vis à filets carrés étant ordinairement en fer, et les écrous en cuivre, le noyau et les filets doivent avoir une solidité suffisante pour ne pas se déformer sous le poids Q de la charge qui les sollicite parallèlement à l'axe. Or, la surface de rupture du noyau étant $\pi . \overline{bo}^2$, et chaque millimètre carré de cette surface pouvant porter moyennement sans perdre son élasticité, 6 kilog. environ ; on aura $6\pi . \overline{bo}^2 = Q$; d'où l'on tirera la valeur de bo en millimètres. Admettant ensuite que l'écrou ne doit pas embrasser moins de trois filets successifs, afin que l'engrènement soit convenable et qu'il s'use moins vite, son épaisseur sera égale à $6ad$ ou $6ab$, et la surface de rupture des filets le long du noyau sera $\frac{6ab}{2} . 2\pi . bo$, à cause qu'il y a autant de plein que de vide. Comme la charge pourrait agir toute entière sur les extrémités a, a' des filets et qu'elle aurait ainsi un bras de levier double de celui de la surface de rupture cb, $c'b'$ de ces filets, on ne devra prendre que la moitié de la quantité ci-dessus, c'est-à-dire $3ab . \pi . bo$; la résistance de la matière (cuivre et étain) qui compose l'écrou, différant peu de celle du fer, on devra égaler la quantité ci-dessus à la surface $\pi . \overline{bo}^2$, de rupture du noyau ; d'où l'on tirera la saillie

$$ab = \frac{1}{3}\, bo \text{ environ.}$$

Il est évident que ces dimensions ne sont pas tellement absolues qu'on ne puisse aucunement s'en écarter; seulement elles nous paraissent les plus convenables en général relativement aux hypothèses qui ont été faites. Très-certainement l'usure et le frottement seraient moindres en augmentant la hauteur de l'écrou, et en faisant la saillie ab plus petite que ad, par exemple moitié. Quoiqu'il en soit, en reprenant nos premières hypothèses, le rayon bo ou celui de l'hélice intérieure étant de $3ab$, le rayon de l'hélice extérieure sera $4ab$; donc le rayon moyen r sera égal à leur demi-somme, ou à $\frac{7}{2}\, ab$, ou enfin à $\frac{7}{4}\, h$, à cause que la saillie ab doit être moitié du pas h. Faisant cette substitution dans le travail consommé sur la vis par le frottement au bout d'une révolution complète, ou dans $f\,Q\,\frac{h^2 + 4\pi^2 r^2}{2\pi r - f h}$, on trouve, toute réduction faite, et en remplaçant π par $\frac{22}{7}$, $\frac{122f . Qh}{11 - f}$.

Supposons l'écrou en cuivre et la vis en fer nous pourrons prendre (deuxième tableau du n° 106 ci-dessus) $f = 0{,}17$, ce qui se rapporte au cas où les surfaces ont longtemps frotté et se sont polies; on aura donc, pour la quantité de travail absorbée,

$$\frac{122 \cdot 0{,}17}{11 - 0{,}17} - Qh = 1{,}92 \times Qh.$$

Ainsi, la condition d'équilibre de la vis à filets carrés, en tenant compte des frottements, donne

$$2\pi R \cdot F = Qh + 1{,}92 \cdot Qh, = 2{,}92 \cdot Qh,$$

tandis que, si le frottement n'existait pas, on aurait simplement $2\pi\, R \cdot F = Qh$. D'où l'on voit que ce frottement occasionne un surcroît de travail mesuré par 1,92, ou presque double du travail utile Qh pour la vis à filets carrés.

140. *Frottements des épaulements et pivots des vis.* — Jusqu'ici on a considéré la vis ou l'écrou comme tout à fait libre, tandis que l'un ou l'autre est tout à fait fixe : autrement dit, la puissance en tournant s'élève en même temps que la vis ou l'écrou, et alors il n'y a d'autres résistances en sus du fardeau à soulever, que le frottement qui a lieu sur les filets. Mais il arrive souvent ou que la vis fixée à ses extrémités n'a qu'un mouvement de rotation, ou que l'écrou appuyé sur une base stable tourne autour de la vis en restant à même hauteur. Dans le premier cas, et c'est celui d'une barre à deux écrous traversée par deux vis qui tournent sur deux pivots et dans deux colliers supérieurs au moyen de barres fixées à leurs têtes (fig. 219), l'écrou chemine suivant une direction verticale; sa charge se répartit en deux parties pour chaque vis, et si on nomme Q cette charge partielle, chaque pivot est chargé d'un poids Q, qui y produit un frottement fQ, dont le bras de levier moyen (2e partie, 120) est les $\frac{2}{3}$ du rayon ρ du pivot. La quantité de travail de ce frottement au bout d'une révolution complète sera $2\pi . f . Q \times \frac{2}{3}\rho$, et sera ajoutée à toutes les autres résistances déjà expliquées précédemment, et que devra vaincre la puissance. On aura alors sur chaque vis

$$2\pi R \cdot F = Q \cdot h + fQ\frac{h^2 + 4\pi^2 r^2}{2\pi r - fh} + 2\pi \cdot f \cdot Q \cdot \frac{2}{3}\rho.$$

Lorsqu'au contraire, l'écrou tourne autour de la vis en demeurant à la même hauteur (fig. 220), la vis s'élève verticalement en entraînant la charge qu'elle supporte; les résistances à vaincre sont la charge, le frottement des filets de la vis contre ceux de l'écrou, et enfin celui de l'écrou contre la base fixe qui le supporte. Cette circonstance a lieu dans la manœuvre des vannes, des grilles de pont; l'écrou pressé contre des supports

fixes porte à sa partie inférieure un anneau qui glisse dans une rainure circulaire, et est mis en mouvement au moyen de leviers embarrés dans les faces verticales. La surface par laquelle cet écrou frotte est un anneau; la charge Q produit sur cet anneau un frottement fQ dont le bras de levier moyen (2e partie, 120) est égal au rayon moyen ρ' de cet anneau. La quantité de travail de cette résistance étant $2\pi \cdot \rho' \cdot f \cdot Q$, il faudra l'ajouter à toutes les autres pour en déduire celle de la puissance.

Pour faire voir combien ce frottement peut être considérable, nous supposerons une charge de 3000 kilogr. et le coefficient du frottement de l'anneau dans sa rainure égal à $\frac{1}{10}$; on aura $fQ = 300$ kilogr. Si le rayon moyen de l'anneau est 0,50, le moment de cette seule résistance sera $300 \times 0{,}50$. Appelons x le surcroît d'effort à exercer par la puissance pour la vaincre, et imaginons que la puissance agisse avec un bras de levier de 1,50, on aura

$$x \times 1{,}50 = 300 \times 0{,}50\text{, ou } x = 100^k.$$

L'effort ordinaire d'un homme qui agit en poussant étant moyennement de 10 kilogr., on voit que le seul frottement de l'écrou par son anneau exige dix hommes de plus à la manœuvre. Aussi, doit-on chercher à éviter toutes les dispositions dans lesquelles c'est l'écrou qui tourne. Quand on y est contraint, on en diminue les inconvénients, soit en imprégnant d'huile ou de graisse la rainure circulaire, soit en faisant rouler l'anneau sur des galets qui réduisent le travail de ce frottement (2e partie, 124) dans le rapport du rayon de leur essieu à celui de leur circonférence. Encore ces galets s'usent-ils souvent inégalement, et n'offrent que peu d'avantages. La meilleure manière est d'appuyer la vis sur des pivots tournants, et de faire monter l'écrou dans le sens de son axe. C'est ce que l'on pratique dans la plupart des pressoirs; les vis reçoivent leur mouvement de rotation en appliquant des hommes à des roues fixées aux têtes des vis.

141. *Vis triangulaires.* — Les grosses vis que l'on emploie dans les pressoirs sont toujours à filets triangulaires (fig. 221). Leur génération ne diffère de celle des vis à filets carrés, qu'en ce que leur profil est un triangle isocèle *abc* dont la base *bc* est attachée au noyau, comme le rectangle de ces dernières; mais il s'élève encore dans le sens de l'axe, de hauteur proportionnelle aux arcs décrits autour du noyau. L'équilibre de cette vis ne saurait d'ailleurs s'obtenir par des considérations aussi simples que les précédentes. Toutefois le calcul conduit à une relation qui dépend encore de l'hélice moyenne du filet triangulaire: cette relation est même tout-à-fait semblable à celle des vis à filets carrés, si ce n'est qu'au lieu du coefficient du frottement f, on le remplace par $\frac{f}{m}$. La quantité m exprime le rapport

de la hauteur *ad* du triangle générateur à son côté *ab*, et elle est en général plus petite que l'unité, parce que toute perpendiculaire *ad* est moindre que l'oblique *ab* qui part du même point *a*. Le seul cas où *m* soit égal à l'unité est celui où le côté du filet *ab* est perpendiculaire au noyau ; ce qui revient à la circonstance du filet carré.

Ainsi, dans le cas de l'équilibre de la vis à filets triangulaires, *r* étant le rayon de l'hélice moyenne, *h* le pas de la vis, R le bras de levier de la puissance, on a

$$2\pi \,.\, \text{R} \,.\, \text{F} = \text{Q}h + \frac{f}{m}\,\text{Q}\,\frac{h^2 + 4\pi^2 r^2}{2\pi r - fh}.$$

Q*h* étant le travail nécessaire pour soulever la charge, ... $\frac{f}{m}\,\text{Q}\,\frac{h^2 + 4\pi^2 r^2}{2\pi r - fh}$ est évidemment celui que les frottements des filets absorbent dans la vis à filets triangulaires ; et il est plus considérable que pour les filets carrés, attendu que *m* est moindre que l'unité. Ce frottement diminue d'ailleurs à mesure que *m* est plus grand, ou que la perpendiculaire *ad* augmente. Donc les vis dont la saillie est plus considérable frottent moins que celles dont la saillie est moindre.

Pour bien se rendre compte de l'influence des frottements de ces vis, il faut avoir quelque idée sur la forme qui leur est la plus convenable. En général, dans la vis à filets triangulaires en bois dont la dureté n'est pas très-grande, comme le chêne, l'orme, etc., on prend ordinairement pour triangle générateur *abc*, un triangle isocèle rectangle en *a*. Lorsque la vis est en bois dur tel que le buis, le cormier, le sorbier, le charme, on prend pour le profil *abc*, un triangle équilatéral ; on en agit de même quand la vis est en fer et l'écrou en cuivre : dans tous les cas, le pas est mesuré par la base $bc = aa'$ du triangle s'il n'y a qu'un seul filet, par deux fois cette base s'il y en a deux, etc. Quant à l'épaisseur de l'écrou, elle est égale à trois fois aa' ; enfin la saillie *ad* est le tiers du rayon *do* du noyau, et ce dernier se détermine de la manière déjà indiquée (2[e] partie, 139), en observant que pour le cas du bois, on ne doit pas supposer la résistance supérieure à 0k,80 par millimètre carré. Imaginons, par exemple, une vis dont le profil est un triangle équilatéral. On a d'abord

$$ad = \sqrt{\overline{ab}^2 - \overline{bd}^2} = \sqrt{h^2 - \frac{h^2}{4}} = \frac{h}{2}\sqrt{3} = 0{,}866 \times h.$$

Le rayon intérieur *do* du filet est égal à $3ad$, et le rayon extérieur *ao* à $4ad$: le rayon moyen *r* est donc $\frac{ao + do}{2}$, ou

$$\frac{7}{2}\,ad = \frac{7}{2} \times 0{,}866 \,.\, h = 3{,}031 \,.\, h.$$

$$m = \frac{ad}{ab} = \frac{h \times 0.866}{ab} = 0,866.$$

Si nous faisons ces substitutions dans le travail du frottement, et qu'on prenne $f = 0,17$, nous trouverons pour ce travail $3,78 . Qh$. Donc, on aura pour l'équilibre de la vis à filets triangulaires

$$2\pi . R . F = Qh + 3,78 . Qh = 4,78 . Qh;$$

ce qui indique que le travail de la puissance est plus de quatre fois et demie ce qu'il serait sans l'existence du frottement des filets.

Les détails de construction qu'on vient de donner ne concernent que les vis destinées à supporter de grands efforts. Dans les instruments de précision, dont les vis sont en fer ou en acier, on donne à la hauteur *ad* du triangle générateur jusqu'à deux et même trois fois la base *bc*; c'est afin de rendre la surface frottante plus grande, et l'usure moindre, en sorte que l'engrenage demeure invariable. Les vis à bois ou clous à vis offrent également des filets très-aigus, dans la vue de les faire mordre facilement, et d'augmenter la force nécessaire pour les arracher. Les vis et les écrous se creusent d'ailleurs, comme on sait, au moyen de tarands ou ciseaux lorsque la matière est un métal, et de gouges d'acier triangulaires quand la matière est du bois; le mouvement des gouges ou tarands est guidé par une vis ou de toute autre manière, et l'évidement ne se fait que par portion et en enfonçant successivement l'outil.

142. *Vis sans fin.* — La vis sans fin se compose d'une vis à filets carrés dont les filets engrènent continuellement dans les dents d'une roue. Le plan milieu de cette roue comprend l'axe EH (fig. 222) de la vis que nous supposerons vertical, et les dents ont sur le cylindre de cette roue une inclinaison telle qu'elles se présentent à la vis parallèlement à la tangente du filet qui répond au point de contact; les arêtes de ces dents sont donc obliques par rapport à l'axe de la roue. Ordinairement la puissance F est appliquée à la tête de la vis par le moyen d'une manivelle à bouton, et lui imprime sans l'élever un mouvement de rotation. La surface des filets se présente alors successivement aux dents de la roue, et le force à s'abaisser; la roue est, par conséquent, entraînée, et soulève un poids Q' suspendu à une corde qui s'enroule autour d'un tambour énarbré sur le même axe que la roue. Cela posé, ne considérons que ce qui se passe dans le plan milieu de la roue qui comprend l'axe EH de la vis; le profil de la surface frottante des filets sera une perpendiculaire *mb* à cet axe, en sorte que l'engrenage est celui d'une crémaillère verticale à dents droites et d'une roue ordinaire. Le mouvement est d'ailleurs le même que celui d'une droite verticale AB qui passe par tous les points de contact de chaque dent avec le filet, et qui demeure tangente à un cercle dont le centre est celui de la

roue. Ce sera donc la ligne AB qui, pour nous, par une pression Q exercée de haut en bas, fera tourner le cercle substitué à la roue, cercle dont nous appellerons R′ le rayon.

Appelons Q′ le poids à soulever et r son bras de levier, N la résultante des efforts Q et Q′ et du poids total de la roue transportés à ce centre, résultante qui sera la pression exercée sur ses tourillons, r' le rayon de ces tourillons, on aura d'abord, pour l'équilibre de cette roue,

$$Q \,.\, R' = Q'r + r'f \,.\, N \,.$$

De cette relation on tirera la valeur de Q par les méthodes indiquées (2ᵉ partie, 126 et 127). Il y a en outre le frottement exercé sur la dent, lequel est évidemment proportionnel à l'action Q du filet de vis et a pour expression (2ᵉ partie, 135)

$$f \cdot Q \cdot \frac{m + m'}{mm'} \cdot \pi \,.$$

Mais des deux roues qui engrènent, l'une est une ligne droite ou une circonférence dont le rayon est très-grand, ainsi que le nombre des dents. En faisant donc m' très-grand, ou considérant m comme négligeable par rapport à m', le frottement se réduit à

$$f \cdot Q \cdot \frac{m'}{mm'} \cdot \pi = f \cdot Q \cdot \frac{\pi}{m}.$$

Si nous ajoutons $fQ\,\frac{\pi}{m}$ à Q, nous regarderons $Q + fQ\,\frac{\pi}{m}$ comme la résistance ou la charge appliquée à la vis ; on trouvera le travail de la puissance, ainsi qu'on l'a fait dans les nᵒˢ 129 et 140.

Ce système donne lieu à une très-grande perte de travail. Car déjà les deux tiers, environ, du travail de la puissance (2ᵉ partie, 139) sont consommés soit par le frottement des filets de la vis, soit même par le frottement de ses tourillons ou de ses pivots ; de l'autre tiers transmis à l'extrémité des dents de la roue, une partie est employée à vaincre le frottement de ces dents, une autre partie est consommée par le frottement du tourillon de la roue, et c'est seulement le surplus qui est utilisé pour soulever le fardeau Q′.

XIV.

NOTIONS SUR LE LEVIER.

143. Le levier n'est autre chose qu'une barre de forme quelconque, soutenue par un point d'appui. Tantôt il tourne autour d'un tourillon ; tantôt il est posé sur un couteau. Nous verrons tout à l'heure que la première disposition est en général plus désavantageuse que la deuxième.

Afin de distinguer les diverses espèces de leviers, on les a classés en leviers du premier, du deuxième, du troisième genre.

Dans le levier du premier genre, le point d'appui se trouve entre la puissance et la résistance; dans les autres le point d'appui est au bout de la barre : la résistance se trouve entre ce point et la puissance pour un levier du deuxième genre, tandis que pour celui du troisième c'est au contraire la puissance qui est appliquée entre l'appui et la résistance. Quelle que soit, au reste, l'espèce de levier que l'on considère, les conditions d'équilibre n'en sont pas moins toujours les mêmes.

144. *Équilibre du levier.* — Si le levier ne peut tourner que dans un plan passant par le point d'appui A (fig. 223), il faut que la puissance P et la résistance Q qui lui sont appliquées soient elles-mêmes situées dans ce même plan; autrement elles produiraient des pressions qui donneraient lieu à des frottements ou à des résistances inutiles. De plus, leur résultante devant être détruite par la résistance du point fixe, elle devra passer par ce point, son moment par rapport à ce point sera nul ; ce qui exige que le moment de la puissance P soit égal à la somme des moments de la résistance Q et du frottement f N proportionnel à la résultante de ces deux forces. On aura, par conséquent, en désignant par r le rayon du tourillon de l'axe,

$$P \times AB = \overline{Q \times AC} + r \cdot f \cdot N.$$

Multipliant par s_1, ou par l'arc parcouru à l'unité de distance autour du point fixe, on déduit encore

$$P \times AB \times s_1 = \overline{Q \times AC \times s_1} + r \cdot s_1 \cdot f \cdot N ;$$

ce qui indique que *le travail de la puissance est égal au travail de la résistance augmenté de celui que consomme le frottement de l'axe.*

145. *Emploi et avantages du levier.* — Le levier n'est point destiné à un mouvement de rotation continu; il a pour but ordinairement de soulever de très-grands fardeaux à de très-petites hauteurs pour chaque action qui lui est appliquée. Il n'est donc pas nécessaire de le faire tourner autour d'un tourillon; cette disposition serait même désavantageuse, en ce que la charge étant très-forte, le tourillon devrait être très-gros, et que le travail rs_1fN qu'il absorberait par son frottement deviendrait très-considérable. Il convient alors que le levier pose sur un simple couteau (fig. 224), ou sur l'arête tranchante d'un corps très-dur; le frottement devient négligeable, et l'on a tout simplement

$$P \times AB = Q \times AC, \text{ et } P \times AB \times s_1 = Q \times AC \times s_1.$$

Ainsi, la quantité de travail de la puissance est égale à celle de la résistance. L'avantage de cette machine, la plus simple de toutes, est donc qu'elle transmet intégralement à la résistance la quantité de travail de la

puissance. Ce n'est pas tout, un simple déplacement du point d'appui suffit pour changer à volonté le rapport de la puissance à la résistance. Si, par exemple, le point d'appui A est établi de telle sorte que la distance CA au point d'application C de la charge Q soit un millième de sa distance AB au point d'application B de la puissance, on aura $P = \frac{Q}{1000}$. D'où l'on voit qu'avec une puissance très-petite, il est toujours possible avec un levier de faire équilibre à une énorme résistance; d'une autre part aussi le chemin décrit par la puissance augmente en proportion.

La *pince* du maçon est un levier qui porte lui-même son couteau au talon A (fig. 225). Les maçons pour s'en servir font poser ce talon sur un corps dur, engagent la pointe de leur pince sous le corps qu'ils veulent soulever, et pèsent sur l'autre extrémité B. Plus leur pince est engagée sous la charge moins le point d'application de cette dernière est éloigné du talon ou du point fixe A, et plus ils ont d'action pour soulever cette charge. Aussitôt que le corps est élevé d'une petite quantité, ils glissent des cales pour le tenir à cette nouvelle hauteur. Veut-on l'élever encore plus haut, les maçons relèvent leur levier, ainsi que le point fixe sur lequel le talon de la pince est posé; après quoi en engageant de nouveau la pince sous la charge, ils agissent sur l'autre extrémité, pour soulever la charge au-dessus de sa cale, une nouvelle cale étant posée au-dessus de la précédente; le corps est ainsi maintenu à la hauteur de deux cales, etc.

Pour se faire une idée du temps nécessaire pour soulever avec le levier un grand fardeau à une hauteur même médiocre, supposons que ce fardeau soit de 1 000 000k et qu'il faille l'élever à $1^{m},20$. La quantité de travail à dépenser par la puissance sera évidemment $1^{m},20 \times 1\,000\,000^{k.}$, ou $1\,200\,000^{k.m}$. Si nous estimons l'effort d'un homme égal à 75k ou au poids de son corps, le chemin que cet homme devra décrire à l'extrémité de son levier sera $\frac{1\,200\,000^{k.m}}{75^{k}} = 16\,000^{m}$. Si seulement par chaque quatre secondes il faisait mouvoir de $0^{m},20$ le point du levier où il applique son action immédiate, il lui faudrait pour $16\,000^{m}$ un temps égal à $\frac{16\,000^{m} \times 4''}{0^{m},20} = 320\,000'' = 89$ heures $= 9$ jours à peu près, en supposant à l'ouvrier un travail journalier de 10 heures; en un mot c'est-à-dire, que cet homme à lui tout seul n'en viendrait pas à bout.

Cet exemple démontre que les leviers sont seulement utiles pour des efforts momentanés, ou quand des fardeaux étant considérables, on ne doit les élever qu'à de très-petites hauteurs. L'emploi des leviers est indispensable pour détacher les grosses pierres des revêtements qu'on veut démolir.

Les mâts de vaisseaux destinés à porter les voiles reposent par leur partie

inférieure à fond de cale, et y sont fixés dans des encastrements au moyen de coins chassés avec force. Le poids de ces mâts est énorme, puisque, après avoir traversé tous les ponts du vaisseau, ils s'élèvent encore à une hauteur considérable au-dessus du premier pont. Quand on a besoin de les décaler hors de leurs encastrements, on emploie encore le levier pour soulever leur masse. Ce levier a environ quinze pieds de longueur, et engage sa pointe sous une espèce de talon accolé invariablement au mât. La distance du point où ce levier est engagé au point d'appui est fort petite comparativement au bras de levier de la puissance, et comme il ne s'agit que d'élever ce fardeau à une très-faible hauteur, un millimètre par exemple, on conçoit qu'une quantité de travail ordinaire exercée par la puissance suffit pour desserrer les coins qui retiennent le mât dans son encastrement. Cent mille écus, nous a-t-on dit, ont été donnés à un avocat qui a conseillé pour cette opération l'emploi du levier. Il est probable qu'il ne les eût pas gagnés s'il eût fallu que le mât fût élevé à la hauteur d'un mètre, ou même d'un décimètre.

DEUXIÈME PARTIE.

ÉQUILIBRE DES FORCES ET DYNAMIQUE.

I.—Forces concourant en un point.

II. — Forces parallèles.

III. — Centre de gravité des corps.

IV.—Mouvement de transport parallèle d'un corps ou d'un système de corps.

FIN DE LA TABLE DU 2me VOLUME.

TROISIÈME PARTIE.

DES MACHINES ET DES MOTEURS.

I.

INTRODUCTION. — RÉSUMÉ DES PRINCIPES EXPOSÉS DANS LES DEUX PREMIÈRES PARTIES DU COURS.

1. *Principes généraux.* — L'objet de cette troisième partie du Cours de Mécanique Industrielle est l'étude spéciale des machines et des moteurs. Mais, au préalable, nous rappellerons sommairement les différents principes exposés dans les deux premières parties du Cours, et qui servent de base à la science des machines.

PREMIER PRINCIPE. — *Forces.* — Les forces sont des causes qui modifient ou tendent à modifier l'état des corps. Soit que ces forces poussent ou tirent les corps, leur effort est toujours mesurable en poids, à l'aide de pesons à ressort, de dynamomètres; et, de même que le kilogramme est l'unité de poids, de même toute force sera exprimée pour nous par un certain nombre de kilogrammes (1re partie, 20 et 21).

DEUXIÈME PRINCIPE. — *Travail d'une force constante et dont le point d'application parcourt sa propre direction.* — Pour qu'une force produise un certain travail, il ne suffit pas qu'elle exerce un certain effort, il faut encore que la résistance soit vaincue, le long d'un certain chemin. Si l'effort est constant, et toujours dirigé dans le sens du chemin parcouru par son point d'application, le travail de la force est mesuré par le produit de la force exprimée en kilogrammes, et du chemin exprimé en mètres (1re partie, 35).

TROISIÈME PRINCIPE. — *Travail d'une force variable, et dont le point d'application suit sa propre direction.* — Si l'effort varie à chaque instant, mais sans cesser d'être dirigé dans le sens du chemin parcouru par son point d'application, on considérera que, dans chaque petit chemin élémentaire successif, l'effort est censé constant, et que le produit de cet effort par le petit chemin décrit donne la mesure du travail élémentaire. La somme de ces travaux élémentaires sera le travail total, et s'obtient au moyen du théorème de Thomas Simpson (1re partie, 36, note), en observant que la recherche de cette somme revient à mesurer, pour l'intervalle du chemin total, l'aire d'une courbe, dont les abscisses représentent les chemins successivement décrits

et mesurés en mètres, et dont les ordonnées représentent, d'après une échelle convenable, les résistances, ou efforts correspondants censés mesurés en kilogrammes (1re partie, 36).

QUATRIÈME PRINCIPE. — *Travail d'une force constante dont le point d'application parcourt une direction quelconque.* — Lorsque l'effort est constant, et fait un certain angle constant, avec le chemin parcouru par son point d'application, on a fait voir, à la suite de la démonstration du parallélogramme des forces (2e partie, 11), que le travail de cet effort s'obtenait, soit par le produit de cet effort et du chemin de son point d'application *estimé* dans la direction de cet effort, soit par le produit du chemin réellement décrit et de l'effort *estimé* dans la direction de ce chemin. En un mot, si, EF (fig. 226) étant la grandeur et la direction de l'effort, et AB représentant le sens du chemin que parcourt le point E d'application, on construit le rectangle EF'FG, dont EF est la diagonale, et si E*e* est le petit chemin élémentaire parcouru par E, il est évident qu'en abaissant la perpendiculaire *ee'* sur EF, E*e'* représentera le chemin estimé sur EF, aussi bien que EF' représentera le chemin estimé sur EF, aussi bien que FF' représentera l'effort EF estimé sur la direction AB. Or, nous remarquerons que le travail de la force EF, pendant que son point d'application parcourt E*e*, est mesuré indifféremment par le produit EF $\times$ E*e'* ou par le produit EF' $\times$ E*e*.

CINQUIÈME PRINCIPE. — *Travail dont la force et le chemin parcouru par son point d'application sont variables.*—Enfin, si l'effort EF et l'angle FEF' de cet effort avec le chemin décrit par son point d'application varient continuellement et en même temps, il faudra prendre le produit EF $\times$ E*e'* ou EF' $\times$ E*e* pour chaque instant élémentaire, ou pour chaque espace élémentaire E*e* décrit par le point E, et faire la somme de ces produits à l'aide du théorème de Simpson. A cet effet, on tracera une courbe (fig. 227) ayant pour ordonnées les EF' par exemple, et pour abscisses les sommes des chemins E*e* élémentaires et égaux entre eux, afin que les ordonnées soient équidistantes; puis enfin on prendra de cette courbe l'aire correspondante à la grandeur du chemin total parcouru.

SIXIÈME PRINCIPE. — *Mesure de l'inertie.* — L'inertie est la propriété qu'ont les corps de persévérer dans leur état de repos s'ils sont en repos, ou de mouvement s'ils sont mus avec une certaine vitesse, jusqu'à ce qu'une cause les en fasse sortir. La mesure de cette cause ou de la force qui modifie l'état du corps, est aussi celle de l'inertie ou de la résistance qu'un corps oppose à ce changement d'état. Toutes les fois qu'un moteur, employé à faire mouvoir un corps selon une certaine direction, lui imprime un certain accroissement de vitesse, si on considère la modification qui s'opère dans un temps très-petit t, et si on nomme v l'accroissement de vitesse aussi très-petit pendant le temps élémentaire t, P le poids du corps, g la vitesse imprimée par la gravité au bout de la première seconde, et qui pour nos pays est égale à

$9^m,809$, la force qui pourra engendrer la vitesse v dans le temps élémentaire t, sera égale à $\frac{P}{g} \times \frac{v}{t}$ (1re partie, 74). Cette mesure est la même soit que la force motrice sollicite le corps à l'accélération, ou qu'elle retarde son mouvement. Or, en vertu du principe de l'action égale et contraire à la réaction (1re partie, 24), la force d'inertie sera également contraire à la force motrice et mesurée comme elle, par le produit $\frac{P}{g} \times \frac{v}{t}$; de plus, cette force d'inertie sera contraire au mouvement si celui-ci s'accélère, et favorable s'il est retardé. On nomme *masse* le quotient $\frac{P}{g}$, quotient que nous appellerons M, en sorte que la mesure de la force d'inertie peut être encore représentée par le produit $M \times \frac{v}{t}$.

SEPTIÈME PRINCIPE. — *Force vive d'un corps transporté parallèlement à lui-même.* — La force vive d'un corps qui se meut en ligne droite parallèlement à lui-même, ou dont tous les point décrivent simultanément des chemins égaux et parallèles avec une certaine vitesse V (fig. 228), est égale à $M \times V^2$ (1re partie, 66, et 2e partie, 48). Si le corps ne se meut pas dans une direction rectiligne, la même chose a lieu, pourvu qu'il conserve toujours une position semblable par rapport aux tangentes de la courbe décrite par un point quelconque de ce corps (fig. 229). Mais ici sa vitesse varie d'une position à l'autre, et la mesure précédente de la force vive s'entend pour une position donnée.

HUITIÈME PRINCIPE. — *Force vive d'un corps qui tourne autour d'un axe fixe.* — Souvent les circonstances du parallélisme du mouvement d'un corps n'ont plus lieu; on prendra alors la somme des forces vives mesurées pour chaque molécule. Cependant, si le corps se meut autour d'un axe fixe, on peut mesurer sa force vive totale sans avoir besoin de calculer toutes celles de ses diverses parties. Soit V_1 la vitesse de tous les points du corps à l'unité de distance de l'axe fixe A (fig. 230); I le moment d'inertie de ce corps par rapport à cet axe, c'est-à-dire la somme des produits des masses de ses différentes parties multipliées par le carré de leur distance respective à cet axe, somme dont on a donné l'expression (2e partie, 65 et 66) pour diverses formes de corps; la force vive du corps en question sera représentée par $I \times V_1^2$ (2e partie, 60 et 64).

NEUVIÈME PRINCIPE. — *Force vive d'un corps animé d'un double mouvement de translation et de rotation.* — Si le mouvement du corps se compose d'un mouvement de transport général de son centre de gravité, et d'un mouvement de rotation autour de ce centre ou de la tangente à la courbe qu'il décrit à chaque instant, la force vive est égale à la somme de la force vive du corps estimée comme si tous ses points n'avaient que la vitesse du centre de gravité, et de la force vive relative à la rotation autour de ce centre.

DIXIÈME PRINCIPE. — *Principes des forces vives pour un intervalle de temps fini.*—Jusqu'ici nous avons appris non seulement à calculer la force vive totale d'un corps, dont on connaît l'état de mouvement, mais encore à mesurer le travail d'une force dont l'intensité, le chemin du point d'application et la direction sont donnés à chaque instant ; il nous reste à rappeler la relation qui existe entre cette force vive totale, et le travail des forces qui l'ont produite, relation qu'on nomme *principe des forces vives*, ou *principe de la transmission du travail*, et qui contient à elle seule toute la théorie des machines. Nous l'avons démontré dans les nos 55 et 59 de la 2e partie, et elle se définit ainsi : Si un corps ou plusieurs corps, liés entre eux par des moyens quelconques, et assujettis à certains mouvements comme les différentes pièces d'une machine, sont soumis à l'action des *puissances* ou forces qui tendent à accélérer leur mouvement, et de *résistances* ou forces qui tendent à le retarder, alors, en considérant ce qui a lieu entre deux instants quelconques du mouvement, il arrive que l'accroissement ou le décroissement total de la force vive est précisément égal au double de la différence absolue entre la somme des quantités de travail des puissances et celle des quantités de travail des résistances dans le même intervalle de temps.

ONZIÈME PRINCIPE. — *Même principe pour un intervalle de temps infiniment petit.* — Si, au lieu de considérer ce qui arrive entre deux instants quelconques, ou pour deux positions éloignées du système, on ne s'occupe que de ce qui arrive dans un temps ou chemin infiniment petit, le travail des puissances sera égal au travail des résistances augmenté du travail des forces d'inertie si le mouvement s'accélère, ou diminué de ce même travail si le mouvement se ralentit : car il faut se rappeler que l'inertie agit comme puissance véritable, quand les résistances l'emportent sur les puissances, et *vice versâ* (2e partie, 54).

DOUZIÈME PRINCIPE. — *Principe relatif au mouvement uniforme d'un système.* — On remarquera que si les corps ne tendent ni à accélérer ni à diminuer leur mouvement, ou si leur vitesse reste la même, ou si enfin le mouvement est uniforme, l'accroissement des forces vives sera nul pendant un temps quelconque. Alors la somme du travail des puissances pendant ce temps devient égale à celle du travail des résistances. Il en est de même si la force vive redevient la même pour certaines positions et au bout d'un certain nombre de révolutions, c'est-à-dire que le travail que développent les puissances pendant cet intervalle est égal à celui des résistances.

TREIZIÈME PRINCIPE.—*Principe relatif au mouvement périodique d'un système.* — Le théorème précédent relatif au mouvement uniforme se maintient encore pour chaque instant infiniment petit : car, puisque la vitesse reste toujours la même, l'inertie n'est plus mise en jeu, et son travail élémentaire est nul. Dans ce cas la somme des quantités de travail élémentaires des puissances est perpétuellement égale à celle des quantités de travail élémentaires

des résistances : ce qui signifie qu'il y a équilibre, ou que les puissances détruisent continuellement les résistances, soit dans le cas du mouvement uniforme, soit dans le cas du repos où la vitesse est nulle.

QUATORZIÈME PRINCIPE. — *Les principes précédents étendus à chaque corps d'un système en particulier.* — Ces divers principes ne s'appliquent pas seulement à l'ensemble de tous les corps; car ils ont lieu pour chaque corps en particulier, en le supposant soumis à une seule puissance et à une seule résistance dans les deux points où il est poussé par le corps qui le précède et par celui qui le suit.

II.

CONSIDÉRATIONS GÉNÉRALES SUR LES MACHINES.

2. *Nomenclature générale des pièces d'une machine quelconque.* — Le rappel des principes précédents était d'une nécessité indispensable, puisqu'ils sont susceptibles d'une application immédiate aux machines, lesquelles, considérées sous le point de vue industriel, sont destinées à exécuter certains travaux des arts à l'aide des *moteurs* que présente la nature, tels que les animaux, le vent, le calorique ou la vapeur d'eau.

La plupart des machines industrielles se composent de différentes pièces distinctes, simples ou élémentaires, pièces qui sont analogues aux *machines simples* qui nous ont occupé dans le Cours de la première année (1). Ces pièces se communiquent le mouvement de proche en proche depuis le moteur jusqu'à la matière à confectionner.

La première pièce, près du moteur, se nomme le *récepteur*, parce qu'elle reçoit l'action directe de la force; la dernière est l'*opérateur* ou l'*outil;* les pièces intermédiaires se nomment les *communicateurs.* Souvent aussi on nomme le récepteur *moteur*, parce qu'on considère cette pièce comme donnant l'action aux autres; sous ce rapport chaque pièce peut être considérée comme le moteur de celle qui la suit du côté de l'outil. Mais il ne faut pas confondre ces moteurs secondaires avec les moteurs primitifs qui sont la gravité, la chaleur, les animaux.

Par exemple, dans un moulin à farine, le moteur primitif est le poids de l'eau ou la gravité; l'eau elle-même n'est que moteur secondaire, mais il n'y a pas d'inconvénient à la considérer comme le véritable moteur. La roue hydraulique est donc ici le moteur secondaire ou le récepteur; les *rouages* sont les *communicateurs* du mouvement et du travail; la *meule* est l'*outil*, l'*opérateur.* — Des désignations analogues s'appliquent à toutes les machines.

(1) Nous avons publié ce cours sous le titre de *Mécanique Industrielle*, etc. Un vol. in-8°; Bruxelles, 1839.

3. *Actions des forces sur les machines ; application du principe des forces vives.* — En vertu des principes généraux rappelés plus haut, soit que l'on considère la machine entière comme soumise à l'action de la puissance qui constitue le moteur primitif, à celle de la *résistance utile* qui constitue le travail, et aux actions des *résistances nuisibles* qui s'opèrent aux diverses parties frottantes, soit qu'on considère séparément chacune des pièces distinctes ou des *machines simples* dont elle se compose, comme soumise à l'*action motrice* de la pièce précédente, et à l'action contraire ou résistance utile de la pièce suivante, ainsi qu'aux diverses résistances nuisibles inhérentes à la nature de la pièce en question, toujours est-il certain que le travail moteur se subdivise en trois parties, dont l'une sera le travail utile dû à la résistance qu'on peut vaincre, la deuxième le travail nuisible dû aux résistances étrangères à l'objet qu'on se propose, et la troisième la moitié de l'accroissement de la force vive des parties matérielles de la machine.

Ordinairement les machines se meuvent d'un mouvement uniforme, et ce cas est celui des moulins à farine. L'accroissement de force vive est nul dans ces machines, parce que les forces agissent continuellement et ne cessent de se détruire entre elles. Ainsi, pour cette circonstance, le travail développé par la puissance à chaque instant, ou pendant un intervalle de temps quelconque, est égal au travail utile, plus au travail développé par toutes les résistances nuisibles.

Dans la plupart des cas, le mouvement des machines industrielles est simplement périodique ou tel que les vitesses redeviennent les mêmes au bout d'un certain nombre de révolutions. Par conséquent, au bout de cet intervalle, l'accroissement de force vive est encore nul, et le travail du moteur se compose de l'effet utile augmenté du travail absorbé par les résistances nuisibles.

Si on a bien suivi ce raisonnement, qui appartient à toutes les machines simples ou composées, on doit être convaincu qu'aucune combinaison de pièces ou de rouages ne peut faire que le travail du moteur ou la dépense effective du travail sur la première pièce soit moindre que le travail opéré par l'outil ou que nécessite l'ouvrage à confectionner. C'est là un principe que nous avons eu souvent occasion de rappeler dans la précédente partie du Cours à l'occasion des agents simples, tels que les ressorts, l'élévation des poids, etc.

4. *Objet des machines, transformation du travail.* — Le but véritable des machines ne saurait donc être d'augmenter le travail mécanique des moteurs qui y sont appliqués, mais de transformer ce travail en *ouvrage* ou travail industriel, selon des considérations données dans chaque cas spécial. Ce n'est pas un de leurs moindres avantages, que de convertir le travail de la chute d'un cours d'eau, ou d'un combustible, ou de chevaux, ou de manœuvres sans intelligence, et de tirer parti de ce travail pour moudre le blé,

filer la laine, scier le bois, ou lever d'énormes fardeaux. Pour mieux fixer les idées, soit $F \times E$ le travail que peut lever un moteur dans chaque seconde de temps; une machine nous fournit le moyen de transformer $F \times E$ en un ouvrage qui exigerait à chaque seconde une quantité de travail $f \times e$ nécessairement plus petite que $F \times E$, selon le genre de la machine et des résistances nuisibles. Une machine nous permet en outre de modifier l'un ou l'autre des facteurs f ou e du produit $f \times e$, de telle sorte que tantôt l'effort f de la résistance utile sera 10 ou 100 fois plus grand que l'effort F du moteur, et que tantôt ce sera au contraire la vitesse e de l'*opérateur* ou de l'outil qui sera de beaucoup supérieure à celle du récepteur. L'une ou l'autre de ces conditions est toujours possible pourvu que le second facteur du travail $f \times e$ de l'outil demeure égal au travail $F \times E$ du moteur, diminué du travail des résistances nuisibles de la machine, conformément au principe développé ci-dessus.

On pourra faire, par exemple, qu'avec une machine, un homme de force médiocre puisse soulever un fardeau de 1000 ou de 10000 kilogr.; mais alors il faudra nécessairement ralentir de beaucoup la vitesse du fardeau ou le chemin décrit dans chaque seconde par son centre de gravité. Les moufles, le treuil, la vis, le levier nous ont montré l'exemple de semblables combinaisons. Pareillement, aussi, on augmentera la vitesse d'un outil, pourvu qu'on diminue la résistance de la machine en conséquence et de façon que l'ouvrage reste à peu de chose près le même. Ici se présente l'occasion de remarquer que, pour la qualité des produits confectionnés et pour la solidité même de la machine, il n'est pas toujours permis de donner à l'outil une vitesse arbitraire. Souvent avec une vitesse trop faible, l'outil opère mal, et avec une vitesse trop forte, il se brise, il s'échauffe, il altère ses produits. On en a un exemple dans la fabrication des farines. Si la meule marche trop vite, le grain s'échauffe et se détériore; si sa marche est trop lente, la force centrifuge est insuffisante pour écarter le grain à une certaine distance, il s'accumule près du moyeu de la meule, et ne s'écrase plus.

5. *La modification des facteurs du travail n'est pas arbitraire.* — Non seulement on ne peut pas à l'aide des machines augmenter le travail des moteurs, mais on n'est pas toujours le maître de modifier à volonté les facteurs e et f dont le produit constitue le travail utile de l'outil. Il existe, en effet, une vitesse la plus convenable de ce dernier, et dont on ne saurait s'éloigner sans diminuer la qualité ou la quantité des produits. Le travail EF des moteurs présente des circonstances analogues. Un moteur dont la vitesse E est grande, ne peut exercer qu'un très-faible effort F, et cet effort devient même nul, lorsque la vitesse de son point d'application est parvenue à une certaine limite supérieure. Lorsqu'au contraire, la vitesse est très-petite, et à plus forte raison quand le moteur reste au repos, le moteur est susceptible du plus grand effort F; et comme le travail se compose des facteurs E et F,

voilà deux limites extrêmes où le travail développé est réduit à zéro. Il y a donc une vitesse et un effort les plus favorables au travail que peut produire le moteur ou pour lesquels ce travail devient un *maximum*. Ainsi, on peut dire, en général, pour le récepteur comme pour l'outil d'une machine, que l'espace E qu'ils doivent décrire dans chaque seconde, ou leur vitesse, est assujettie dans chaque cas spécial à certaines conditions ou règles qui dépendent de la nature du moteur ou de la qualité des produits, et qui assignent à l'avance à cette vitesse une valeur dont on doit s'écarter le moins possible, si on tient à l'économie du travail ou à la qualité de l'ouvrage.

6. *Déchet de travail produit par les machines.* — On se formera une idée du déchet de travail occasionné par les résistances nuisibles des machines, si nous rappelons, d'après le résultat des expériences les plus authentiques, que les plus simples et les plus parfaites d'entre elles rendent à peine à l'outil les $\frac{6}{10}$ ou les $\frac{7}{10}$ du travail dépensé sur elles par le moteur, et qu'il en est d'autres qui, par suite de leur ridicule complication, ne rendent pas même le $\frac{1}{20}$, le $\frac{1}{50}$ de de ce travail. Cette dernière fraction est particulièrement relative à l'ancienne machine de Marly, qui servait à élever les eaux de la Seine au moyen de pompes mues par des roues hydrauliques, et qui avait fait longtemps l'admiration de l'Europe. Déjà aussi, à l'occasion des machines simples, nous avons pu reconnaître que le travail utile effectué dans le *coin* par une puissance motrice peut n'être (2ᵉ partie, 116) que le $\frac{1}{5}$ de celui de cette dernière, et que le déchet doit être plus considérable dans la *presse à coin*. Ce déchet dans la *presse à vis* est les $\frac{2}{3}$ ou les $\frac{3}{4}$ de celui du moteur (2ᵉ partie, 139 et 140). Dans le système de *moufles* le plus simple, la perte du travail est encore d'environ $\frac{1}{6}$; enfin, on peut s'assurer que, pour le cric à double harnais, elle s'élève à plus du $\frac{1}{5}$ du travail de la puissance.

7. *Illusion dans l'appréciation de l'effet des machines.* — On voit aussi par là, combien est grave l'erreur de ceux qui prétendent produire, à l'aide de combinaisons mécaniques très-complexes, des effets prodigieux aux yeux d'un vulgaire ignorant, qui ne se doute pas de la quantité de travail nécessaire pour faire mouvoir ces merveilles. L'illusion provient presque toujours, en pareil cas, de ce qu'on n'apprécie ici l'effet de la machine que par l'un des facteurs du travail utile, que par l'intensité absolue de l'effort que suppose la résistance à vaincre, comme lorsqu'il s'agit de soulever d'énormes fardeaux à l'aide d'un cric ou d'une vis. L'illusion qui se produit

alors sur l'esprit des spectateurs est analogue à celle que nous éprouverions en voyant un seul homme soulever un globe métallique très-volumineux que nous croirions plein au lieu d'être vide. En effet, négligeant la considération de la densité de ce globe, ou mesurant son poids d'après la seule idée de son volume qui n'en est qu'un des facteurs (1re partie, 3), nous serions tentés d'attribuer à cet homme une grande puissance d'action; et à ce titre l'ascension des ballons gonflés sera plus merveilleuse encore. De même, quand nous voyons un homme élever, par l'action d'un cric, une voiture de roulier pesant jusqu'à 10,000 kilogr., nous ne faisons attention qu'à l'énormité du poids, sans songer à l'autre facteur du travail utile, c'est-à-dire au chemin décrit par le fardeau, chemin qui, d'après nos principes, est d'autant plus petit que le fardeau est plus grand, et qui est tel que le travail effectif est moindre d'un quart que celui qui est dépensé par l'homme.

On a quelquefois cité le mot d'Archimède: « Donnez-moi un point d'appui et je soulèverai la terre. » Outre que le point d'appui et le levier manquent, outre que c'est réellement le point d'appui qui supporterait la terre, il est aisé de voir qu'Archimède, au bout d'un temps presque indéfini, n'aurait soulevé la terre qu'à une hauteur inappréciable.

8. *Mouvement perpétuel.* — Une autre erreur est celle de quelques individus qui, dans leur ignorance, s'appliquent à trouver les moyens de perpétuer sans fin le mouvement imprimé à des machines, ou d'obtenir le mouvement perpétuel. Elle provient uniquement de ce qu'ils oublient que les pièces des machines sont accompagnées de résistances nuisibles, de sorte que, quand bien même la machine devrait marcher à vide, sans effectuer de travail, la force vive qu'on lui aurait imprimée une fois pour toutes, serait continuellement amoindrie par le travail de ces résistances, et finirait par être complètement éteinte, comme le prouve l'expérience dès le premier essai de toutes ces prétendues inventions. Non-seulement le repos suit plus ou moins près la première impulsion, mais il est fort souvent le seul état possible de la machine, grâce à l'impéritie de l'inventeur. Ici il ne peut y avoir illusion, à moins que le charlatanisme ne soit de la partie; c'est-à-dire à moins que la machine ne recèle quelque pièce cachée, quelque principe moteur, tel qu'un mouvement de montre à ressort, et capable de vaincre à chaque instant les résistances nuisibles. Mais jamais la nature ne nous offre de moteurs dont l'action s'entretienne sans cesse ou ne s'épuise à la longue; aussi arrive-t-il toujours que la machine s'arrête d'elle-même, si elle n'est remontée comme le tournebroche, ou si la nature ne subvient pas à la dépense du travail occasionné par les résistances.

9. *Mouvement perpétuel dû aux piles électriques.* — Cependant, on voit en ce moment dans les divers passages couverts de Paris, lieux qui sont autant de bazars ou foires permanentes, des joujoux qui paraissent complète-

ment doués du mouvement perpétuel, et qui le sont en ce sens que le mouvement se prolonge pendant des années entières sans ralentissement apparent, et sans l'action de ressorts, de contre-poids ou d'autres agents aussi grossiers. Un balancier ou levier horizontal (fig. 231), terminé par deux boules en équilibre sur un pivot placé au milieu de leur intervalle, va et vient continuellement de manière que l'une des boules touche alternativement deux disques métalliques situés en face et de part et d'autre de cette boule. Or, ce jeu ne surprend que ceux qui ignorent les propriétés dont jouissent les piles électriques (*Leçons de Physique*). L'action de ces piles, quand elles se composent de certaines substances, est telle qu'elle se conserve dans toute son intensité pendant des années entières ; mais, comme elle n'est entretenue qu'aux dépens de l'altération des substances qui entrent dans les piles, il faut bien, quelle que soit la lenteur de cette altération, que l'action motrice qui sert à vaincre l'inertie des boules, la résistance du pivot et celle de l'air, finisse, un peu plus tôt un peu plus tard, par s'anéantir totalement.

On a cité le mécanisme qui précède, parce qu'il est le plus parfait et le plus ingénieux de tous ceux qui ont été inventés pour établir le soi-disant mouvement perpétuel : car presque tous les autres sont dus à des hommes tellement ignorants, et leur principe est si grossier, qu'à la première vue on peut deviner l'erreur mécanique à laquelle ils doivent leur existence. Nous n'aurions pas autant insisté sur ces réflexions, peu dignes de nous occuper, si malheureusement des artistes, d'ailleurs recommandables sous d'autres rapports, oubliant ce qu'ils doivent à leur famille, à la société, à eux-mêmes, ne se laissaient entraîner à la tentation de courir après ces chimères aujourd'hui flétries du nom de *pierre philosophale*, et rejetées ainsi parmi ces prétentions, moins ridicules peut-être, des alchimistes du bon vieux temps qui croyaient pouvoir faire de l'or avec les pierres ou les métaux. Nous laisserons désormais ces rêveries, dont il est des exemples dans presque toutes les sciences et tous les arts, pour étudier les lois véritables des machines industrielles.

10. *Complication de la question de l'établissement des machines.* — Si les machines sont composées de trois parties distinctes, *le moteur* ou *récepteur*, *l'opérateur*, ou *l'outil*, et *les communicateurs du mouvement*, elles ont aussi toutes un but général et commun. Celui qu'on se propose en établissant dans l'industrie une machine quelconque, c'est de confectionner une certaine quantité d'ouvrage au moindre prix possible, à qualité égale d'ailleurs des produits. On voit, d'après cela, que la condition de l'établissement des machines se complique d'un grand nombre d'éléments différents, tels que la valeur des produits confectionnés, la mise de fonds nécessaires pour la construction de la machine et de ses accessoires, tels que bâtiments, magasins, employés, etc., la durée de la machine, son entretien journalier, le prix du travail moteur, etc. Un industriel habile met en balance tous ces élé-

ments, et de plus il doit avoir égard aux chômages, aux pertes de temps inévitables, dont le plus grave inconvénient n'est pas seulement de rendre les capitaux improductifs pendant une portion plus ou moins grande de l'année, mais de compromettre l'existence de l'établissement par une suspension absolue de travail. Cette dernière considération fait qu'on renonce souvent à la machine la moins coûteuse dont l'action est intermittente, pour en choisir une qui marche régulièrement pendant toute l'année. Enfin, le prix de transport des produits, la facilité des débouchés, des communications, ajoutent encore à la complication de la question dans l'établissement. Or, de semblables questions sont particulièrement du domaine de la science qu'on nomme *Économie industrielle*, et ne peuvent faire l'objet d'un cours tel que le nôtre. Il nous suffira d'examiner la partie de la question qui concerne l'économie de la force motrice ou du travail, abstraction faite du prix en argent que coûte la machine.

Notre but à nous est de déterminer la disposition la plus convenable de toutes les parties, de façon que l'ouvrage ou le travail utile soit le plus grand possible pour une quantité donnée de travail dépensé par le moteur. Quoique le prix du travail ne soit pas la seule chose qui constitue le prix de l'ouvrage, il en est cependant le principal élément; et en le comparant à ce que coûtent les frais de premier établissement d'une machine et de ses accessoires, on trouve que ces frais ne sont qu'une fraction bien faible du prix du travail. Pour donner une idée du rapport de ce dernier avec le prix d'une machine, nous nous bornerons à vous rappeler que le travail de seize chevaux coûte 32 frs, par jour, ou 11520 frs. par an, laquelle somme correspond à un capital énorme, si on la compare avec la somme de 32000 frs. que coûte environ l'établissement.

Une autre raison milite en faveur de toute disposition susceptible de rendre le travail utile le plus grand possible, c'est que la machine devient plus durable, et, par conséquent, plus économique: car on ne remplit la condition du *maximum* de travail, qu'en régularisant les actions des forces; et de cette régularité d'action résultent le *minimum* de dépense et le *maximum* de durée pour la machine. Voilà pourquoi nous étudierons les moyens de rendre le travail un *maximum* et d'éviter toutes les causes qui peuvent être contraires à cette condition.

11. *Manière de procéder à l'établissement des machines.* — La première chose dont on s'occupe dans l'établissement mécanique d'une machine, c'est le choix de l'outil; ensuite on procède à celui du moteur ou récepteur; puis viennent les communicateurs du mouvement, qui ont pour objet de transmettre le travail du moteur à l'outil suivant des conditions déterminées d'après la nature particulière de ces derniers; ou qui règlent leur meilleur effet et rendent le rapport de $e \times f$ à $E \times F$ le plus grand possible.

La science des machines, ainsi envisagée, se compose donc de la *science*

des outils, de la *science des moteurs*, et de la *science des communicateurs* ou *modificateurs du mouvement ;* à quoi il convient d'ajouter la *science des constructions*, qui apprend à disposer, à régler les formes et les dimensions des diverses parties de la manière la plus solide, la plus durable, la plus économique et la plus propre à éviter les déperditions du travail moteur. On ne saurait entrer dans le détail de toutes ces questions qui, appliquées à une seule pièce, exigeraient déjà une discussion fort longue, et nous nous bornerons à l'essentiel, aux règles les plus généralement utiles.

Nous dirons peu de chose sur les outils, parce que leur nombre est immense, et que chaque espèce de fabrication en contient elle-même une grande variété. On a d'ailleurs peu écrit sur les outils, sur leurs bonnes qualités. Quelques-uns cependant sont d'un emploi général ; tels sont les pistons de pompe et autres qu'on ne manquera pas de vous faire connaître.

L'étude des récepteurs est tellement liée à celle des moteurs, qu'on ne saurait parler des uns sans traiter également des autres. Quant aux communicateurs du mouvement, leur nombre est considérable, et tous les jours il s'en découvre des combinaisons nouvelles. C'est une science à part, qu'on a envisagée à tort sous le point de vue géométrique. Mais ces combinaisons sont limitées quand on les considère sous le point de vue mécanique : aussi, nous établirons des règles à l'aide desquelles on distinguera les bons communicatenrs de ceux qui ne peuvent être utiles dans l'industrie. Or, il existe pour les machines deux cas de limites extrêmes : dans l'un, les machines ne sont soumises qu'à des actions très-faibles, et alors peu importe la nature de leurs communicateurs ; dans l'autre, au contraire, où elles sont très-puissantes, leurs communicateurs doivent être établis d'après les lois de la mécanique, et l'exposé de ces règles devient d'autant plus essentiel que ce sont les machines fortes qu'on emploie dans l'industrie.

En général, pour reconnaître une bonne machine d'une mauvaise, il faut examiner de quelle manière l'action se transmet du récepteur à l'opérateur. Cette transmission s'opère de proche en proche par une suite de pièces qui se poussent ou se tirent, et qui sont solidaires les unes des autres, c'est-à-dire telles qu'elles décriront respectivement et simultanément de certains chemins pour un certain chemin décrit par l'une d'elles. Aussi, quand on se donne la vitesse ou le chemin décrit par une pièce, rien n'est plus facile que de trouver combien les autres pièces se sont mues en même temps, en examinant sur un dessin leur disposition géométrique et mutuelle.

12. *Du mouvement des machines à partir du repos.* — Supposons une puissance motrice appliquée au récepteur d'une machine et une résistance appliquée à l'opérateur. Si la machine est d'abord au repos, il faut bien que, pour l'en faire sortir, le travail élémentaire du moteur l'emporte sur celui de la résistance. Le mouvement, de nul qu'il était, se produit et s'accélère tant que cette supériorité de travail de la puissance sur celui de la résistance

subsiste. Or, en même temps que la vitesse augmente, non seulement l'effort du moteur diminue, ainsi qu'on l'a vu (3_e partie, 5), mais encore certaines résistances deviennent croissantes. Par conséquent, pendant l'augmentation de la vitesse de la machine, le travail du moteur décroît, et ceux des résistances croissent de plus en plus. Il est donc impossible que la vitesse augmente indéfiniment, comme le ferait un corps grave qui, tombant dans le vide le long d'une hauteur indéfinie, acquerrait une vitesse de plus en plus grande. Mais, de même que ce corps, s'il se mouvait dans un milieu, atteindrait une vitesse finie et constante par suite de la résistance toujours croissante du milieu qui contrebalancerait bientôt l'action motrice de la gravité, de même dans une machine où nous venons de reconnaître que le moteur doit décroître en même temps que croissent les résistances, il arrive un moment où le mouvement cesse de s'accélérer, et où les puissances font équilibre aux diverses résistances. La vitesse ne peut donc plus alors s'accélérer. C'est une chose remarquable que cette uniformité du mouvement ne s'établisse parfaitement qu'au bout d'un temps infini.

A la vérité, le temps où cela a lieu sensiblement, est plus ou moins long, selon que les résistances sont plus ou moins fortes, parce que, dans le premier cas, le moteur arrive assez lentement à sa limite, et que, dans le second, le moteur y parvient beaucoup plus rapidement. Il est aisé, d'après cela, de reconnaître l'erreur grave qu'on commettrait, si, une minute après la levée de la vanne qui laisse arriver l'eau sur un moulin, on venait à considérer le mouvement comme déjà uniforme, et combien les observations qu'on en déduirait sur le travail de la meule seraient vicieuses. La démonstration relative au temps au bout duquel le mouvement devient uniforme, est développée aux n°s 250 et 251 de notre *Cours de Mécanique Industrielle* de la première année.

C'est ici le lieu d'indiquer le moyen pratique à l'aide duquel on mesure sur place la vitesse d'une machine, d'une roue par exemple, pourvu que son mouvement soit devenu uniforme. Il consiste à marquer avec de la craie un point sur la roue, à observer le nombre de fois que ce point se trouve en coïncidence avec un autre point fixe qui appartiendra à l'un des supports, pendant un certain temps, et à multiplier ce nombre de fois par la circonférence décrite par le point mobile. Le quotient de ce produit divisé par le nombre de secondes contenues dans le temps de l'observation, exprimera la vitesse cherchée pour le point en question de la roue. Je dis le point en question, car tous les points de cette dernière sont animés de vitesses différentes et proportionnelles à leur distance de l'axe de rotation.

13. *Nature des diverses actions qui se développent sur une machine.* — Examinons le rôle que jouent les différentes forces qui exercent leur action sur une machine en mouvement. Elles sont de six espèces :

1° La pesanteur ou le poids des différentes pièces;

2° Le moteur appliqué au récepteur et destiné à produire le travail;

3° La résistance utile opposée par l'outil;

4° Les résistances nuisibles, telles que les frottements, les forces d'adhérence, la résistance des milieux, celles des chaînes, des cordes, etc.;

5° La force d'inertie des pièces, véritable résistance quand le mouvement s'accélère, et véritable puissance quand le mouvement se ralentit;

6° Les actions moléculaires des corps qui proviennent de leur compression, de leur extension, ou de leur flexion pendant le mouvement, et dont l'effet, attendu l'élasticité imparfaite de ces corps, est d'y produire une certaine déformation qui nécessairement absorbe une portion quelconque du travail du moteur.

14. *Influence de la pesanteur.* — Si le centre de gravité d'un corps, ou du système de plusieurs corps, ne monte ni ne descend, ou reste à la même hauteur pendant toute la durée du mouvement qu'on considère, il n'y a aucun travail produit ou consommé par la pesanteur (2e partie, 50 et 51). C'est ce qui arrive pour une roue *centrée* dont le centre de gravité coïncide avec le centre de rotation, pour le treuil où le centre de gravité demeure toujours sur l'axe, et, en général, pour les machines dont toutes les parties consistent dans des pièces de rotation. Puisque alors le centre de gravité ne monte ni ne baisse, le chemin qu'il parcourt dans le sens vertical est nul, aussi bien que le travail de la pesanteur dont il n'y a pas lieu de tenir compte. A la vérité ces pièces portent sur des appuis, et y exercent des pressions d'où naissent des frottements; et c'est là toute l'influence du poids de ces pièces. Souvent encore, dans les machines, certaines pièces montent et baissent alternativement : tel est le jeu des pistons et de leurs tringles dans les pompes, et celui des *bielles* ou pièces qui, dans les machines à vapeur, lient le mouvement alternatif du balancier au mouvement de rotation des *volants*. Quoi qu'il en soit, quand ces pièces alternatives montent, ce ne peut être qu'aux dépens du moteur dont elles enlèvent une portion du travail, équivalente au produit de leur poids multiplié par la hauteur de leur course. Mais, comme elles ne peuvent s'élever indéfiniment, il est évident qu'à moins que le travail utile ne consiste dans l'élévation de fardeaux, elles finiront par descendre, et qu'alors leur travail, égal au précédent pendant cette course descendante, s'ajoutera ou sera restituée au travail du moteur. Si donc l'effet du poids de ces pièces a été tel que son travail, tantôt contraire et tantôt favorable à celui du moteur, a augmenté ou diminué tour à tour ce dernier de quantités égales, c'est comme si le travail de ces poids avait été nul. Ainsi, il ne faut pas s'occuper de l'action de la pesanteur à l'égard des pièces à mouvement alternatif. Les calculs sont, d'ailleurs, simplifiés par suite de cette légitime abstraction. Mais on se gardera de négliger la pression des corps pesants sur les appuis, parce que leurs poids y produisent des résistances nuisibles qu'on ne saurait omettre. C'est pour cette raison qu'on évitera de rendre les pièces trop lourdes.

15. *Influence du moteur et de la résistance utile de l'outil.* — On a dit précédemment (3e partie, 5) qu'il y avait, dans l'établissement des moteurs, des conditions qui rendaient leur effet le plus favorable, et que leur travail devenait un *maximum* pour une certaine vitesse donnée au récepteur. Ces considérations sont également applicables à l'outil ou l'opérateur.

16. *Influence des résistances nuisibles.* — Les frottements dont l'action est en tout état de choses contraire au mouvement, diminuent de plus en plus le travail du moteur à mesure que le mouvement s'accélère. Aussi, leur rôle est-il influent dans le déchet apporté au travail dépensé. Afin de diminuer l'effet de ces résistances nuisibles, il faut diminuer les deux facteurs du travail $R \times r$, dans lequel R représente l'intensité de toutes ces résistances combinées, et r le petit chemin élémentaire parcouru par le point d'application du frottement ou de R sur les surfaces frottantes. Le frottement le plus ordinaire d'une machine est celui d'un tourillon sur sa crapaudine (fig. 232), et la valeur R de sa résistance est proportionnelle (2e partie, 121) à la pression du tourillon contre sa crapaudine. Quant à r, c'est le petit arc élémentaire décrit par le contact de ces deux surfaces frottantes, et qui a pour rayon le rayon même du tourillon; le produit $R \times r$ exprime le travail que l'action de ce genre de frottement détruit sur la machine. Le facteur R est rendu plus faible soit en polissant soit en graissant les surfaces qui frottent, et on en réduit le chemin décrit r, en diminuant autant que possible le rayon du tourillon (2e partie, 122). On se rappellera d'ailleurs que l'étendue des surfaces frottantes n'influe en rien sur la valeur R de la résistance du frottement (2e partie, 107). Si la résistance provient du milieu dans lequel se meut la machine, il faut donner à ses parties les formes les plus avantageuses.

17. *Influence de l'inertie.* — L'inertie des pièces n'est mise en jeu que quand le mouvement varie. Si, dans certains instants, le travail des résistances surpasse celui des puissances, le mouvement se ralentit nécessairement; mais alors l'inertie *ajoute* son travail à celui des puissances pour maintenir le mouvement. Si, au contraire, le travail des puissances est supérieur à celui des résistances, l'inertie s'oppose à l'accélération du mouvement qui en résulte, et *diminue* de son travail celui des puissances. Donc, entre les instants où la vitesse de la machine, par suite d'un mouvement périodique, est redevenue la même, l'inertie n'a en réalité rien consommé du travail du moteur; son rôle est, par conséquent, le même que celui de la gravité, en sorte que, pendant cet intervalle, le travail des puissances égale le travail utile plus le travail des résistances nuisibles.

18. *Influence des réactions moléculaires.* — Les pièces d'une machine, quand elles sont mises en mouvement, se fléchissent, se tordent ou se compriment; en un mot elles éprouvent une déformation qui va même jusqu'à la rupture (et dans ce cas ce mouvement est interrompu), si leurs dimensions

sont insuffisantes. La considération de ces actions moléculaires est ici fort importante, parce que les corps ne sont jamais parfaitement élastiques, et qu'ils ne peuvent manquer d'être plus ou moins déformés. La quantité d'action qui se développe, et qui ne se restitue plus, est d'autant plus grande que la déformation est plus grande; si les forces sont discontinues, la déformation se répète aussi bien que l'action qui l'a produite, et elle diminue d'autant le travail dépensé par le moteur. C'est ainsi que les chocs sont une source de déperdition de travail; pendant leur durée il se produit entre les corps en contact des pressions énormes, d'où résultent des déformations, des pertes d'action que le défaut d'élasticité empêche de restituer. Il importe donc d'éviter les chocs dans les machines; et c'est à quoi on parvient, en traçant les parties qui se conduisent ou communiquent le mouvement, de façon qu'elles ne se quittent pas, que le mouvement s'opère par degrés insensibles et qu'il y ait le moins de jeu possible dans les articulations. En général, les chocs proviennent de l'excès de jeu qui fait que chaque pièce arrive contre sa consécutive avec une vitesse acquise, ou que les forces agissent tantôt dans un sens et tantôt dans l'autre. Nul doute que les parties poussantes ne doivent être tracées avec une rigueur géométrique et sans aucune discontinuité. Telle est la cause de la forme circulaire donnée au tourillon qui tourne dans sa crapaudine. S'il était carré, il se mouvrait autour de ses différents angles, et chaque côté, en s'appliquant sur la crapaudine, la choquerait brusquement. Une forme elliptique ne donnerait, il est vrai, lieu à aucune secousse; mais aussi le centre de gravité du tourillon, ou de la pièce dont il fait partie, serait alternativement le plus haut ou le plus bas possible, selon que le grand axe ou le petit axe de l'ellipse occuperait une situatiou verticale; et de ce changement de position du centre de gravité naîtraient des inégalités d'action qui sont toujours désavantageuses.

19. *Inconvénients du mouvement varié.*—Les pertes de travail précédentes ne se produisent pas seulement pendant les chocs; elles ont aussi lieu, quoique d'une manière moins sensible, lorsque les vitesses de la machine changent ou que son mouvement est varié. En effet, toute variation dans les vitesses en suppose une autre dans les efforts qui sollicitent la machine, et ceux-ci, de nuls qu'ils étaient, peuvent devenir très-grands, et *vice versâ*, et agir tantôt dans un sens, tantôt dans l'autre. L'altération, la fatigue que les pièces en éprouvent, leur occasionnent une certaine déformation qui ne saurait être sans une perte quelconque de travail. Si, d'ailleurs, la solidité exige que les pièces d'une machine reçoivent des dimensions proportionnées aux plus grands efforts qu'elles sont destinées à supporter, et que, par ce motif, les pièces d'une machine à mouvement varié soient plus lourdes que pour une machine à mouvement uniforme, n'est-il pas évident que la première aura sur la seconde le désavantage d'être soumise à plus de résistances nuisibles? Or, il est facile de prouver qu'à travail égal dans le

même temps, la machine dont le mouvement est varié sera soumise à des efforts plus considérables que celle qui serait douée d'un mouvement uniforme.

En effet, de ce que le travail est supposé égal de part et d'autre, l'effort constant qui régit cette dernière doit être regardé comme égal à l'effort moyen parmi tous ceux qui s'exercent sur l'autre. Ainsi, le travail de la machine à mouvement varié sera exprimé par l'aire ABDOC (fig. 233) d'une courbe COD, dont les abscisses représentent les chemins successivement décrits par les efforts, et dont les coordonnées sont proportionnelles à ces efforts variables. Quant au travail équivalent de la machine à mouvement uniforme, sa représentation sera donnée par l'aire du rectangle ABFE, dont la base AB est le chemin total parcouru pendant l'intervalle commun qu'on considère dans les deux machines, et dont la hauteur AE est proportionnelle à l'effort moyen dont il s'agit. Maintenant, on conçoit que le rectangle ABFE ne saurait équivaloir à l'aire courbe ABDOC, à moins que les coordonnées de la courbe COD ne fussent tantôt plus petites et tantôt plus grandes que la hauteur AE du rectangle. D'où nous conclurons que, pour le même travail produit dans un temps donné, soit par une machine à mouvement uniforme, soit par une machine dont le mouvement est varié, cette dernière sera soumise à des efforts plus grands que la première, et que, par conséquent, ses pièces auront besoin de dimensions plus fortes pour assurer sa solidité. Mais, comme on l'a déjà dit, si les pièces de la machine à mouvement varié fatiguent davantage, si elles exigent plus de dimensions, elles deviennent plus pesantes, et donnent lieu à plus de frottement, à plus de résistances passives. Il est donc de la plus haute importance de faire en sorte que le mouvement de toute machine soit rendu le plus uniforme possible.

20. *Moyen de rendre le mouvement uniforme.* — Si tel est l'avantage du mouvement uniforme, comment l'obtenir dans les machines? il n'y a qu'un seul moyen d'y parvenir, c'est de n'employer pour toutes les pièces dont elles se composent que des roues armées de dents, ou se communiquant le mouvement à l'aide de courroies. Encore faut-il qu'elles marchent uniformément, et qu'elles soient bien centrées pour que leur centre de gravité ne monte ni ne baisse pendant leurs diverses révolutions. Cette symétrie des roues par rapport à leur axe est d'ailleurs avantageuse, en ce que les forces centrifuges, qui tendent du dehors au dedans à entraîner du centre de rotation dans les diverses parties de chaque roue, s'entre-détruisent et ne produisent sur l'axe aucune espèce de pression. On a dit que le mouvement circulaire des roues était le seul qui pût être rendu uniforme; car le mouvement rectiligne lui-même ne saurait se continuer indéfiniment, et si la pièce soumise à ce dernier mouvement doit revenir sur elle-même, ce mouvement, au lieu d'être uniforme, devient alternatif.

21. *Cas principaux de l'irrégularité du mouvement ; moyen de le corriger.* — On distingue trois causes principales du mouvement variable des machines, savoir : l'irrégularité d'action du moteur, celle de la résistance utile, et celle du moteur et de la résistance utile à la fois.

Si l'outil ou le récepteur doit avoir le mouvement alternatif, on le changera en mouvement circulaire ou de rotation par un des moyens que nous ferons bientôt connaître. Si l'un et l'autre possèdent le mouvement alternatif, on examinera s'il ne convient pas de choisir des pièces douées d'un mouvement de cette nature, et de façon qu'il s'accorde avec ceux de l'opérateur et du récepteur. Par exemple, lorsqu'une machine à vapeur est destinée à faire mouvoir une pompe à eau, il est ordinairement possible de faire coïncider leurs alternatives. Si cette coïncidence était impossible, il faudrait alors transformer chaque mouvement alternatif en un mouvement circulaire. On a donc toujours le moyen de discerner les cas où les divers modes de mouvement sont nécessaires; et quoique aucun de ces modes ne puisse faire parvenir à une uniformité parfaite, on doit donner la préférence à ceux qui permettent la transformation avec douceur, et mettre de côté tous ceux qui agissent par secousses. Enfin, il se peut aussi que dans certaines machines où toutes les pièces sont des roues susceptibles de se mouvoir uniformément, le moteur ou la résistance utile n'agisse pas d'une manière constante. Ainsi, lors même qu'une machine à scier du bois serait munie d'une scie circulaire marchant toujours dans le même sens, les nœuds de la pièce à débiter seront autant de causes qui feront encore varier la résistance. Quelquefois le travail se compose d'effets distincts et séparés, comme, par exemple, celui qui a pour objet la trituration de la poudre, et où il n'est pas possible que le pilon agisse continuellement. Quoiqu'il en soit, si les pièces sont alternatives, on régularise leur effet, soit par des contre-poids, soit par d'autres moyens. Si la résistance se compose d'une suite de chocs, il faudrá les distribuer à des intervalles égaux. Enfin, si le moteur ou la résistance est susceptible de varier, on évitera que ces variations s'étendent à des limites trop étendues, et c'est l'objet des *régulateurs* ou *modérateurs*.

Le contre-poids qui sert de *moteur* à un tournebroche descendrait avec trop de rapidité et accélérerait le mouvement de toutes les autres pièces, si le *volant à ailettes*, par suite de l'accélération de sa vitesse, n'éprouvait de la part de l'air une résistance assez puissante pour contre-balancer l'action du contre-poids, et le forcer à prendre un mouvement uniforme. Ce volant fait ici fonction de *régulateur*.

Il en est de même des *soupapes de sûreté*, qui se lèvent dès que l'action de la vapeur excède une limite supérieure à celle qui est voulue pour la machine, ou les *régulateurs à force centrifuge*, qui diminuent l'introduction de la vapeur quand le mouvement est devenu trop rapide.

Le *babillard* des moulins qui sert à distribuer le grain à la meule, en fait

tomber une quantité plus grande dès que la machine s'accélère, et augmente ainsi la résistance au fur et à mesure que l'action du moteur est devenue plus puissante.

Le *pied de biche* dans les scieries est disposé de telle sorte qu'il ne fait avancer la pièce à débiter que de $\frac{1}{2}$ ou $\frac{1}{4}$ de ligne, selon la moins ou plus grande épaisseur de cette pièce.

Enfin, une dernière ressource reste encore ; c'est le volant, consistant en un grand anneau de fonte doué d'une grande vitesse rotative, véritable *réservoir* de travail, dont l'inertie tend à régulariser le mouvement de toute la machine. La propriété de toute pièce qui tourne avec une grande force vive est en effet d'entraîner la machine ou de la forcer à continuer son mouvement, dès que le moteur commence à ralentir son action, et de s'opposer à son accélération dès que le moteur acquiert de la prépondérance sur toutes les autres résistances. Nous développerons avec détail l'établissement d'un volant appliqué au système d'une manivelle qui reçoit, à l'aide d'une bielle ou tige verticale, le mouvement imprimé à des pédales mécaniques. Cet appareil est analogue à celui du *tour à filer*, où le pied de la fileuse fait fonction de la puissance, et la roue fonction du volant. On verra que, dans ce système, il est possible de calculer le poids du volant, de façon que la vitesse ne varie que de $\frac{1}{30}$.

22. *Objet et division de cette troisième partie.*—Dans ce qui va suivre, nous nous occuperons successivement : 1° des communicateurs ou des moyens de transmettre le mouvement ; 2° des régulateurs et modérateurs ; 3° du tracé des pièces pour satisfaire à l'uniformité du mouvement ; 4° des *modificateurs* ou moyens de suspendre ou changer la nature du mouvement ; 5° des supports et de ce qui concerne la solidité des machines : après cela nous passerons à la théorie des moteurs, ce qui exigera qu'au préalable nous expliquions les lois de l'hydraulique.

III.

DES COMMUNICATEURS DU MOUVEMENT.

23. *Séries des machines simples d'après le mouvement qu'elles reçoivent et transmettent.* — Dans la description des communicateurs du mouvement des machines, nous laisserons en dehors les récepteurs et les opérateurs, parce que les premiers sont liés à ce qui concerne les moteurs, et que les autres sont en trop grand nombre. L'illustre Monge, le fondateur de notre mère école, de l'école polytechnique, a eu, le premier, l'idée de classer les machines simples ou élémentaires, par séries relatives à la nature du mouvement qu'elles reçoivent et transmettent. MM. Lanz et Bétancourt ont ensuite exécuté cette classification dans l'ouvrage intitulé *Essai sur la composition*

des machines. Malheureusement, cet ouvrage est aujourd'hui en arrière des progrès qu'a reçus la science des machines ; beaucoup de combinaisons excellentes n'y sont pas, et un grand nombre de celles qui s'y trouvent sont défectueuses. Cette classification, faite par eux d'après des considérations géométriques, est dénuée de la discussion nécessaire. Nous allons donner une idée du système de classification imaginé par Monge, puis nous passerons en revue les communicateurs les plus importants et reconnus tels d'après les principes précédents.

On a vu que le mouvement des machines simples peut être ramené à deux espèces principales, le mouvement *continu*, et le mouvement *discontinu alternatif* ou de *va-et-vient*. Il peut, de plus, se faire en ligne droite, ou suivant un cercle; c'est-à-dire qu'il peut être *rectiligne*, ou *circulaire*, de *rotation* autour d'un point, d'un axe, et il est très-rare qu'on ait besoin de s'occuper de mouvements qui s'effectuent suivant des lignes plus compliquées que le cercle et la droite. Voilà donc quatre espèces de mouvement qui, prises deux à deux, ou combinées avec elles-mêmes, donnent dix à quinze combinaisons principales. C'est ainsi que le mouvement *rectiligne continu* est susceptible de se transformer en *rectiligne* ou *circulaire* soit continu, soit alternatif, etc. MM. Lanz et Bétancourt ont dressé des tableaux où se trouvent décrites les solutions connues de ces transformations du mouvement. Mais il faut remarquer que plusieurs d'entre elles ne sont applicables qu'aux récepteurs ou moteurs, et aux opérateurs ou outils, de sorte que, si on supprime du tableau ces transformations, et si on rejette toutes les combinaisons qui sont défectueuses sous le rapport mécanique, ainsi que les mécanismes qui font seulement fonction de *régulateurs* ou de modificateurs instantanés du mouvement, il restera très-peu de transformations possibles intermédiaires entre le mouvement du récepteur et celui de l'opérateur. Aussi, n'aurons-nous guère à considérer que la transformation du mouvement rectiligne ou circulaire continu en mouvement rectiligne ou circulaire discontinu, transformation qui s'opère au moyen de roues armées de dents ou de courroies, ou par la vis avec son écrou, et que celle du mouvement circulaire continu en mouvements alternatifs, soit rectiligne soit circulaire, qui s'opère avec des manivelles à bielles ou excentriques et avec les balanciers, etc.

24. *Mouvement rectiligne continu en rectiligne continu.* — La plus simple des transformations du mouvement est celle du mouvement rectiligne continu en un autre mouvement rectiligne continu, dirigé, ou non, dans le même plan. Parmi les divers moyens employés pour cet objet, la poulie nous offre le moyen le plus généralement usité et le plus commode. On nomme ainsi une roue pleine (fig. 234), terminée en gorge à sa circonférence, et bombée à ses surfaces latérales afin qu'elle ne frotte pas trop contre les chapes qui la supportent. Tantôt l'axe de la poulie lui est fixé invariablement (*projection*

A), et cet axe est terminé carrément par un contre-fort à quatre branches enchâssées dans la poulie au moyen de quatre vis. Tantôt l'axe est fixé aux chapes, et la poulie est percée d'un œil, lequel est entouré (*projection* B) d'une virole en cuivre armée de trois oreilles également enchâssées chacune dans la poulie à l'aide de trois vis.

Supposez maintenant une pareille poulie suspendue par sa chape, et dont la gorge reçoive une corde (fig. 235); il est évident que pendant que l'une des branches de la corde marche dans une direction, l'autre branche marchera dans une direction différente; ce qui donne lieu à la transformation de mouvement dont il est question, mais seulement pour le cas où les deux droites du mouvement sont dans un même plan.

Le même but est rempli par des tambours armés de bras qui relient à un *moyeu* commun (fig. 236), ses jantes bombées extérieurement et sur lesquelles passe une lanière ou courroie. Cette convexité a pour objet d'empêcher la lanière de s'échapper quand elle prend une déviation oblique. Si la surface était concave, les arêtes saillantes de la concavité ne manqueraient pas d'attirer entièrement la lanière, pour peu que celle-ci touchât, et de la détacher du tambour.

Quelquefois les poulies ou les tambours sont conduits avec des chaînes, et celles-ci, quand elles sont flexibles, produisent le même effet que les cordes ou les lanières; mais le plus souvent il en résulterait des soubresauts, des frottements qui, pour être évités, exigent des dispositions particulières.

Une chaîne est ordinairement formée d'anneaux oblongs, plats, d'une petite longueur et perpendiculaires les uns aux autres (fig. 237); une rainure, pratiquée dans le milieu de la gorge de la poulie ou du tambour, est destinée à loger les maillons qui se présentent perpendiculairement à cette gorge; les longues branches des autres s'appliquent à plat sur les bords de cette dernière. Si on pouvait craindre que la chaîne ne vînt à tomber, on pourrait placer latéralement des oreilles, telles qu'elles sont ponctuées sur la figure; mais cette précaution paraît être inutile.

Au lieu de ces chaînes ordinaires, on fait aussi usage de chaînes plates (fig. 238); et dans ce cas il n'est plus nécessaire de pratiquer une rainure dans la gorge de la poulie. Ce sont des plaques *m* qui se placent de champ sur la poulie, et qui, percées de deux trous, permettent qu'on les relie par des anneaux évidés *n* qui font fonction de boulons tourillons.

Enfin, on a encore les *chaînes anglaises*. Elles se composent de plaques *pp* (fig. 239), percées de trous au centre de chaque portion demi-circulaire qui les termine à chaque bout. La distance des centres de ces demi-cercles est un peu plus grande que le double de leur rayon. D'après cette forme, il est possible de les relier par des plaques semblables rangées sur l'un et l'autre côté des premières, au moyen de boulons qui traversent les trous circulaires des unes et des autres. Le jeu des plaques est évidemment égal à

l'excès de la distance des trous d'une même plaque sur le double du rayon des portions circulaires qui forment leurs extrémités.

Parmi ces trois espèces de chaînes, on doit accorder la préférence à celle qui absorbe le moins de travail nuisible par suite du ploiement sur la poulie, de chaque chaînon derrière celui qui vient de s'y poser. Or, il faut remarquer que, dans les deux derniers systèmes, tous les chaînons sont sur une même ligne droite, tant qu'ils ne sont pas enroulés sur la poulie; et que, lorsqu'ils y sont posés, ils forment entre eux un angle qui dépend de la distance de leurs articulations consécutives. Cet angle étant aussi celui que décrit chacune de ces articulations autour de son boulon, absolument d'une manière analogue à ce qui a lieu pour un tourillon à l'égard de sa crapaudine, il est évident que le travail du frottement qui s'exerce entre deux chaînons, et dont le chemin parcouru par son point d'application est proportionnel à l'angle dont nous venons de parler, sera en général d'autant plus grand que ces articulations seront plus éloignées entre elles; ce frottement sera d'ailleurs de la première espèce (2e partie, 121) et proportionnel à la tension exercée à l'extrémité des chaînes.

Quant au premier système des chaînes ordinaires, il est possible qu'il ne s'y produise aucun frottement sensible. Il faut pour cela se rappeler (d'après le n° déjà cité) que le frottement ne devient de première espèce ou de glissement pour un tourillon, que quand celui-ci est parvenu sur sa crapaudine à la position où l'inclinaison de la tangente à ce tourillon avec la direction de la pression, est mesurée par le rapport f du frottement à cette pression. Tant que le tourillon n'est pas encore arrivé à cette position, il n'y a que frottement de deuxième espèce ou de roulement. Si donc nous considérons un maillon qui, en tournant sur son consécutif, est absolument dans le même cas que le tourillon par rapport à sa crapaudine, et si l'angle de deux maillons consécutifs est assez petit pour que leur point de contact n'atteigne pas la limite ou le frottement de première espèce commence, on doit concevoir comment il est possible qu'il n'y ait que simple roulement pendant toute la durée du ploiement d'un chaînon. Ainsi, avec des dimensions convenablement réduites, on rendra le premier système, qui lui-même est très-simple, beaucoup plus avantageux que les deux autres.

Si nous nous reportons au système des lanières, nous ferons observer que quand elles sont placées sur de larges tambours (fig. 240), ceux-ci sont à claire-voie, ou composés de liteaux encastrés dans deux plateaux circulaires formant les bases d'un cylindre parallèle à l'axe de rotation. Ces mêmes tambours sont pleins ou d'une seule pièce massive s'ils sont de faible dimension. Tous ces exemples ne sont encore relatifs qu'aux cas où les directions des deux mouvements rectilignes continus sont dans un même plan.

Examinons maintenant ce qui arrive quand les directions sont quelconques ou dans des plans différents. Il faudra alors employer, au moins, deux pou-

lies, contenues chacune dans un plan quelconque passant par chaque droite (fig. 241), et qu'elles soient disposées de telle sorte que la portion de la corde qui touche les deux poulies se confonde avec l'intersection de ces deux plans.

Soient AB et CD (fig. 242) les deux droites quelconques dans l'espace suivant lesquelles on veut que le mouvement rectiligne se transforme. On prendra sur ces droites deux points E et F près des positions où les poulies doivent se trouver, et on les joindra par une droite EF. Imaginez dans le plan BEF et dans le plan EFD deux cercles, l'un tangent à AB et à EF, l'autre à CD et à EF ; le problème sera résolu. Ce genre de transformation est fort utile dans les circonstances où il faut communiquer le mouvement rectiligne continu à des grandes distances, et lorsqu'il y a des obstacles qui forcent à briser la direction des routes. Tel est le cas où il s'agit de communiquer le mouvement d'une extrémité à l'autre d'un bâtiment en suivant de sinuosités.

On a proposé d'autres moyens pour résoudre la question qui nous occupe, mais la plupart sont défectueux ou compliqués. Je vais en indiquer un des plus simples, et montrer combien son emploi dans les machines peut être nuisible.

Soit un coin A (fig. 243) qui peut glisser suivant sa longueur entre quatre piliers *cd*, *ef*, tandis qu'un autre coin B est arrêté par des goupilles, ou ce qui vaut mieux, afin de diminuer les frottements, par les rouleaux *k*, *g*, *h*, *i*, fixés dans le même coin et qui touchent les piliers : il est clair que si l'on pousse le coin A de *f* vers *d*, la ligne *mn* du coin s'élèvera en conservant son parallélisme. Les frottements sont ici énormes et multipliés, comme on peut s'en assurer en remontant à ce qui a été dit du coin (2e partie, 114 et 116). Un pareil système, bon pour tracer des parallèles *mn*, *m'n'*, ne vaut rien pour transmettre l'action des forces. Les presses à coin offrent un exemple de la transformation actuelle du mouvement ; mais c'est un outil, et l'action y est intermittente, ou ne s'exerce que par chocs, que par intervalles.

On a encore eu recours pour le même objet au système de deux règles *ab* et *cd* (fig. 244), jointes par des droites égales à charnière qui forment un parallélogramme, l'une *cd* étant fixe, l'autre *ab* se meut parallèlement à elle-même. Ce système est adopté dans certaines machines où le mouvement n'est pas permanent ; et il sert de guide aux pièces de bois qu'on doit présenter parallèlement à elles-mêmes à l'action d'une scie circulaire ; ce parallélogramme est plus ou moins oblique selon que la pièce à débiter a plus ou moins d'épaisseur, il est alors maintenu au moyen de clefs, valets ou sergents.

Le meilleur moyen de conduire un corps dans une direction rectiligne continue, ou parallèlement à lui-même, c'est de le poser sur un chariot armé de roulettes en fer ou en cuivre avec gorges et roulant sur des chemins

ou languettes saillantes de fer. Cette disposition existe dans les *mull-jennys* afin de maintenir dans une direction invariable le mouvement du chariot qui porte toutes les bobines.

Pour de grands chariots destinés à transporter des matériaux sur des chemins de fer, le parallélisme du mouvement n'est pas aussi rigoureux, et on supprime l'oreille intérieure des jantes du chariot (fig. 245). Enfin, on pratique quelquefois latéralement au chariot des languettes saillantes très-droites et bien dressées qu'on fait glisser dans des feuillures en cuivre (fig. 246); c'est ainsi qu'on guide les mouvements soit du châssis de la scie, soit du chariot porte-pièces dans les scieries.

25. *Mouvement rectiligne continu en mouvement circulaire continu, et* vice versâ. — Après la transformation précédente, nous arriverons tout naturellement à celle qui a pour objet de changer le mouvement rectiligne continu en mouvement circulaire continu, et réciproquement.

1° Le treuil donne déjà la double solution de cette question. On voit qu'il consiste dans un arbre appuyé sur des tourillons (fig. 247) et tournant autour de son axe à l'aide d'une manivelle ou d'une roue. Supposons maintenant une corde supportant un poids et enroulée à plusieurs reprises soit autour de l'arbre, soit autour de la roue.

Dans le premier cas, si on imprime un mouvement circulaire à la manivelle, le poids s'élèvera selon la verticale, et il offrira l'exemple d'un mouvement circulaire continu transformé en un mouvement rectiligne continu. Dans le second cas, au contraire, où le poids suspendu à la couronne est abandonné à sa propre action, il descendra verticalement et fera tourner le système du treuil; en un mot le mouvement rectiligne continu du poids sera transformé en un mouvement circulaire continu. Les vitesses de ces deux mouvements simultanés seront évidemment proportionnelles au rayon de l'arbre du treuil et à celui de la manivelle ou de la couronne.

Si le mouvement est transmis avec des chaînes, l'arbre est creusé en trécilicoïdes dont les intervalles contiennent des gorges destinées à recevoir tous les chaînons successifs. Les spires ont des pas assez faibles pour que, d'un tour à l'autre, les portions de chaîne enroulées se trouvent toujours très-rapprochées entre elles. Enfin, dans le cas où les chaînons sont alternativement perpendiculaires ou parallèles à l'arbre, ce dernier prend la forme d'une vis à filets carrés; les premiers s'y posent de champ et les autres sur leur plat. Ce système a été employé dans les grues anglaises des ateliers de Charenton.

Il existe une espèce de treuil dont la composition satisfait à la condition que la vitesse d'ascension du fardeau soit aussi petite que possible par rapport à la vitesse de la roue qui fait mouvoir le treuil. Cette invention, qui paraît venir de la Chine, consiste à composer l'arbre du treuil de deux parties ayant deux diamètres différents (fig. 248). On fixe au fardeau une poulie de renvoi,

et les deux extrémités de la corde passant dans cette poulie sont attachées en sens contraire sur chacune des parties du treuil, de manière que le but fixé sur la partie du plus gros diamètre s'enroule, tandis que l'autre se déroule. On voit alors, qu'à chaque tour du treuil, le fardeau monte d'une quantité égale à la moitié de la différence entre les circonférences de ses deux parties. Or, le travail de la puissance, en nommant P son intensité et C la circonférence que décrit dans un tour la manivelle à laquelle elle est appliquée, se mesure dans un tour entier par le produit $P \times C$; et si l'on nomme Q la résistance du fardeau, R et R′ les rayons des deux parties du treuil, $Q \times \frac{2\pi R - 2\pi R'}{2}$ sera le travail de la résistance du fardeau dans un tour entier. D'où on tire, abstraction faite des résistances passives,

$$P \times C = Q\,(\pi R - \pi R').$$

On voit qu'à égalité de travail de la puissance, plus $\pi R - \pi R'$, ou enfin la différence de rayons, sera petite, plus Q, ou le poids du fardeau, deviendra énorme, de sorte que avec un semblable appareil on sera sûr de pouvoir vaincre les plus fortes résistances sans avoir besoin de changer le travail de la puissance.

2° Une seconde solution s'obtient au moyen d'une roue A (fig. 249) qui conduit une barre ou tige BC glissant entre des guides fixes *aa*, *bb*, ou entre des roulettes *cc*, *dd* et *e*, disposées à rainures et languettes, comme cela a été expliqué ci-dessus pour les chariots. On peut fixer d'abord en C sur la tige et en C′ sur la roue les bouts d'une lanière CTC′, à l'aide de laquelle, la roue en tournant dans un sens convenable soulèvera la tige. Si l'on place, en outre, deux lanières BTB′ en sens contraire, de manière à ménager entre elles un intervalle pour le jeu de la première, on pourra opérer le mouvement de la tige de haut en bas, en faisant marcher la roue selon une direction opposée à celle qui avait eu lieu lors de l'ascension de la barre. Ces lanières pourraient être remplacées par des chaînes anglaises, construites comme il a été dit au n° 24.

Quelquefois aussi on arme la roue de dents qui engrènent dans une chaîne sans fin, tangente à cette roue (fig. 250). Mais cette disposition est vicieuse, parce qu'il y a beaucoup de frottement, d'inégalités, et que la chaîne éprouve des oscillations qui tendent à la désengrener; les chaînes doivent être faites avec beaucoup de soin et d'égalité dans les maillons.

3° La disposition la plus convenable pour les machines puissantes, c'est d'armer la tige de dents, ainsi que la roue; cette tige prend alors le nom de crémaillère (fig. 251); on donnera plus loin le tracé de ces dents.

4° L'écrou et la vis (fig. 252) seront encore un exemple de la transformation du mouvement circulaire continu en rectiligne continu. Tantôt c'est la vis qui tourne sur elle-même, et l'écrou qui, ne pouvant suivre ce mouvement de rotation, chemine en ligne droite dans la direction de l'axe de la

vis. Tantôt c'est l'écrou qui tourne et la vis qui monte ou baisse ; nous avons traité de cette machine en détail aux n°s 136 — 141 de la 2e partie. Ce système présente un frottement énorme qui doit le faire rejeter toutes les fois qu'il ne s'agit pas de guider des outils ou de presser des matières (Voyez à cet égard les divers paragraphes déjà indiqués dans la 2e partie).

M. de Prony a trouvé une manière de transformer le mouvement circulaire en un autre rectiligne dont la vitesse soit aussi petite qu'on voudra. AB (fig. 253) est un axe divisé en trois parties *ab*, *cd*, *ef*; les deux vis *ab* et *ef* ont même pas et traversent deux supports fixes C, D, où il y a deux écrous; cet axe se meut horizontalement et parcourt dans le sens FE à chaque tour un espace H égal au pas de ces deux vis. *cd* forme une autre vis dont le pas H′ est plus grand que celui des deux premières, et qui s'introduit dans un écrou M, lequel ne peut que glisser sur la semelle EF. Ce dernier parcourrait de E vers F le pas H′ de sa vis dans un tour, si cette vis ne faisait que tourner sur elle-même ; mais comme en même temps elle chemine de F en E de la quantité H, il est évident que l'écrou M participe aussi à ce dernier mouvement, et qu'ainsi il ne cheminera, pendant une révolution, que de la différence H′— H, différence qui pourra être rendue aussi petite que possible, sans que les pas soient réduits outre mesure. Cet appareil est utile, soit pour guider les couteaux à tracer dont les mouvements doivent être fort lents, soit encore pour manœuvrer le fil *réticule* des lunettes qui ne se déplace que de quantités fort petites. Les vis qu'on nomme *micrométriques* sont construites de la sorte.

26. *Transformation du mouvement circulaire continu en un autre mouvement circulaire continu.* — Pour changer un mouvement circulaire continu en un autre mouvement circulaire continu, il suffit d'envelopper d'une courroie sans fin les couronnes montées sur chaque axe de mouvement. Mais il faut éviter que la courroie ne glisse sur les surfaces des couronnes, car son glissement l'empêcherait de transmettre le mouvement. Plus les arcs enveloppés sur les tambours sont considérables, plus le frottement est grand et moins le glissement est à craindre. Dans ce cas, on a soin que la courroie (fig. 254) enveloppe extérieurement les deux tambours. Mais si les rayons de ceux-ci sont petits (fig. 255), on croise les courroies, disposition qui, en outre, a l'avantage de changer la direction du mouvement. Veut-on encore se garantir mieux des effets du glissement? on fera faire plusieurs tours à la courroie autour des tambours, ainsi qu'on en agit pour l'archet du tourneur (fig. 256). Ce qui recommande surtout l'emploi de la courroie, c'est qu'elle peut transmettre le mouvement de rotation dans quelque direction que ce soit.

Pour augmenter la pression, et par suite le frottement des courroies, on peut tirer en arrière, au moyen d'une vis de rappel, l'axe de l'un des tambours; mais ce procédé est évidemment vicieux ; ou bien encore on a re-

cours au rouleau de tension (fig. 257), lequel, suspendu à un point fixe, presse sur la courroie, soit à l'aide d'un contre-poids, soit quand il a été tiré de haut en bas par l'intermédiaire d'une corde qu'on enroule autour d'un petit treuil à bras. Malheureusement, toutes ces corrections augmentent les frottements sur les appuis, ou les résistances nuisibles.

Le moyen le plus simple consiste à communiquer le mouvement par des couronnes juxtaposées, et, si la puissance est faible, d'entourer leurs surfaces de bandes de *cuir de buffle* qui s'engrènent réciproquement. Un tel système est principalement applicable dans les tire-sacs des moulins, où les mouvements s'opèrent avec beaucoup de douceur.

Dans les circonstances où les machines sont puissantes, ainsi que cela arrive pour la plupart de celles de l'industrie, on a recours aux engrenages pour transmettre le mouvement circulaire continu d'une couronne à l'autre. On distingue trois cas principaux : 1° Celui où les axes des couronnes sont parallèles; 2° celui où ils sont situés dans le même plan, en faisant entre eux un certain angle; 3° celui où leurs directions sont quelconques dans l'espace, et ne se rencontrent pas. Dans le premier cas, les couronnes ont la forme d'un cylindre parallèle à la direction des axes (fig. 258); quant à la forme des dents, nous y reviendrons plus tard. Dans le deuxième cas, les roues ne peuvent être cylindriques, parce que les arêtes de leurs bases s'opposeraient au mouvement. Mais, si on leur donne une forme conique dont le sommet commun se confonde avec l'intersection S (fig. 259) des deux axes SA et SB, ces roues deviennent très-propres à se transmettre le mouvement. Les couronnes cylindriques sont terminées par des plans perpendiculaires à leur axe; mais il ne saurait en être de même à l'égard des couronnes coniques, on les termine extérieurement par d'autres cônes limites qui ont une arête commune AB, perpendiculaire à l'arête de contact ST des couronnes. Intérieurement elles sont terminées par des cônes parallèles à ceux qui les limitent extérieurement, de sorte que ces couronnes ont la forme dessinée (fig. 260).

Enfin, 3e cas, si les axes ne se rencontrent pas, on sera obligé d'avoir recours à trois roues coniques. AB et CD (fig. 261) étant les directions données de ces axes, on tracera une droite EF s'appuyant sur tous deux à la fois, et on la prendra pour axe d'une roue doublement conique a, intermédiaire entre les roues b et c, dont les droites données représentent les axes : les positions de ces roues sont d'ailleurs fixées par les conditions du problème. On s'est proposé d'effectuer directement la transformation pour ce troisième cas, mais les méthodes présentées relativement à cet objet sont trop compliquées et par conséquent défectueuses.

Il reste une dernière question à résoudre sur les roues d'engrenage : c'est de transmettre le mouvement dans un rapport donné. Deux roues de rayons égaux qui se conduisent par contact simple, tournent avec la même vitesse

angulaire, parce que les arcs développés simultanément à leurs circonférences respectives sont égaux et mesurent des angles au centre égaux, angles qui indiquent de combien les roues tournent ensemble. Si les rayons sont inégaux, je dis que les vitesses de rotation des deux circonférences juxtaposées seront en raison inverse de ces rayons, ou que la circonférence *a* (fig. 262) fera deux ou trois tours pour un tour de la circonférence *b*, selon que le rayon de la première sera $\frac{1}{2}$ ou $\frac{1}{3}$ du rayon de la seconde. Car les roues, en se développant l'une sur l'autre, ont à la circonférence de leurs couronnes des vitesses absolues qui sont les mêmes de part et d'autre. Nommant R le rayon CT de la circonférence *a*, et v_1 sa vitesse angulaire à l'unité de distance (2e partie, 60), Rv_1 sera la vitesse mesurée à sa circonférence. De même, si nous appelons R′ et v_1' le rayon CT et la vitesse angulaire de la roue *b*, $R'v_1'$ sera la vitesse de sa circonférence, et on aura

$$Rv_1 = R'v_1', \text{ ou la proportion } R : R' :: v_1' : v_1.$$

Si donc on a la position et la distance CC′ des deux centres des couronnes, et qu'on partage cet intervalle en parties réciproquement proportionnelles aux vitesses angulaires ou aux nombres de tours de ces couronnes, ces parties obtenues CT et C′T seront les rayons de ce qu'on nomme les *circonférences primitives* du mouvement.

Quand les roues sont coniques, la même relation a lieu à l'égard de leurs cercles qui se touchent en un même point de l'arête de contact. Ordinairement on considère les cercles CT et C′T (fig. 263), milieux respectifs des couronnes; et comme les cônes doivent avoir même sommet pour rouler par contact, il est aisé de déterminer les angles au sommet de ces mêmes cônes, lorsqu'ils sont assujettis à tourner avec des vitesses qui soient dans un rapport donné, et lorsqu'on se donne les positions de leurs axes. En effet, les perpendiculaires TC et TC′ à ces axes, qui sont les rayons moyens des roues, doivent être dans le rapport assigné; traçant les parallèles *mm′* et *nn′* aux axes donnés SC et SC′, et distantes de ces dernières de quantités égales aux perpendiculaires TC et TC′, ces parallèles se couperont en T, qui sera le contact milieu des couronnes; ce qui donnera en même temps l'arête ST commune aux deux cônes primitifs.

27. *Autres exemples de transformation du mouvement circulaire continu en circulaire continu.*—Le *joint universel* ou *brisé* est une pièce qui réunit deux axes quelconques, de manière que l'un transmette à l'autre le mouvement de rotation qui lui est imprimé. A et B sont les deux axes du mouvement et portent chacun une mâchoire D, tournant sur deux boulons opposés *bb* d'un croisillon C. Les figures 264, 265, 266, 267 représentent le joint brisé; la première en fait voir la perspective, et les trois autres les diverses projections des mâchoires ainsi que du croisillon. Quelquefois, au lieu de ce

dernier, C (fig. 265), composé de quatre cylindres *bb* se coupant en croix, on se sert d'une boule E (fig. 266), terminée par quatre tourillons. Pour concevoir le jeu du joint universel, il faut remarquer que, quand le mouvement de rotation est imprimé à l'arbre A (fig. 267) cet arbre entraîne dans ce mouvement sa mâchoire D, ainsi que le croisillon C, quelque position que le croisillon occupe d'ailleurs par rapport aux deux branches de cette mâchoire, qui, comme nous l'avons vu, ont la faculté de tourner sur leurs tourillons respectifs. Mais, puisque les quatre parties du croisillon sont solidaires, il est évident que celles qui servent de supports aux branches de la mâchoire, fixée à l'axe B, doivent aussi tourner, et imprimer à cet axe un mouvement de rotation. Ce système, très-simple en lui-même, ne convient cependant que dans les machines peu puissantes, ou lorsque les axes auxquels on a besoin de transmettre le mouvement ne forment pas extérieurement des angles très-grands. Il peut être employé, par exemple, pour réunir bout à bout ou accoupler des axes très-longs qui, devant reposer sur plus de deux appuis, ne sauraient être rigoureusement maintenus sur une même droite. Les pressions sur les articulations sont ici énormes, et occasionnent beaucoup de frottements, quoique d'ailleurs les chemins parcourus par les points d'application de cette résistance soient assez petits. Ce communicateur a été mis en usage en Hollande, pour transmettre le mouvement de rotation de l'axe horizontal d'un moulin à vent à des axes de vis d'Archimède, qui, comme on sait, doivent être inclinés à l'horizon.

La vis sans fin, dont il a été parlé au n° 142 de la 2e partie, est encore un exemple de la transmission du mouvement circulaire continu à deux axes perpendiculaires entre eux et non situés dans le même plan. C'est une vis à filets carrés qui repose sur deux tourillons et qui est terminée par une manivelle à laquelle la puissance est appliquée (fig. 268). Les hélices de cette vis s'engrènent dans les dents d'une roue, dont le plan contient l'axe de la vis, et les poussent constamment selon la même direction. Il en résulte que la roue tourne autour de son axe, et devient propre à soulever des fardeaux suspendus à une corde qui vient s'enrouler autour d'un treuil énarbré avec la roue.

On peut donc conduire la roue au moyen de la vis, mais la réciproque n'est pas vraie : autrement dit, il est impossible de conduire la vis au moyen de la roue. En effet, si la roue devait conduire la vis, ses dents exerceraient contre les hélices des actions parallèles à l'axe de cette vis, et qui peuvent être comparées à la pression verticale d'un corps contre un plan incliné très-doux, dont l'inclinaison serait la même que celle des hélices par rapport à la base du cylindre auquel elles appartiennent. Or, il est évident que, quelque grande que soit la pression verticale Q d'un corps sur un plan très-doux AC, jamais cette pression ne parviendrait à le faire descendre; car les frottements contre le plan croissent avec cette pression, et si la pente du

plan est telle que le mouvement ne puisse naître, le mouvement ne se produira pas mieux à la suite d'une augmentation dans la pression Q. Mais, si on appliquait une puissance P contre le coin ABC (fig. 269) qui se meut dans le sens BA, et que le corps Q fût assujetti à glisser verticalement entre des galets g, g, g, g, il ne sera pas très-difficile, à l'aide de cette puissance, de le faire monter verticalement. Revenant maintenant à la vis sans fin, on reconnaît sans peine que l'action des dents de la roue contre les filets de la vis, action qui est parallèle à l'axe de cette dernière, ne saurait, en tant qu'elle est puissance, produire de mouvement, tandis que ce dernier aurait lieu avec facilité pour une force perpendiculaire à cette action, c'est-à-dire pour une force qui conduirait la vis. Si nous nous rappelons ce qui a été dit (3e partie, 4) touchant l'objet des machines en général, nous nous convaincrons de la vérité de ce principe, que, toutes les fois qu'en agissant sur l'une des extrémités d'une machine on peut la faire mouvoir aisément, le contraire doit avoir lieu, si on agit à l'autre extrémité. En effet, puisque le but d'une machine est de changer le travail $E \times F$ d'un moteur, dans le travail $e \times f$ de l'opérateur, et que ces deux travaux sont égaux, abstraction faite des frottements, il est évident que si E, ou le chemin parcouru par le point d'application du moteur, est très-petit comparativement au chemin e de l'opérateur, l'effort F du moteur sera au contraire très-grand par rapport à l'effort f exercé par l'outil. Voilà pourquoi, dans ce cas, on mettrait si facilement la machine en mouvement en agissant sur l'opérateur, et si difficilement en poussant le récepteur.

Tirez, par exemple, sur la barre d'un manége destiné à faire mouvoir un système où l'opérateur doit avoir une grande vitesse, cette barre résistera fortement. Agissez, au contraire, immédiatement sur l'outil, la machine cédera à un effort assez médiocre.

La scie, dont la vitesse est ordinairement très-grande dans les machines, si on la compare à celle du moteur, mettra sous une action que vous lui appliquiez, tout l'appareil en mouvement, tandis que les plus grands efforts contre la roue motrice deviendraient à peu près impuissants.

Dans l'exemple précédent du plan incliné, les chemins parcourus par la puissance P et par la pression Q sont proportionnels à la base et à la hauteur du plan; si ce plan est très-doux, la base devient considérable par rapport à sa hauteur, et il est visible que la puissance P est au contraire bien moindre que la pression Q. Enfin, par un raisonnement analogue, on se rend compte, dans la vis sans fin, de la facilité qu'il y a à conduire la roue au moyen de la vis, et de la difficulté, ou plutôt de l'impossibilité, qu'il y aurait à vouloir obtenir un mouvement réciproque au précédent. Nous terminerons par cette remarque, que la vis sans fin consomme beaucoup de travail par les frottements, et que ce système n'est pas employé dans les machines puissantes où l'économie du travail est importante. Toutefois, à

cause de la régularité de son mouvement, elle est fort utile dans le cas où il s'agit d'un ouvrage de précision.

28. *Transformation du mouvement circulaire continu en rectiligne alternatif, et vice versâ.* — Tout en comprenant avec la transformation du mouvement circulaire continu en rectiligne alternatif la réciproque de cette transformation, nous n'entendons pas dire que les moyens employés dans cet objet soient réciproques les uns des autres; c'est seulement pour abréger que nous classons ces deux circonstances dans une seule solution. Quoi qu'il en soit, le moyen le plus convenable pour opérer la première de ces transformations consiste dans la combinaison du mouvement de rotation d'une manivelle autour d'un axe avec celui d'une bielle dont l'extrémité supérieure pousse un corps forcé par des *prisons* ou par des coulisses à prendre un mouvement rectiligne alternatif. A (fig. 270) est un arbre tournant sur lui-même et auquel est fixé une manivelle armée d'un bouton B. Autour de ce bouton roule librement une bielle BC, dont l'extrémité C transmet le mouvement rectiligne au corps D de bas en haut pendant la demi-révolution ascendante EBF de la manivelle AB, et de haut en bas pendant la demi-révolution descendante FGE. Ce qui fait le principal avantage de cette combinaison, c'est que la vitesse et l'action varient par degrés insensibles vers la fin et le commencement de chaque oscillation du corps D, ou de chaque demi-révolution de la manivelle, et que les pièces ne se quittent pas ni n'éprouvent aucun choc, aucune secousse nuisible. En effet, la vitesse de l'extrémité supérieure C de la bielle devient nulle quand le bouton de la manivelle parvient sur la ligne AC aux points E et F, où il décrit des chemins élémentaires perpendiculaires à cette droite; et cette même vitesse est, au contraire, la plus grande par des positions intermédiaires, ce qui fait que cette vitesse croît et décroît graduellement. Cette variation périodique du mouvement, en vertu de laquelle la vitesse redevient la même aux mêmes positions, demeure la même, quelle que soit la grandeur du bouton B de la manivelle; de sorte qu'au lieu d'un petit bouton on peut employer un bouton plus considérable. Il suffit que la distance des centres A,B (fig. 271), reste la même, et il est visible que l'amplitude des mouvements rectilignes alternatifs du corps D ne sera pas moins toujours égale au double de cette distance des centres. Si le cercle de B s'agrandit au delà de l'axe fixe A, sans que la distance des centres A et B varie, on aura ce qu'on appelle un *excentrique,* ou cercle tournant autour d'un point qui n'est pas le centre de ce cercle. La bielle consiste alors dans une double tringle (fig. 272), qui roule avec jeu dans une gorge pratiquée à la circonférence extérieure de l'excentrique, et qui est reliée au delà de cette circonférence de distance en distance, par des croisillons destinés à la consolider. L'appareil d'un cercle roulant ainsi avec un axe A qui lui est fixé invariablement, est usité pour ouvrir ou fermer les soupapes des machines à vapeur.

Quelquefois, quand l'excentrique est fort grand, on le compose d'un simple

anneau, relié à l'axe fixe A au moyen de bras (fig. 273). Si la course de la bielle mue par un excentrique ne dépend que de la distance du centre du cercle qui le compose, à l'axe avec lequel il tourne, et non de la grandeur de ce cercle, il n'en est pas de même du travail absorbé par le frottement de la bielle sur la gorge de cet excentrique ; car ce travail augmente avec la circonférence de ce dernier, et peut même devenir un multiple de l'effet utile que la bielle doit transmettre. Nommons, en effet, F l'effort exercé par la bielle, R la distance AB du centre de l'excentrique au centre de l'arbre qui l'emporte dans son mouvement, l'amplitude d'une oscillation rectiligne étant 2R, le chemin parcouru par le point d'application supérieure de la bielle sera 4R pendant la durée de deux oscillations de va-et-vient de cette dernière, ou d'une révolution complète de l'excentrique. Ainsi, le travail transmis par la bielle dans cette même durée sera 4RF. D'un autre côté, le frottement exercé sur la gorge de l'excentrique est proportionnel à la pression F ou égal à fF, f étant un coefficient donné par les tables du n° 106, 2e partie, et dépendant de la nature des substances qui composent la bielle et l'excentrique. Si l'on fait attention que, dans l'hypothèse où la bielle demeure sensiblement parallèle à elle-même, le chemin parcouru par le point d'application du frottement sur la gorge de l'excentrique pendant une révolution complète de ce dernier est égal à sa circonférence, et si nous nommons r le rayon du cercle de cet excentrique, $2\pi r \cdot f\mathrm{F}$ représentera le travail absorbé par le frottement. Divisant ce travail par l'effet utile 4RF, on aura, pour leur rapport, le quotient

$$\frac{2\pi r . f . \mathrm{F}}{4\mathrm{F} . \mathrm{R}} = \frac{\pi r . f}{2\mathrm{R}}.$$

Si, par exemple, le coefficient $f = \frac{1}{6}$, et que le rayon r de l'excentrique soit sextuple de la distances des centres, ce qui arrive souvent, le rapport précédent devient $\frac{\pi}{2}$. Or, π, ou le rapport de la circonférence au diamètre, $= 3,1415$. Donc, le rapport de l'effet consommé par les frottements, à l'effet utile, $= 1,57$. Par conséquent, l'effet transmis à l'arbre fixe est $= 1 + 1,57 = 2,57$, ou deux fois et demie le travail utile de la bielle. Cet exemple démontre la perte énorme de travail qui résulte de l'emploi de l'excentrique, et combien il a été mal à propos mis en usage dans une machine aux environs de Paris, destinée à scier des pierres, et qui, mue avec la force de dix chevaux, ne produit guère que le travail de quatre. Toutefois, ce système est sans inconvénient pour le rôle qu'il joue dans les machines à vapeur, parce que le travail nécessaire au mouvement des soupapes n'est qu'une fraction fort petite du travail total de la machine. On voit, cependant, d'après ce qui précède, que pour bien juger d'une disposition donnée à tel ou tel appareil, il suffit de comparer le travail des frottements qui se produisent avec celui de la puissance.

Quelquefois, au lieu d'un bras de manivelle, on se sert d'une roue en fonte (fig. 274), armée d'un bouton qui transmet le mouvement à la bielle. On a, d'ailleurs, la précaution de renforcer le bras près de l'endroit où le bouton est adapté. Il n'est pas difficile de reconnaître que cette disposition est tout à fait analogue à celle de la manivelle.

En général, on nomme *excentrique* toute courbe qui tourne avec un arbre, sans être concentrique à cet arbre; et elle peut toujours opérer la transformation de ce mouvement circulaire continu en un mouvement rectiligne alternatif. Supposez un triangle équilatéral dont le centre coïncide avec celui d'un arbre tournant A (fig. 275), fixé invariablement à ce triangle, et dont les trois côtés soient remplacés par trois arcs de cercles décrits de chaque sommet opposé comme centre. Il est évident que si l'arbre tournant passe au travers d'une pièce verticale BEDF qui repose sur le système des trois arcs de cercle, cette pièce sera tour à tour élevée et abaissée par la révolution du triangle autour de l'axe A. Quant à l'amplitude d'une oscillation, elle sera égale ici à la différence Ac — A*h* des parties interceptées par le centre A sur le rayon de l'un des arcs de cercle; de plus, pour une révolution complète de l'arbre A, il y aura eu trois montées et trois descentes de la pièce BEDF.

Considérons encore une pièce verticale MN (fig. 276), maintenue par des galets *g*,*g*, entre lesquels elle peut glisser, et agissant par son poids sur une bande courbe en forme de cœur, qui reçoit son mouvement d'un arbre tournant A, auquel cette bande est fixée invariablement. Si l'on imagine que la courbe se meuve de droite à gauche, la pièce MN s'élèvera verticalement jusqu'à ce que la pointe P soit parvenue sur la verticale AN, et elle redescendra pendant une demi-révolution jusqu'à ce que le point de rebroussement Q soit arrivé dans la verticale AN, au-dessus de l'arbre tournant A. Dans une révolution complète, la pièce MN aura monté et descendu par degrés insensibles, de quantités égales à la différence AP — AQ. Enfin, ce mouvement s'opérera de la même manière, quelle qu'ait été la nature de la courbe excentrique. Mais ordinairement, dans une telle transformation qui, par exemple, s'effectue par l'ascension et la descente des tiges de piston et où il faut que le mouvement soit très-régulier, le tracé de l'excentrique doit satisfaire à cette condition que, pour des angles égaux décrits par la courbe autour de l'axe A, la tige MN monte ou descende de quantités égales. Cela posé, voici comment le tracé pourra s'effectuer. Soient P et Q (fig. 277) la pointe et le point de rebroussement de la courbe en cœur destiné à soulever et à faire baisser pendant sa révolution complète la tige d'un piston; A le centre de l'arbre tournant. Portons AQ de A en 6′ sur la droite QAP; et partageons l'amplitude AP—A6′ de l'oscillation, en un certain nombre de parties égales, en six par exemple. Divisons aussi les deux demi-circonférences arbitraires s'appuyant sur la droite QAP comme diamètre, dans le même nombre de six parties. Joignant les rayons à ces points de division,

vous décrirez du point A comme centre, et avec des rayons successivement égaux à AP, A1, A2, A3, des arcs de cercle dont les intersections avec les rayons de même numéro détermineront autant de points de la courbe cherchée. Il est facile de voir que les diamètres de cette courbe, qui passent par le centre A de l'arbre tournant, sont tous égaux à la distance QP de la pointe au point de rebroussement de l'excentrique. La figure 278 montre le système d'un pilon que soulève une courbe *abc*, conduite par un arbre tournant A, et qui retombe par son propre poids dès que la courbe l'abandonne. A l'instant où la *came abc* saisit le *mentonnet* DE, elle l'aborde avec une vitesse acquise, et produit un choc violent qui consomme beaucoup de travail; mais ce choc paraît être inévitable, puisque le pilon doit être abandonné à lui-même pour effectuer son travail. De plus, l'action de la came contre le mentonnet est telle que le montant du pilon se déverse de droite à gauche, et presse d'un côté contre la moise supérieure de gauche, et de l'autre contre la moise inférieure de droite. Non-seulement les frottements que font naître ces pressions sont grands, mais il en est encore de même des chemins que parcourent leurs points d'application. Ces deux causes, le choc et le frottement, rendent évidemment ce système très-vicieux. On a cherché à réduire les frottements en supprimant le mentonnet, et en faisant saisir par la came le pilon dans la verticale qui passe par son centre de gravité. Pour cela, on compose le montant de deux parties EE (fig. 279), maintenues à un certain intervalle au moyen de deux moises *bb* boulonnées. Cette portion vide, ménagée entre les deux parties du montant, est traversée par un boulon ou roulette *a*, contre lequel pousse la came, qui a ainsi la faculté de pénétrer dans l'intérieur du montant du pilon. A la vérité, cette roulette *a* finit par ne plus tourner, et c'est ce qui arrive en général pour les galets de friction, etc.

Il reste à examiner s'il ne serait pas possible de rendre moins influentes les pertes occasionnées par le choc. Supposez que la came soit à la fois tangente en B (fig. 280) à la circonférence de l'arbre tournant A, et au mentonnet au moment où elle remonte ce dernier à l'état de repos. On conçoit qu'à cet instant, au lieu du choc, il se produit un glissement pendant lequel le mentonnet, et par suite le pilon, est graduellement soulevé. Mais, comme ici la came doit recevoir plus de développement, le frottement, en parcourant plus de chemin, absorbe une quantité de travail qui peut être égale à celle que le choc aurait absorbée. Toutefois, cette disposition est au moins utile en ce sens qu'elle évite, au système, des secousses qui, dans tout état de choses, sont nuisibles à sa solidité. Enfin, on a armé de dents le montant du pilon, ainsi qu'une portion de l'arbre tournant (fig. 281); le pilon monte tant que les dents de ce dernier engrènent dans celle du montant, et descend dès que la portion non dentée de l'arbre se présente au pilon. Ce mouvement alternatif dure tout le temps que la roue continue à se mouvoir.

Mais il est facile de voir que les dents n'ont pas assez de force pour résister au choc, et que ce système est encore plus vicieux que celui de cames appliquées à un mentonnet.

Nous ne parlerons pas du plateau tournant autour d'un axe, mentionné dans l'ouvrage de MM. Lanz et Bétancourt, et armé d'un bouton saillant qui, en glissant dans la rainure horizontale suffisamment longue d'un montant forcé de cheminer entre deux moises, communique encore à ce montant un mouvement rectiligne de va-et-vient ; nous n'en parlerons pas, dis-je, parce que, bien qu'ici la vitesse s'éteigne à la fin de la descente et de la montée comme dans la manivelle, le chemin que décrit le bouton et le frottement qui en résulte, absorbent une trop grande partie du travail du moteur.

Nous garderions aussi le même silence à l'égard de la combinaison d'une roue dentée qui roule dans une autre roue dentée intérieurement et d'un rayon double de celui de la première, si la plus petite des deux ne jouissait de cette singulière propriété, qu'un point quelconque de sa circonférence ne décrit constamment, soit en montant soit en descendant, un même diamètre de la grande roue. Voici en quoi consiste cette combinaison : A (fig. 282) est un arbre placé à une certaine distance en avant et vis à vis du centre de la grande roue C, fixée invariablement sur deux supports *pp*. M est une manivelle qui tourne autour de l'arbre A, et dont le bouton B se prolonge suivant un axe parallèle à l'arbre A. La petite roue D, dont le rayon est moitié de celui de la roue fixe A, non-seulement peut rouler autour de l'axe B, mais encore engrener dans toutes les dents intérieures de la roue C, en suivant le mouvement de la manivelle. E représente une tige de fer rendant solidaire le prolongement de l'axe B avec un bouton F qui fait saillie en arrière de la petite roue D pour supporter une bielle FG. Or, je dis maintenant que la bielle FG, ou son point de suspension F, restera toujours sur le diamètre AF, et que, par conséquent, l'amplitude d'une montée ou d'une descente de cette bielle sera égale au diamètre de la grande roue C. En effet, pour que le point F reste toujours sur le diamètre IK (fig. 283), on a FAO = IAO. D'ailleurs,

$$\text{l'angle IAO} = \frac{\text{arc OI}}{\text{AI}},$$

et

$$\text{FAO} = \frac{\frac{1}{2}\text{arc FO}}{\text{BO}} = \frac{\frac{1}{2}\text{ arc FO}}{\frac{1}{2}\text{AI}} = \frac{\text{arc FO}}{\text{AI}}.$$

D'où

$$\text{arc FO} = \text{arc OI};$$

et cette dernière condition est remplie, puisque le petit cercle en roulant sur le grand, y développe un arc OI égal à l'arc OF. Toutefois, comme nous l'avons déjà dit, ce système a le grave inconvénient que les fortes pressions éprouvées par les dents sont capables d'en amener la rupture.

29. *Transformation du mouvement circulaire continu en mouvement circulaire alternatif.* — Le premier moyen que nous indiquerons pour transfor-

mer le mouvement circulaire continu en mouvement circulaire alternatif, a beaucoup d'analogie avec celui qui a pour objet le mouvement des pilons. C'est encore une roue armée de cames qui pressent les unes après les autres sur l'extrémité d'un levier mobile autour d'un point fixe, de telle sorte qu'après avoir tourné dans un sens pendant qu'une came agit sur son extrémité, il reprend un mouvement en sens contraire dans l'intervalle qui s'écoule depuis l'instant où cette came le quitte, jusqu'à l'instant où la suivante le reprend. Ordinairement le levier dont nous venons de parler est un manche auquel un marteau est adapté (fig. 284). Tantôt la queue du marteau est poussée par la came de haut en bas contre une pièce inférieure *m*, dite *renvoi*, et, dans ce cas, le point d'application T de la came, et la tête M du marteau, sont situés de part et d'autre de l'axe de rotation A du système. Tantôt la came soulève le marteau immédiatement par la tête, et c'est le cas du marteau frontal (fig. 285). Tantôt enfin le marteau est saisi entre la tête et son axe de rotation (fig. 286). On peut alors, pour éviter le choc, avoir recours à un procédé semblable à celui qu'on a indiqué pour le pilon. C'est de mener par l'axe A une droite AC, presque tangentielle à une ligne près, à l'arbre tournant, et de tracer une came qui soit tangente dans le même point à l'arbre et à la droite parallèle à AC. Ce système a été mis en usage dans les usines de M. Cockerill, à Liége.

De tous les systèmes affectés à la transformation du mouvement circulaire continu en circulaire alternatif, le plus parfait est, sans contredit, celui d'une manivelle M (fig. 387), tournant autour de l'arbre A, et transmettant, par l'intermédiaire d'une bielle B, un mouvement circulaire alternatif à un balancier CD, mobile autour d'un axe O. Ce balancier, employé dans les machines à vapeur, est une pièce en fonte mince de deux pouces d'épaisseur, renforcée par des côtes. Son objet est de transmettre un mouvement sensiblement rectiligne de va-et-vient à la tige d'un piston P. On verra bientôt comment le dispositif du parallélogramme *abcd* remplit ce dernier but. L'appareil de la bielle, de sa manivelle et du balancier n'est qu'une imitation de la pédale des remouleurs ou du tour à filer.

Watt, pour cette même transformation, avait d'abord imaginé la *mouche*, ou mouvement planétaire. Quoique ce moyen ait été totalement abandonné, à cause de son peu de solidité et des frottements énormes qui s'y produisent, nous allons en faire une description succincte.

AB (fig. 288) est un balancier susceptible d'un mouvement circulaire alternatif autour de l'axe C; *cd* une tige qui tourne librement sur son axe en *c*, et dont l'extrémité est terminée en patte d'oie, et fixée au moyen de trois boulons au centre d'une roue dentée E, qui engrène dans une autre F de même rayon que la première, et énarbrée à l'axe du volant N. Sur les deux faces opposées au plan du dessin des deux roues, est une tige *ef* qui force la roue E à rester à la même distance du centre du volant, et aux extrémités de

laquelle les deux roues peuvent tourner respectivement. Le mouvement circulaire continu du volant fait monter et descendre la roue E, autour de la roue F, et par suite la bielle qui transmet ainsi un mouvement circulaire alternatif au balancier AB.

De ce que les deux roues E et F sont de même rayon, il est facile de conclure qu'une oscillation complète du balancier correspond à deux révolutions du volant. En effet, une oscillation complète du balancier a lieu, lorsque le centre de la roue E a fait une révolution entière autour du centre f du volant. Si on nomme v_1 la vitesse angulaire avec laquelle le premier centre se meut autour de f, R le rayon de chacune des roues dentées, $2Rv_1$ sera le chemin parcouru dans une seconde par le centre de la roue E. Puisque cette roue est fixée invariablement à la bielle, tous les chemins parcourus simultanément par les points de cette roue seront égaux à celui que parcourt son centre. Ainsi $2Rv_1$ sera aussi le chemin parcouru par la roue E à son point de contact avec la roue F. Si je nomme v'_1 la vitesse angulaire de cette dernière, le chemin parcouru dans une seconde par ce même point de contact, en tant qu'il appartient à la roue F, sera représenté par Rv'_1. D'où on tire

$$Rv'_1 = 2Rv_1, \text{ et, par suite, } v'_1 = 2v_1.$$

Ce qui nous apprend que la vitesse angulaire, ou le nombre de tours du volant est double de la vitesse angulaire de la bielle ou du nombre de ses oscillations complètes.

Le levier dit *à la garousse* transforme le mouvement circulaire alternatif en mouvement circulaire continu. Si une fourche A (fig. 289) pousse successivement et toujours dans le même sens les dents crochues en fer d'une roue B, celle-ci prendra autour de son axe un mouvement circulaire. Or, ce dernier, ainsi que l'effort de la fourche A qu'on nomme *pied de biche*, est produit par le mouvement circulaire alternatif d'un levier coudé DCE autour d'un axe C. Si la puissance P s'exerce de haut en bas, le pied de biche fait avancer une dent de la roue B. Lorsqu'au contraire la puissance P fait mouvoir la branche CE du levier de bas en haut, la fourche se désengrène et se porte sur une dent inférieure. Quand ce système est employé à soulever un poids Q, on établit un déclic F pour empêcher la roue de prendre un mouvement contraire, pendant le désengrènement du pied de biche.

Quelquefois ce système est composé. Il consiste alors dans un levier AB (fig. 290) qui a un mouvement circulaire alternatif autour de son axe C. Deux crochets, DE et FG, suspendus par des articulations à ce levier, engrènent tour à tour dans les dents de la roue H. Ainsi, lorsque le point B s'abaisse, le crochet DE s'élève et fait mouvoir la roue, tandis que le crochet FG se désengrène pour aller saisir une dent inférieure. Lorsque, par une oscillation contraire, le point B s'élève, c'est au tour du crochet FG de tirer la roue, et à celui du crochet DE de désengrener. On ne peut pas dire à la rigueur que le mouvement de la roue qui prend le nom de *roue à minute*,

soit continu, car l'action est intermittente et se transmet par une suite de chocs qui démontrent combien ce système est défectueux lorsqu'il s'agit de lui faire exécuter immédiatement un grand travail. Toutefois, quand la roue à minute ne se meut qu'avec lenteur et qu'elle ne transmet pas l'effet utile, dans ce cas son travail est fort petit, ainsi que les pertes qui résultent de cette combinaison. C'est ce qui justifie l'emploi de la roue à minute pour conduire le chariot *porte-pièce* dans les scieries. Mais un pareil système ne pourrait convenir pour faire mouvoir les roues des vis à pressoirs. Les secousses qui succèdent fatiguent les hommes préposés à la manœuvre.

30. *Transformation du mouvement circulaire alternatif en rectiligne alternatif.* — Le premier exemple que nous offrirons sur la transformation du mouvement circulaire alternatif en mouvement rectiligne *alternatif*, c'est un balancier à secteurs (fig. 291) qui, en tournant sur son axe O, tantôt dans un sens et tantôt dans l'autre, agit pour soulever et baisser des bielles ou des tiges de piston au moyen de chaînes fixées à la fois aux secteurs et à ces tiges, comme il a été indiqué au n° 25. Ce système a été et est encore employé dans les machines à vapeur destinées à épuiser l'eau. Mais on l'a remplacé avec avantage par le système suivant, dû au célèbre Watt, mécanicien anglais, qui, le premier, a rendu la machine à vapeur susceptible de transmettre le mouvement de rotation continu aux machines industrielles.

La figure 292 représente le balancier AE des machines à vapeur actuelles, doué d'un mouvement circulaire alternatif autour de son centre de rotation O, ou qui le reçoit de la tige BG, animée par l'action de la vapeur contre le piston G, d'un mouvement vertical de va-et-vient. Si le point d'attache supérieur B de la tige BG était fixé à l'extrémité A du balancier au moyen d'un tourillon ou d'une articulation, comme le point A ne peut que décrire un arc de cercle autour de O, la tige BG ne pourrait rester verticale, et puisque le piston G se meut en ligne droite, la tige BG serait forcée ou bridée, à moins qu'il n'y eût une autre articulation à sa naissance en G du côté du piston. C'est ce qui a lieu dans quelques machines, mais alors l'action contre le piston de la part de BG se décompose, et le piston presse plus d'un côté que de l'autre, ce qui occasionne des fuites de vapeur du côté où il presse le moins. Watt a fixé l'articulation B de la tige à l'un des sommets du parallélogramme ABCD, articulé dans ses angles, ou plutôt à la traverse qui réunit les sommets des deux parallélogrammes parallèles et égaux, embrassant le balancier de part et d'autre de ses deux faces verticales. Deux sommets A et D de ces parallélogrammes, que désormais nous regarderons comme n'en formant qu'un seul, sont situés sur l'axe de symétrie AE du balancier, et le quatrième C est guidé par une ou deux tiges FC, nommées *brides* et tournant autour du centre F, fixé de façon que B demeure sensiblement sur une même verticale. Voici comment on s'y prend pour fixer la position de F, quand le parallélogramme, la tige du piston et le balancier sont donnés :

Soient A′O, A″O (fig. 293) les positions extrêmes du balancier; AO sa position intermédiaire ou horizontale, B′G la direction indéfinie de la tige du piston. On tracera les trois parallélogrammes A′B′C′D′, A″B″C″D″ et ABCD, correspondant aux positions précédentes, c'est-à-dire tels que les sommets B′, B″, B étant sur la verticale B′G, les côtés qui réunissent les sommets des mêmes lettres respectivement sur chacun des parallélogrammes, soient égaux. Il en résultera trois positions C′, C″, C, de l'extrémité de la bride conductrice FĆ, et on fera passer par les trois points C′, C″, C, un cercle dont le centre F sera pris pour le point fixe de cette bride. Cette solution n'est pas rigoureuse, parce que si on construisait un grand nombre de positions du parallélogramme d'après la condition que tous les sommets B soient sur la même verticale B′G, on verrait que le sommet C ne reste pas sur un véritable arc de cercle. Donc, réciproquement, en forçant le sommet C à parcourir le cercle dont F est le centre, le sommet B ne restera pas constamment sur la verticale B′G. Mais, en choisissant des données convenables, on peut faire que les déviations du point B, hors de la verticale, soient alors très-petites, ou ne dépassent pas une ou deux lignes.

Pour obtenir cette déviation, on n'a qu'à imaginer que le sommet B du parallélogramme devienne libre, et qu'à diriger le parallélogramme, en contraignant C à rester sur le cercle C′C″C, trouvé ci-dessus; puis on tracera la ligne qui passe par toutes les positions du sommet B intermédiaires aux positions B′, B et B″, qui resteront seules forcément sur la verticale. On trouvera que cette ligne forme une espèce d'S (fig. 294), qui coupe la verticale B′G en B, et qui s'en écarte symétriquement, entre les positions extrêmes B′ et B″, de quantités *cb*, *c′b′*, qu'il sera facile de mesurer. On aura d'ailleurs l'attention de construire l'épure de grandeur naturelle, on même avec des dimensions plus grandes, si on veut procéder avec beaucoup de rigueur.

Il y a quelques règles à observer pour que la déviation soit la moindre possible :

1° La direction verticale B′G (fig. 295) de la tige doit diviser en parties égales la distance A*a* comprise entre l'arc et la corde de l'arc A′AA″, décrit par l'extrémité A du balancier ;

2° La corde A′A″, qui est à très-peu près égale à la course du piston, ne doit pas excéder de beaucoup la moitié ou les deux tiers de la longueur AO du balancier, c'est-à-dire que AO doit surpasser une fois et demie au moins la longueur de course de la tige ;

3° On fera la longueur des côtés non parallèles au balancier, du parallélogramme, de façon que l'extrémité B′ (fig. 293) de la tige soit sur l'horizontale B′O du centre du balancier, quand celui-ci occupe la position supérieure extrême A′O ;

4° L'horizontale OB′ doit partager en deux parties égales l'angle total décrit par le balancier ;

5° Quant à la longueur des côtés A'D' et B'C', elle est arbitraire ; ou plutôt, si on veut, elle dépend de la distance à laquelle on veut placer le centre F, ou de la longueur de la bride : car plus C'D' se rapproche vers le centre O du balancier, moins l'arc décrit par C' sera grand, et plus la bride FC' sera courte.

Quelquefois, quand on veut faire conduire simultanément deux tiges B'G et *b'g* (fig. 296), on forme un parallélogramme *a'b'c'*D' intérieur, qui a deux côtés *c'*D' et *a'*D communs avec le grand, et dont le sommet *b'*, servant de suspension à la seconde tige, est sur la droite OB', qui joint au centre O du balancier le sommet de suspension B' de la première tige. Car, à cause que les lignes B'O et *b'o* sont en rapport invariable, *b'* décrira une droite si B' en décrit une ; et il n'y aura besoin que de la même bride C'F. On pourrait encore attacher une troisième tige au point *b''* de rencontre de B'O avec le côté opposé C'D'.

La figure 297 donne une disposition de parallélogramme renversé, dans laquelle A'O est le balancier, et les côtés A'B et C'D' sont très-longs, parce qu'ici la tige B'G est censée être fort courte et être placée à une hauteur assez grande au-dessus du balancier.

On peut encore simplifier la construction du parallélogramme, en supprimant les côtés AD, DB et BC (fig. 298), et en le bornant au seul côté AC, guidé en C par la bride FC. Le point d'attache de la tige *bg*, à mouvoir verticalement, se place en *b*, sur le côté conservé AC, à son point de rencontre avec la ligne menée du centre O du balancier au point B, qui serait le sommet d'un véritable parallélogramme. La construction pour obtenir le centre F de la bride est extrêmement facile. Car *b'g* (fig. 299) étant la verticale donnée, menez par les positions supérieure, inférieure, et horizontale, A'A'' et A de l'extrémité du balancier AO, des droites telles que le point d'attache soit en *b'*, *b''* et *b* sur la verticale *b'g*, et prolongées chacune de *b'c'*, *b''c''* et *bc*, égales au reste *bc* du côté A*c* ; le point F de rotation de la bride sera le centre du cercle passant par les extrémités *c'*, *c''* et *c*.

Il existe d'autres systèmes de balanciers à axe mobile et qui peuvent servir à rendre le mouvement des tiges sensiblement vertical. Quoique ces systèmes n'offrent pas des avantages particuliers sur les précédents et soient rarement employés, nous en donnerons une idée succincte : BO (fig. 300) est un balancier oscillant sur l'axe O, placé à l'extrémité d'une forte tige qui tourne autour d'un axe fixe A. FC est une double bride embrassant le balancier, laquelle tourne autour d'un point F. La position de ce point fixe F est à l'intersection de l'horizontale de l'axe O et de la verticale passant par l'extrémité B du balancier, en tant que cette dernière occupe la position la plus basse. BG représente la tige d'un piston dont on veut que le mouvement soit tenu vertical. Les positions extrêmes BO et B'O du balancier sont d'ailleurs toujours symétriques par rapport à sa position horizontale FO. Pour trouver le

centre de rotation A de la tige qui sert de support au tourillon O du balancier, on portera FC + CO = BO (à cause de BC = FC), de F vers I sur l'horizontale FO. Puis, par les points I et O, on fera passer un cercle, le plus grand possible, dont le centre sera pris pour l'axe A du support. On conçoit, en effet, que, pour que l'extrémité B de la tige BG s'éloigne peu de la verticale BB' avec laquelle elle aura trois positions communes, il convient que OI soit très-petit par rapport au rayon OA. Si on ne peut faire OA très-grand, il faudra éloigner le point de rotation O du balancier de F ou de B, pour que l'angle BOB' décrit par le balancier soit très-petit, et pour qu'il en soit de même de OI ou de la différence entre OB et BO.

Nous terminerons ce que nous avons à dire sur la transformation du mouvement circulaire alternatif, en mouvement rectiligne alternatif, par un système fort simple qui peut être utilement employé pour la manœuvre d'une pompe à eau. Il consiste dans un levier BD (fig. 301) mobile autour de l'axe O, et dont une des extrémités B reçoit, par une puissance appliquée, un mouvement circulaire alternatif, tandis que l'autre est engagée dans une tige LM, tenue dans une position verticale, par la partie supérieure au moyen d'un œillet *m* dans lequel elle glisse, et par la partie inférieure au moyen du piston que cette tige supporte et qui glisse dans son corps de pompe. Reste à expliquer comment le levier moteur est engagé dans la tige LM. La tige est contournée selon une mortaise *opqr*, au bas de laquelle est un axe *rs*. C'est sur cet axe que tourne une fourche F, dont les deux branches forment une articulation avec le levier OB, au moyen d'un autre petit axe qui traverse à la fois les deux branches de cette fourche et l'extrémité D du levier de manœuvre. Cette disposition est généralement adoptée dans les presses hydrauliques.

31. *Mouvements circulaire ou rectiligne alternatifs, en mouvements de même espèce.* — Il serait peut-être inutile d'indiquer les transformations soit du mouvement circulaire alternatif en circulaire alternatif, soit encore du mouvement rectiligne alternatif en rectiligne alternatif, parce que les moyens qui transforment le mouvement circulaire alternatif ou le mouvement rectiligne alternatif en circulaire continu (3e partie, 28 et 29) résolvent la question parfaitement. Il existe cependant un petit nombre de moyens directs d'opérer cette transformation. Le tour à pédale et à ressort est un exemple de transformation du mouvement circulaire alternatif en un autre mouvement circulaire alternatif; car la pédale CD (fig. 302) qui le reçoit, le transmet au tour K, par le moyen de la corde *abc*, enroulée à plusieurs reprises sur le tambour AM, et qui s'attache au ressort B par son autre extrémité.

Le mouvement rectiligne alternatif se communique par les mouvements connus de sonnettes. C'est une pièce, ou levier coudé, *boc* (fig. 303), tournant autour de l'axe *o*, et dont les deux branches *ob* et *oc* transmettent le

mouvement alternatif rectiligne d'un fil de fer ou corde *ab*, à la corde *cd*. Si, au lieu d'être situées dans le même plan, les deux droites *ab* et *cd* (fig. 304) sont dans des plans différents, il faudra les réunir par une droite commune *ef*, et placer deux mouvements de sonnettes, l'un dans le plan de *ab* et de *ef*, l'autre dans le plan de *ef* et de *cd*; ces deux pièces communiqueront entre elles au moyen d'une corde située à l'intersection *ef* des deux plans.

Enfin, ce même mouvement est transmis aussi par des varlets et bielles (fig. 305), ainsi que cela a été pratiqué dans l'ancienne machine de Marly. Mais tous ces systèmes donnent lieu à des frottements énormes; leur jeu augmente, les chocs se succèdent, et la machine finit par se disloquer. C'est pour cette raison que les Anglais ne cherchent point à transmettre directement les mouvements alternatifs; ils préfèrent transformer le premier mouvement alternatif en circulaire continu, et celui-ci dans le nouveau mouvement alternatif qu'on veut produire.

IV.

DES MODIFICATEURS INSTANTANÉS DU MOUVEMENT.

32. *Classification des modificateurs instantanés du mouvement. Définition.* — On appelle *modificateur instantané* du mouvement toute pièce destinée à changer à volonté, et tout d'un coup, le mouvement d'une ou de plusieurs pièces d'une machine. Les modificateurs peuvent se classer en trois espèces distinctes, selon l'objet qu'ils ont à remplir. La première espèce a pour but, ou d'interrompre le mouvement ou de le reproduire pendant un temps fini, d'opérer, en un mot, ce qu'on entend par *embrayage* ou *désembrayage* des pièces. La deuxième espèce de ces modificateurs doit changer l'état du mouvement de quelque partie, pendant un instant fort court, c'est-à-dire momentanément, et il arrive que c'est la machine elle-même qui remplit la fonction de rendre ou de donner le mouvement par des mécanismes à détente, des ressorts, des encliquetages, par des roues à rochet, etc. Enfin, la troisième espèce sert à modifier, à rendre double ou triple la vitesse d'une machine, sans l'arrêter, pendant qu'elle est en action. Nous allons parcourir succinctement les plus importants modificateurs de chacune de ces trois classes, et qui sont consacrés par l'usage ou par leur bonté. Donnons d'abord quelques définitions indispensables.

On sait qu'un *manchon* n'est autre chose qu'un cylindre creusé intérieurement et susceptible d'embrasser un arbre sur tout son pourtour, et qu'il diffère d'un tambour en ce que le manchon est plein et que le tambour porte

des bras. Cela posé, toute roue ou poulie, tout manchon ou tambour qui est lié d'une manière invariable à un arbre de rotation ou qui fait corps avec lui, se nomme *fixe*. Si une roue ne peut que glisser le long de son arbre, sans cesser d'être entraînée dans le mouvement de rotation, on la dit libre *par glissement*. Enfin, quand une roue ne peut que glisser, et que seulement elle peut tourner sur elle-même sans entraîner l'arbre dans le mouvement de rotation, on la nomme *roue folle* ou *poulie folle*.

Nous ne dirons rien sur les roues fixes, attendu qu'il est facile de les concevoir.

Quant aux roues libres par glissement sur un arbre, nous ferons observer qu'on leur donne cette qualité de deux manières, soit en les liant invariablement à cet arbre et en laissant à ce dernier la faculté de glisser longitudinalement sur des coussinets, soit encore en ajustant l'œil par lequel elles embrassent l'arbre, avec cet arbre lui-même, de façon qu'avec très-peu de jeu, la roue et l'arbre puissent glisser à *frottement doux*, l'un sur l'autre, et s'entraîner réciproquement par leurs parties saillantes dans le sens de la rotation. A cet effet, comme toute roue peut être liée invariablement à son manchon, on doit concevoir que l'arbre et l'œil du manchon reçoivent la forme d'un carré (fig. 306, 1), ou d'une figure régulière quelconque (fig. 306, 2) ayant des saillies et des rentrants. Mais il est très-difficile d'ajuster sans beaucoup de jeu deux pièces ainsi conformées ; il vaut mieux faire l'arbre et l'œil du manchon circulaire, ce qui s'exécute avec perfection sur le tour, et placer en saillie sur l'arbre (fig. 306, 3), ou dans l'intérieur du manchon (fig. 306, 4), un tenon ou languette parallélipipédique ou cylindrique, qui s'engage dans une rainure plus ou moins longue pratiquée à l'une ou l'autre de ces deux pièces (fig. 306, 5). Nous ne saurions entrer ici dans des détails sur la construction de ces pièces, qui donnent lieu d'ailleurs à une grande sujétion.

Nous proposerons seulement, à la place des systèmes précédents, inventés pour le glissement des roues sur leurs arbres, cet autre procédé plus simple. L'arbre CD (fig. 307) et l'œil du manchon étant l'un et l'autre parfaitement circulaires, le manchon M qui conduit la roue ou qui lui est fixé invariablement, serait terminé extérieurement par une surface parfaitement cylindrique, qui porterait une rainure ou une saillie continue parallèle à l'axe et destinée à glisser le long d'une pièce de fer solide AB. La longueur AB de cette pièce dépendrait de l'amplitude de la course qu'aurait besoin de prendre la roue sur son arbre, et les extrémités de cette même pièce seraient fixées par ses deux bouts avec l'arbre CD, auquel elle serait parallèle et hors duquel elle formerait saillie. En général, la solidité de ce système sera d'autant plus assurée, que la distance de AB à l'axe sera plus grande et que la longueur de cette pièce sera plus courte. Au lieu même de pratiquer une mortaise sur toute la surface du manchon, on pourrait se borner à des oreil-

les embrassant de part et d'autre la pièce AB (fig. 308), et placées deux à deux à chaque extrémité du manchon.

Lorsque la roue ou poulie doit être folle, sa disposition est très-simple : l'arbre et l'œil de la roue sont circulaires et concentriques dans la partie en contact, et la roue s'appuie de part et d'autre contre des épaulements de l'arbre. Ceci étant entendu, passons à la première espèce de modificateurs, c'est-à-dire à ceux qui doivent opérer l'embrayage ou le désembrayage.

33. *Embrayage des roues dentées.* — La figure 309 montre le moyen de désembrayer, ou de désengrener deux roues dentées. A est une roue fixe, et B une autre roue qui peut glisser le long de son axe supposé fixe. Cette dernière roue porte un manchon extérieur C avec une gorge dans laquelle s'engage un levier EF qui pousse les épaulements de ce manchon par une partie arrondie *a* et qui tourne autour d'un point fixe D. L'extrémité E de ce levier est tiré au moyen d'une ficelle. A la place de la partie arrondie *a* du levier, on pourrait substituer une roulette fixée avec le levier. Dans tous les cas il est aisé de voir comment on fait glisser la roue B pour la désengrener de la roue fixe A. Toutefois, ni ce système, ni tout autre équivalent, ne saurait servir pour rendre le mouvement à une machine au repos, quand la masse et la vitesse des pièces à mouvoir sont très-grandes. Leur inertie à vaincre deviendrait trop considérable, et il se produirait un choc capable de briser les extrémités des dents en prise au moment de l'engrènement. Voilà pourquoi on n'emploie ce mode de remblayer et de désembrayer que dans le repos de la machine ou que quand elle marche avec lenteur.

34. *Embrayages au moyen de plateaux avec saillies ou rentrants.* — Afin d'éviter la rupture dans toutes les circonstances où elle pourrait avoir lieu, on a imaginé de rendre la roue B folle et indépendante du manchon (fig. 310). Ce dernier est mobile par glissement sur l'axe, et se rapproche ou s'écarte de la roue B par le moyen d'un levier, comme précédemment; et sans que pour cela la roue soit désengrenée. Mais le manchon s'y engage de diverses manières. Tantôt le manchon C est armé d'un plateau qui porte deux mentonnets *dd*, destinés à s'engager dans deux trous de la roue dentée B quand on veut que son mouvement devienne commun à l'arbre EF. Ici la rupture, si elle avait lieu, ne se manifesterait qu'à l'égard des deux tenons *dd*, et aurait moins d'inconvénient que pour les dents de la roue B.

Tantôt la roue B est terminée par un plateau M (fig. 311), garni de saillies convergentes vers le centre *a*, *b*. *c*, qui s'engagent avec les creux égaux à ces saillies, pratiqués dans un plateau N qui fait corps avec le manchon C. Il est entendu que ce dernier glisse librement le long de l'axe, et que c'est encore par sa réunion avec la roue folle B, que l'arbre participe au mouvement de rotation reçu par l'engrènement permanent de cette dernière avec une autre roue dentée fixe. Quelquefois les plateaux du manchon et de la roue sont découpés en crémaillère, ou terminés vis à vis l'un de l'autre par

des plans inclinés que limitent la surface extérieure cylindrique des plateaux, et des plans verticaux qui convergent vers le centre. Les projections de cette dernière espèce d'embrayage sont dessinées dans la figure 312. Enfin, les mêmes systèmes sont encore applicables, en fixant invariablement le manchon C (fig. 313) après la roue B, qui devient à la fois mobile par glissement et folle. L'autre plateau D, qui n'appartient pas au manchon, fait corps avec l'arbre fixé entre des coussinets. Ici la roue motrice B doit être fort longue, si on veut encore éviter le désengrènement des roues.

35. *Cônes de friction.* — Au lieu de faire embrayer la roue R et son manchon C par des pièces à saillies et à rentrants, on fixe à la première un tambour conique creux A (fig. 314), et au manchon C un pareil tambour B qui entre dans l'intérieur de l'autre cône, quant à l'aide du manchon on vient à l'approcher avec force. Ici on peut conduire les choses avec une telle adresse que le mouvement ne soit transmis que peu à peu à celle des deux pièces qui doit recevoir le mouvement de rotation; car on est maître de faire accroître autant qu'on le veut le frottement des cônes par la pression latérale du manchon. Ce système, excellent sous ce rapport, n'est pas bon pour les machines puissantes, attendu que l'effort pour embrayer et désembrayer peut être très-grand.

Nommons F l'effort qui agit sur le cône ABCD (fig. 315), destiné à pénétrer dans l'autre. Ce cône ABCD pressera le cône extérieur en des points qui seront répartis le long du cercle moyen de la surface selon laquelle les deux cônes se touchent; et ces points seront autant de points d'appui où seront appliquées des composantes normales partielles et égales q, selon lesquelles la force F pourra être décomposée. Ainsi, la pression totale qui résultera entre ces deux cônes, et qui est analogue à celle que le coin exerce sur ces points d'appui dans la matière qu'il est destiné à fendre, peut être représentée par $2\pi rq$, r étant le rayon moyen de la circonférence de contact. On peut supposer d'ailleurs que le cône ABCD écarte les parois du cône extérieur, de manière à se mouvoir parallèlement à lui-même et à prendre la position très-voisine *abcd*. Le chemin élémentaire estimé sur la direction de F sera alors Aa, et le travail de cet effort égal à $F \times Aa$. Si on abaisse la perpendiculaire ao sur le côte AB du cône, cette perpendiculaire sera le chemin estimé sur une pression normale partielle q; $q \times ao$ exprimera le travail de cette pression normal; et il est évident que la somme des travaux de toutes les forces q sera $2\pi r \cdot q \times ao$. Or la pression totale résultant $2\pi rq$ est aussi représentée par Q, en sorte que le travail élémentaire dû à toute la pression sera $Q \times ao$. Quant au frottement le long des génératrices des cônes, il sera fQ, et son chemin élémentaire ne sera autre chose que Am. Donc le travail total du frottement aura pour valeur $fQ \times Am$. On aura, par conséquent,

$$F \times Aa = (Q \times ao) + (fQ \times Am).$$

d'où

$$F = Q\,\frac{ao + (f \times Am)}{Aa}.$$

Or, le frottement fQ doit être égal à l'effort P, qui, agissant à la circonférence de contact, est nécessaire pour entraîner les deux cônes dans le mouvement de rotation. Ainsi,

$$P = fQ, \quad \text{ou} \quad Q = \frac{P}{f}.$$

Faisant cette substitution dans la valeur de F, on trouvera

$$F = \left(\frac{Am}{Aa} + \frac{ao}{fAa}\right) P.$$

Cette valeur nous apprend que l'effort à faire F est d'autant moindre, que le rapport $\frac{ao}{Aa}$ est plus petit et le coefficient f du frottement plus considérable. Si, maintenant, on fait attention que le premier rapport est relatif à l'inclinaison de la génératrice du cône, on doit conclure que plus l'angle des cônes sera aigu et plus les surfaces en contact seront raboteuses, plus l'effort F du manchon aura d'action pour produire le frottement nécessaire à l'entraînement des deux surfaces.

36. *Embrayage au moyen de la bride de friction.*—Une roue BB′ (fig. 316), faisant corps avec son arbre tournant DD′, porte à la couronne une gorge qui est embrassée par une bride en fer *abcde*, composée de deux branches réunies aux extrémités d'un même diamètre par des vis f et e. En serrant plus ou moins les pattes saillantes accouplées en f et e, on augmente à volonté la pression et par suite le frottement de la bride *abcde* contre la gorge de la roue. C est un manchon à gorge à glissement, muni de deux tenons saillants A, A′, qui, par le rapprochement du manchon, peuvent s'épauler en sens contraire ou dans des positions diamétralement opposées contre les saillies accouplées de la bande en e et f. On voit qu'alors le manchon en tournant avec son arbre FF′ entraîne la bande de fer *abcde* et que celle-ci entraîne la roue qu'elle enveloppe, ainsi que son arbre. A la vérité, lors de l'instant de la prise, la roue résistera d'abord en vertu de son inertie, et le ressort glissera en frottant autour de sa gorge, avec beaucoup de lenteur. Mais bientôt la vitesse augmentera au point que le travail du frottement deviendra assez considérable pour faire marcher la roue avec la bande.

La même figure (316) fait voir qu'avec les moyens qui précèdent, il est possible de suspendre à volonté ou de rétablir le mouvement, entre deux arbres placés bout à bout.

Enfin, si le manchon C et la roue BB′ étaient montés sur le même arbre, et que cette dernière fût folle, on reconnaît combien il serait aisé de la faire participer au mouvement de l'arbre au moyen des deux tenons A et A′.

37. *Manœuvres des manchons d'embrayage.* — Faisons connaître quelques moyens de manœuvrer les manchons d'embrayage. Déjà nous avons parlé (3e partie, 33) du levier simple avec son mentonnet ou sa roulette; quand un levier simple ne suffit pas, on emploie un système de plusieurs leviers qui

augmente le chemin de la puissance et diminue celui du manchon. Le moyen le plus parfait est le suivant pour faire désembrayer par les machines elles-mêmes ; il a été inventé à la fonderie de Toulouse par M. le chef de bataillon Aubertin. Ce moyen consiste à creuser dans la gorge du manchon C (fig. 317) une hélice, pour y laisser tomber une espèce de levier *abd*, mobile autour de deux supports fixes *a* et *b*, et armé d'un fort bouton *e*, qui doit finir par se loger dans le creux de l'hélice. Dès lors le mouvement de rotation force le manchon à glisser le long de la partie carrée de l'arbre jusqu'à ce que le désembrayage de la roue D qui est folle, et de l'arbre E, s'ensuive.

38. *Embrayage des tambours à courroie ou poulies à corde.* — A (fig. 318) est une poulie folle, ou libre par tournoiement sur l'axe, et B une autre poulie fixe on faisant corps avec l'arbre. Si on fait passer la courroie C sur A, le mouvement de l'arbre A est suspendu, parce que cette poulie tourne indépendamment de l'arbre ; si, au contraire, on fait passer la courroie sur la poulie B, le mouvement est rendu à l'arbre. Pour manœuvrer la courroie, on l'embrasse par une fourche *ab* en fer qui reçoit son mouvement d'une tige ou d'un levier, et qui fait céder facilement la courroie. Cette manœuvre de la fourche simple ne conviendrait plus aux cordes qui ne tarderaient pas à être usées. On y remédie en armant la fourche de deux rouleaux *a* et *b* (fig. 319), qui embrassent la corde ; les axes de ces rouleaux se réunissent sur une même tige qui reçoit autour de O un mouvement de rotation au moyen du levier OL. Ce dernier mécanisme existe à l'usine des Pucelles, à Metz, où il sert d'embrayage au tour à moyeux de l'arsenal du génie ; le levier OL se trouve sous la main de l'ouvrier qui intercepte ou rétablit à volonté la transmission du travail, lequel est communiqué par le moteur général de toutes les machines.

Enfin, on désembraye aussi, en détendant les courroies verticales, au moyen du rouleau de tension. Dès que ce dernier abandonne une courroie C (fig. 320), celle-ci quitte la roue inférieure A qui sert de moteur, et cesse d'entraîner la roue B. Si les courroies n'étaient par verticales, ce système ne vaudrait rien, parce qu'alors la courroie s'userait contre le rouleau de tension.

39. *Embrayage à axes mobiles.* — On peut encore embrayer ou désembrayer deux roues, en rendant mobile l'axe de l'une d'elles, ou en le rendant susceptible d'un mouvement de translation. Si ces roues se communiquent le mouvement par des courroies, cordes ou chaînes sans fin verticales, il suffit d'élever ou d'abaisser légèrement l'axe de la roue supérieure, ou plutôt le porte-coussinet *a* (fig. 321) de cet axe, au moyen du levier *boc*, mobile autour du point *o*, ou bien encore au moyen d'une corde verticale *ef*. Ce système sert dans les moulins à farine, pour mouvoir les tire-sacs. On emploie aussi à cet objet deux roues sans dents, qui, en se pressant par les

couronnes, se conduisent réciproquement (fig. 322). Lorsqu'on diminue la pression ou qu'on écarte l'une des roues de l'autre, le mouvement cesse d'être communiqué.

On fait également usage de ce procédé, pour désengrener deux roues dentées. AB (fig. 323) est un pont ou porte-coussinet de la roue d'embrayage porté sur une cale E, fixée à l'extrémité d'un levier EF, mobile autour d'un axe qui traverse carrément la cale. En abattant le levier et en lui donnant une position verticale, la cale soulève le pont AB qui pose carrément sur elle. Deux systèmes pareils sont adaptés aux deux ponts qui supportent les coussinets de la roue.

Quelquefois aussi on fait marcher l'arbre de la roue parallèlement à lui-même, en faisant glisser les coussinets entre des guides solides. Le mouvement se donne aux coussinets L (fig. 324), à l'aide de crémaillères C, manœuvrées par des crics. Les crémaillères portent à leurs extrémités des mâchoires M, qui embrassent l'arbre extérieurement aux coussinets : ce système est employé à l'usine des Pucelles, déjà citée, pour désengrener la lanterne de la scierie; les roues des deux crics sont rendues solidaires entre elles. Enfin, une clef O′, qui, en passant au travers des brides *b* de chaque coussinet, se loge dans le jeu ménagé pour sa translation, est destinée à maintenir la roue dans son embrayage.

40. *Moyens de changer le sens de la rotation d'un arbre.* — Lorsqu'on veut changer à volonté le sens de la rotation d'un axe, il suffit d'un manchon *à glissement* sur cet axe, susceptible d'embrayer tour à tour par chaque extrémité avec deux roues folles montées sur cet arbre, et douées chacune d'un mouvement de rotation en sens contraire.

C et D (fig. 325) sont des roues fixes qui marchent en sens contraire, et qui engrènent dans les roues A et B, folles sur leur axe ; en sorte que chacune de ces dernières tourne dans des directions différentes et sans entraîner l'arbre sur lequel elles sont montées. EF est un manchon armé de deux griffes à ses extrémités, et glissant sur l'arbre des deux roues A et B. Si on le pousse contre la roue A, celle-ci fait tourner le manchon et l'arbre avec lui. Si c'est contre la roue B, l'arbre prend alors le mouvement de cette roue. Ce système est établi à Clichy, près Paris, et sert à faire mouvoir sur un laminoir à plomb de très-fortes lames, tantôt dans un sens et tantôt dans l'autre. Ici le mouvement est très-lent et permet d'embrayer ou de désembrayer sans arrêter le moteur, parce que la vitesse est fort petite, ainsi que le moment d'inertie du laminoir.

Le manchon double sert encore à transmettre très-simplement le mouvement de rotation à un axe perpendiculaire à celui de la roue motrice, tantôt dans un sens, tantôt dans l'autre. A (fig. 326) est une roue motrice, qui fait tourner l'arbre BC, ainsi que la roue conique D, fixé invariablement à cet arbre. La roue D engrène d'ailleurs dans les deux roues G et H, qui sont

folles sur l'arbre LM ; mais le double manchon EF qui glisse sur ce dernier, en se rapprochant de l'une ou de l'autre roue G et H au moyen des griffes de ses extrémités, communique à l'arbre LM le mouvement propre à chacune d'elles.

41. *Moyens de changer la vitesse du mouvement.* — Pour changer la vitesse du mouvement instantanément, on emploie divers appareils dont nous indiquerons les quatre principaux. Le premier appareil consiste dans deux systèmes de poulies ou tambours alternes, énarbrés sur deux axes parallèles (fig. 327). Leur disposition est telle que si, par exemple, les diamètres supérieurs des rouleaux croissent de gauche à droite, les diamètres inférieurs croîtront de droite à gauche, et que les diamètres de deux rouleaux placés dans le même plan vertical formeront une somme constante. En un mot, les couronnes qui correspondront en face l'une de l'autre, se trouveront à même distance de dehors en dehors. Une courroie sans fin enveloppe deux couronnes correspondantes, et par des moyens qu'on peut voir sur place, elle passe rapidement d'une couple de couronnes à l'autre pendant le mouvement; ce qui modifiera la vitesse de l'arbre inférieur : cette vitesse sera plus rapide que celle de l'arbre supérieur, ou moindre, selon que le diamètre d'un rouleau en prise inférieurement sera plus petit ou plus grand que le diamètre du rouleau correspondant de l'arbre supérieur.

Les cônes alternes sont également montés sur des axes parallèles, et sont embrassés par une courroie sans fin (fig. 328); seulement leurs génératrices opposées extérieurement sont parallèles. On peut faire varier les vitesses d'une manière instantanée, en faisant marcher la courroie au moyen d'une griffe.

A (fig. 329) est une grande roue plane fixée à son arbre, et B une petite roue tournant avec son axe CD, lequel peut glisser dans ses coussinets. En éloignant plus ou moins la roue B du centre de A, la vitesse transmise à la première par simple contact est rendue plus forte ou plus faible à volonté.

Enfin, le dernier moyen que nous indiquerons consiste dans une roue B′ (fig. 330), en contact avec un cône A′, dont la génératrice est parallèle à l'axe de la roue. Plus le cercle du cône avec lequel la roue B′ se trouve en contact est grand, plus la vitesse de cette roue devient considérable.

42. *Moyens de changer le mouvement par intervalles.* — Nous avons donné les moyens de modifier d'une manière constante et permanente le mouvement des machines ; en voici d'autres qui servent à le changer par intervalles.

1° *Roues à détente.* — Une roue à détente n'est autre chose qu'une roue folle B (fig. 331), montée sur un arbre qui reçoit un mouvement de rotation à l'aide d'une manivelle. A cet arbre est fixée la pièce A, susceptible de s'accrocher à la saillie *b* d'un levier *ab*, dit *détente*, et mobile autour d'un axe *m* qui fait corps avec le plateau de la roue. Enfin, un ressort *s* maintient l'extrémité *b* accrochée avec la pièce A. Si donc on imagine l'arbre en mouvement dans le sens LM, la pièce A le suit, et ne tarde pas à s'accrocher avec

la saillie *b*; puis elle entraîne le levier *ab* avec la roue B, qui fait alors monter un poids ou un piston par le moyen d'une corde D, enroulée autour de sa gorge. Mais aussitôt que dans sa course la détente *ab* a rencontré une cheville extérieure ou arrêt E, cette détente tourne autour de son axe *m*, et est bientôt abandonnée par la pièce A, ainsi que la roue B. Celle-ci, sollicitée par le poids qu'elle a soulevé, prend un mouvement en sens contraire sur l'axe, qui continue le sien dans le sens de celui de la manivelle, et le poids redescend. On conçoit comment les choses recommencent par chaque tour de manivelle.

2° *Déclics.* — Un système analogue est employé dans les sonnettes à *déclic* pour faire échapper du haut de sa course le mouton destiné à battre les pieux. Seulement le mouvement est toujours rectiligne, au lieu d'être circulaire. A (fig. 332) est un mouton en fonte suspendu par son anneau *cd* au crochet *c* d'un levier *ef*. Ce levier tourne autour d'un boulon *g*, logé dans une chape creuse en fonte LM, et il est forcé de saisir l'anneau *cd*, par un ressort *x*, également fixé dans la chape LM. Une corde *ab*, enroulée à une poulie, soulève la chape LM, et par suite le mouton A, jusqu'à ce que le levier *ef* ait rencontré dans sa course verticale un arrêt B. Alors le levier *ef* tourne autour de son bouton *g*, le crochet C se désengrène de l'anneau *cd* du mouton, et ce dernier retombe seul en vertu de son propre poids. Si l'on abandonne ensuite la chape LM, il est évident qu'en retombant sur le mouton, elle forcera, malgré l'action du ressort *x*, le crochet *c* du levier *ef* à s'engager de nouveau dans l'anneau *cd* du mouton. Ce mécanisme est à peu près celui que M. Aimé a exécuté dans la galerie des modèles de l'École d'application, si ce n'est que dans ce dernier, deux leviers semblables au levier *ef* de l'appareil précédent manœuvrent autour d'un même boulon, et sont pressés respectivement chacun par un ressort.

3° *Roue à rochet.* — C (fig. 333) est une roue folle sur un arbre; B est une autre roue montée sur la partie carrée de ce dernier, et armée de dents crochues dans lesquelles s'engrène un déclic *dab*, fixé à la roue folle C, et poussé à son talon *d* par un ressort *ec*, fixé en *e*. Le jeu de ce déclic est tel que, si vous faites mouvoir de gauche à droite la roue à rochet B, ainsi que son arbre, leur système tournera indépendamment de la roue C, qui demeurera au repos, parce que les dents de B échapperont au déclic *dab*. Mais si, au contraire, la roue B reçoit un mouvement de droite à gauche, les dents de celle-ci seront arc-boutées dans le déclic *dab*, et la roue folle C sera forcée de suivre le mouvement de la roue à rochet et de son arbre.

La roue à rochet est employée dans les mouvements de pendule. Fixée sur un arbre carré, elle échappe à un déclic dans le sens où il faut la tourner avec une clef pour opérer le bandement du ressort moteur. Mais dès que ce dernier exerce son action, la roue à rochet tourne en sens contraire à celui dans lequel on a monté le pendule et entraîne avec elle la roue folle destinée à transmettre l'action motrice du ressort aux autres pièces.

Ce même moyen peut également servir à suspendre l'action des moteurs dans les grandes machines, sans arrêter le mouvement de ces machines. J'en citerai une application à un moulin de Metz mû par un manége. La meule de ce moulin, qui fait de quatre-vingt-dix à cent tours par minute, agit en même temps comme un volant, et elle ne saurait s'arrêter instantanément. Par conséquent, si le cheval attelé à la Barre du manége avait besoin de prendre un repos momentané, de quelques minutes par exemple, la chose ne saurait avoir lieu, puisqu'en vertu de son inertie la meule tendrait à persévérer dans son mouvement, et continuerait à pousser la lanterne, qui s'engrène dans la roue concentrique au manége à la barre duquel le cheval est attelé. Voyons donc s'il serait possible que cette réaction ne s'étendît pas au delà de la lanterne. Nous commencerons d'abord par rappeler que, pour faire mouvoir le manége d'un moulin, un cheval est attelé à l'extrémité de la barre AB (fig.334), qui fait corps avec un arbre tournant CD. Une roue dentée EF, invariablement fixée à cet arbre vertical, fait tourner une lanterne GH, dont l'axe M imprime, par une certaine combinaison de pièces, le mouvement aux meules, de telle sorte que le mouvement de ces dernières peut être regardé comme solidaire avec celui de l'axe M de la lanterne. Cela posé, voici comment on doit concevoir la disposition cherchée. La lanterne est folle sur son arbre M (fig. 335); mais ses deux plateaux, dont un est représenté par CD, sont traversés par une pièce de bois *o*, susceptible de se soulever de bas en haut dans les deux mortaises qui la supportent sur les plateaux. L'arbre M porte une frette *pqr*, armée d'un mentonnet *m*, qui s'applique d'un côté selon un plan, contre la pièce de bois *o*, et qui du côté opposé se raccorde tangentiellement avec la surface extérieure de la frette. Enfin, la pièce *o* est pressée fortement contre le mentonnet *m* par un ressort *ab*, fixé à chaque plateau de la lanterne. Supposons maintenant que, par l'action du cheval, la roue du manége tourne de E vers F, il est évident qu'elle entraînera la lanterne de C vers D, et que la pièce *o* communiquera le mouvement de cette dernière au mentonnet *m* qui l'arc-boute, et par conséquent à la frette *pqr*, ou enfin à l'arbre M, auquel cette frette est fixée invariablement. Mais si le cheval, par une cause quelconque, vient à suspendre son mouvement momentanément, la roue EF suspend le sien, et la lanterne CD cesse de tourner. Toutefois, l'arbre M, entraîné par les meules, continue à se mouvoir, le mentonnet *m* s'éloigne de la pièce *o*; puis, après une révolution complète de l'arbre, il se présente à cette pièce *o* par le côté où il se raccorde tangentiellement avec la frette, et il la soulève peu à peu et sans choc dans ses mortaises. Celle-ci retombe dès que le mentonnet s'en est échappé. Le mentonnet s'éloigne encore dans le même sens que la première fois; de sorte que la pièce *o* se trouve soulevée une fois à chaque révolution, sans que la lanterne CD, la roue EF, le moteur, participent aux mouvements de l'arbre M, ou des meules par lesquelles celui-ci est forcé de se mouvoir encore au moment où le cheval s'est arrêté.

4° *Freins à talon ou à excentrique.* — Soit *a* (fig. 336) un boulon mobile forcé de s'appuyer par sa partie arrondie contre la couronne ABC d'une roue fixée invariablement avec l'arbre D. Il est évident que le mouvement est toujours possible de A vers B. Mais si un accident quelconque faisait revenir la roue sur elle-même, ou de B vers A, le boulon *a* tournera et s'arc-boutera sur la couronne, jusqu'à ce que le mouvement soit empêché.

Considérons encore une pièce verticale AB (fig. 337) portant un plateau CD, et glissant entre des guides *a* et *b* à frottement doux; il est possible de maintenir cette pièce à une hauteur déterminée au moyen de l'excentrique *g* à talon et à levier, qui l'empêchera de descendre. La vis de pression produit à la vérité le même effet, mais ici cet effet se produit plus rapidement.

Les *échappements* des montres et des horloges appartiennent aussi à la classe des modificateurs qui nous occupe; mais ils ont plus particulièrement pour objet de régulariser le mouvement.

V.

DES MODÉRATEURS ET RÉGULATEURS.

43. *Objet des modérateurs et des régulateurs.* — Le mouvement tend quelquefois à s'accélérer dans les machines, ainsi que cela peut arriver lorsque le moteur est un contre-poids abandonné à lui-même. La vitesse deviendrait alors tellement rapide, que des accidents graves ne manqueraient pas bientôt de survenir. Aussi, pour maintenir la vitesse dans des limites convenables, certaines pièces ont-elles pour objet soit d'augmenter les résistances quand les puissances deviennent prépondérantes, ou de modifier ces puissances elles-mêmes dès qu'une accélération ou un ralentissement dans le mouvement se manifeste. Ces pièces sont précisément ce que nous entendons par *modérateurs* ou *régulateurs*.

44. *Modérateurs.* — Nous nous occuperons d'abord des modérateurs ou des moyens d'augmenter les résistances pour s'opposer aux accélérations de vitesse. Ces moyens sont : 1° le volant à ailettes; 2° le frottement ordinaire; 3° les freins.

1° *Volant à ailettes.* — Les tournebroches, les horloges qui reçoivent le mouvement par la descente d'un contre-poids, sont armés, comme on sait, d'un volant à ailettes, ou d'un système de bras et de surfaces planes, dont l'axe vertical de rotation porte une vis sans fin avec des hélices que conduisent les dents d'une roue de la machine. Les ailettes, en se mouvant circulairement dans l'air (fig. 338), éprouvent de sa part une résistance qui croît

à peu près comme le carré de la vitesse (1re partie, 60) que le contre-poids leur imprime. Si leur surface est calculée (*Méc. Ind.*, Cours de la 1re année, 213) de manière que leur résistance, estimée d'après la vitesse permanente à la machine, fasse équilibre à l'action du contre-poids, on voit que l'horloge ou le tournebroche se mouvra uniformément, et que la vitesse restera toujours dans la limite assignée. Cet exemple nous montre une vis sans fin conduite par une roue dentée, et cela paraîtrait contraire à ce qui a été dit au nº 27; si l'on ne faisait attention que, pour le tournebroche, les filets de la vis sont très-inclinés, et que le frottement est d'autant plus facilement vaincu que la pente de ces hélices est plus roide ; au lieu que dans les machines puissantes, les filets de la vis sont nécessairement fort peu inclinés.

2° *Frottement ordinaire.* — Lorsque des voitures passent d'une route horizontale à une route descendante très-inclinée, leur poids deviendrait capable de produire une accélération dangereuse dans leur mouvement, et il importe de leur opposer une plus grande résistance. Remarquez que la résistance ordinaire des voitures n'est occasionnée que par celle des roues contre le terrain, laquelle est alors un frottement de la deuxième espèce, ou un frottement de roulement. On la transformera en un frottement de première espèce ou de glissement, en empêchant les roues de tourner et en les laissant frotter contre le terrain. Mais, afin que leurs bandes ne s'usent pas trop vite, on a recours au sabot métallique *s* (fig. 339), lequel, concentrique à la roue, s'interpose entre elle et le terrain ; ce sabot est retenu par une chaîne fixée à l'avant de la voiture.

M. Molard, directeur du conservatoire des arts et métiers, a inventé un procédé plus simple. Il consiste dans un arc de cercle en bois ou en métal, placé derrière une des grandes roues (fig. 340), de manière à pouvoir l'approcher de cette roue au moyen d'une vis de pression. Quand cette pression augmente, elle crée une résistance de frottement proportionnelle, et bientôt la roue perd à peu de chose près tout son mouvement. Il est évident qu'à l'aide d'un système de cette espèce, on ne peut pas dépasser l'effet de deux sabots. Ce procédé est généralement adopté dans toutes les diligences, et la manœuvre peut être faite par le conducteur du haut de l'impériale des voitures, à l'aide d'une combinaison de leviers.

3° *Le frein.*— Les freins ont pour objet d'arrêter subitement, ou du moins de modérer à volonté, la marche d'une machine. Un frein est un grand arc de cercle ABC (fig. 341) en bois, extérieurement garni d'une bande de fer. Une extrémité de cet arc est fixe, et l'autre boulonnée à l'extrémité du petit bras *oc* d'un levier coudé *boc*. Quand on fait force sur le grand bras *ob* de ce levier, le frein se rapproche d'une grande roue qui participe au mouvement général de la machine.

On peut encore se servir d'un levier BOA (fig. 342), dont le plus long bras est chargé d'un poids, et dont le plus court porte l'extrémité d'une courroie

qui, après avoir enveloppé la couronne de la roue dont on veut arrêter ou modérer le mouvement, est attachée à un point fixe. La roue repose d'ailleurs sur des coussinets *à bride*, afin qu'elle ne puisse pas être soulevée par la courroie quand on la bande. Ici la résistance du frottement n'a point de limites ; non-seulement on peut augmenter le poids P, mais encore on peut enrouler à plusieurs reprises la courroie autour de la roue ; et l'on sait (2e partie, 112) que le frottement croît très-rapidement à mesure que l'arc enveloppé est plus grand. Ce moyen est celui qu'on emploie pour ralentir et même pour suspendre le mouvement de l'arbre des ailes du moulin à vent.

Quoique ces freins aient l'inconvénient d'absorber en pure perte une portion plus ou moins grande du travail de la puissance, leur utilité est cependant incontestable dans beaucoup de circonstances. Nous l'avons déjà reconnu d'après le service qu'ils rendent aux voitures. Il en est de même pour ces roues destinées à lever des pierres et que des hommes font marcher en agissant sur des chevilles. Si, par une cause quelconque, ces roues venaient à céder à l'action du poids énorme des pierres qu'on soulève, les accidents les plus graves résulteraient et pour les hommes qui font mouvoir la roue, et pour ceux qui travaillent au fond de la carrière. Aussi, sur l'arbre de ces roues, a-t-on le soin d'établir des freins dont la disposition est indiquée sur la figure 343 ; où L représente l'arbre du treuil, P une pierre qu'on élève, ABC frein échancré en arc de cercle pour embrasser une partie du treuil, et mobile autour du boulon A ; Q poids suspendu à l'extrémité du frein pour forcer ce dernier à presser contre l'arbre du treuil

45. *Régulateurs.* — Les freins, ou modérateurs, peuvent, il est vrai, servir à régulariser le mouvement. Toutefois, comme ils ajoutent des résistances partout où on les emploie, on est convenu d'appeler *régulateurs* tous les dispositifs exempts de ce dernier inconvénient. Ils dépendent d'ailleurs de la nature soit du moteur, soit de l'opérateur, ou des fonctions de la machine. Aussi, leur nombre est trop considérable pour que nous les examinions tous les uns après les autres. Nous nous bornerons donc à exposer les principaux.

46. *Tambours régulateurs*, *tambours à spirale*. — Dans les machines qui servent à élever des fardeaux ou à tirer de l'eau du fond d'un puits, il arrive souvent que le poids à soulever n'est pas constant, parce qu'il est augmenté de celui de la corde ou de la chaîne à laquelle il est suspendu. Si le puits est profond, on conçoit que ce dernier poids peut être considérable. Comme le moment de la puissance qui fait mouvoir la machine doit être constant, et cela afin que les hommes qui la manœuvrent éprouvent le moins de fatigue possible, il faut faire en sorte que le moment de la somme des poids, tant du fardeau que de la chaîne pendante qui se raccourcit continuellement, soit aussi constant. En conséquence, on trace tous les cercles concentriques ré-

partis sur la longueur du treuil de manière à ce que cette condition soit satisfaite. Si nous appelons P (fig. 344) les efforts exercés sur les manivelles du treuil, R le rayon de ces manivelles ; $P \times R$ sera le moment de la puissance qui, comme nous venons de le dire, est constant. Désignons par Q le poids à soulever, par l la longueur de la chaîne pendante ba comprise depuis la hauteur de l'arbre du treuil jusqu'à une position particulière et quelconque du fardeau, et par p le poids du mètre courant de chaîne. Il est évident que $p \times l$ sera le poids de la partie pendante ab de la chaîne, et que $Q + p \cdot l$ sera la charge totale à soulever à l'instant où le poids Q occupe la position que l'on considère. Si je nomme r le rayon de la section du treuil sur laquelle la chaîne s'enroule à ce même instant, $(Q + p \cdot l)\ r$ sera le moment de la résistance, et, en vertu de l'équilibre du treuil (2[e] partie, 127), on aura, abstraction faite du frottement, l'égalité

$$(Q + p \cdot l)\,r = P \times R;$$

d'où l'on tire

$$r = \frac{P \times R}{Q + p \cdot l}.$$

Cette expression, dans laquelle l, ou l'abaissement du poids Q au-dessous du treuil, entre au dénominateur, nous apprend que le rayon du treuil doit être d'autant plus petit que le poids Q est à une plus grande profondeur, ou que la chaîne pendante est plus longue. Ainsi, ce rayon est le plus grand possible, quand le fardeau est parvenu à la hauteur de l'axe du treuil. Pour avoir le rayon du treuil r_0 dans cette dernière circonstance, on fera ab ou l égal à zéro ; ce qui donne

$$r_0 = \frac{P \times R}{Q}.$$

Appelons r_1 le rayon de la circonférence du treuil autour de laquelle la chaîne pendante s'enroule ; quand celle-ci s'est déroulée d'un premier tour ou quand sa longueur est devenue $2\pi \cdot r_0$, on trouve

$$r_1 = \frac{P \times R}{Q + p \cdot 2\pi \cdot r_0}$$

(π est le rapport 3,1416, de la circonférence au diamètre). Si la chaîne se déroule d'un nouveau tour ou de $2\pi \cdot r_1$, la longueur de chaîne pendante deviendra

$$2\pi \cdot r_0 + 2\pi \cdot r_1 = 2\pi\,(r_0 + r_1),$$

et si je nomme r_2, le rayon du nouveau cercle autour duquel cette chaîne pendante est enroulée sur le treuil, on verra facilement pourquoi

$$r_2 = \frac{P \times R}{Q + p \cdot 2\pi\,(r_0 + r_1)}.$$

On aurait de même, pour le rayon suivant,

$$r_3 = \frac{P \times R}{Q + p \cdot 2\pi\,(r_0 + r_1 + r_2)}.$$

La loi devient ainsi facile à saisir. On voit, d'après ce qui précède, que l'enroulement de la chaîne, au moment où le poids commence à être soulevé, doit commencer sur la partie la plus étroite du treuil. Si nous appelons H la profondeur du puits, le rayon r_n de cette partie, la plus étroite du treuil, sera évidemment égal à $\frac{P \times R}{Q + p \cdot 2\pi \cdot H}$. Quelquefois il arrive, afin d'éviter la perte du temps, qu'on fait enrouler le treuil par deux chaînes égales, mais en deux sens différents, de telle manière que, quand celle qui soulève un seau rempli d'eau ou du minerai qu'on veut extraire s'enroule, l'autre, qui conduit un seau vide, se déroule (fig. 345). Mais il n'y a pas lieu de tenir compte du poids des seaux, parce qu'ils sont égaux et se font constamment équilibre. Quant aux longueurs des deux chaînes pendantes, leur somme est constamment égale à la profondeur H du puits. Si donc je nomme l la longueur de chaîne ascendante dont le moment du poids s'ajoute au moment de la résistance, et l' la longueur de la chaîne descendante dont le moment du poids s'ajoute au moment de la puissance, on aura l'égalité

$$\overline{P \times R} + \overline{p \times l' \times r} = \overline{Q \times r} + \overline{p \times l \times r}.$$

Puisque la somme $l + l'$ des longueurs simultanées des deux chaînes pendantes est égale à H, on voit que

$$l' = H - l.$$

Substituant cette valeur dans l'équation précédente, on trouve

$$P \times R + p\,(H - l)\,r,$$

ou

$$P \times R + p \cdot H \cdot r - p \cdot l \cdot r = Q \cdot r + p \cdot l \cdot r.$$

Réunissant dans un même membre de l'égalité tous les termes multiples de r, on trouve

$$(Q - p \cdot H + 2p \cdot l)\,r = P \times R\,;$$

d'où

$$r = \frac{P \times R}{Q - p \cdot H + 2p \cdot l}.$$

Dans cette expression générale, r est le rayon des deux cercles auxquels s'enroulent simultanément les chaînes pendantes ascendante et descendante quand leurs longueurs sont l'une l et l'autre $H - l$. Ce rayon diminuant à mesure que la quantité l, c'est-à-dire la longueur de la chaîne qui soulève un seau plein, est plus grande, on voit que le treuil doit se composer de deux parties égales qui se renflent au milieu de sa longueur totale, et qui servent chacune au déroulement de la chaîne à vide, et à l'enroulement de la chaîne chargée d'un fardeau. Pour avoir le plus grand rayon, on fera $l = 0$ dans la valeur de r, et on trouvera

$$r_0 = \frac{P \times R}{Q - pH}.$$

Si nous voulons obtenir tous les autres, à partir de r_0, et sur chaque partie symétrique de la longueur du treuil, on trouvera, comme précédemment,

$$r_1 = \frac{P \times R}{Q - p.H + 2p.2\pi.r_0},$$

$$r_2 = \frac{P \times R}{Q - p.H + 2p.2\pi(r_0 + r_1)},$$

$$r_3 = \frac{P \times R}{Q - p.H + 2p.2\pi(r_0 + r_1 + r_2)}.$$

La fig. 345 indique d'ailleurs suffisamment la disposition à donner au treuil dans le cas actuel. Il est facile de reconnaître que le point d'attache des deux chaînes doit être sur le plus petit cercle de la partie du treuil où une chaîne s'enroule et sur le plus grand cercle dont l'autre se déroule. De cette manière, en effet, l'une et l'autre des chaînes agiront sur les plus grands rayons égaux des deux parties symétriques du treuil au moment où le seau chargé sera arrivé au haut du puits et le seau vide au fond. Mais, comme les bras du levier de ce dernier, quand il remontera, doivent aller en croissant, ainsi que ceux du nouveau seau vide, il sera nécessaire à chaque course de changer les points d'attache respectifs, des chaînes, pour qu'ils se trouvent sur la partie renflée du côté où la chaîne descendra, et sur le cercle le plus étroit du côté où la chaîne sera ascendante. Voilà pourquoi chaque moitié du treuil AB et BA′ sera munie de deux rochets de suspension, l'une à ses deux extrémités *a*, *b*, et l'autre à ses extrémités *a′* et *b′*.

On régularise plus simplement le travail de la résistance sur le treuil, au moyen d'une chaîne sans fin, enroulée plusieurs fois autour d'un cylindre (fig. 346) : car alors les deux portions de chaîne ascendante et descendante sont égales et se font équilibre, ainsi que le poids des deux seaux, et le rayon du treuil demeure constamment égal au moment de la puissance divisé par le poids absolu du fardeau. Ce système a cependant l'inconvénient d'exiger des chaînes trop longues et d'augmenter ainsi les dépenses, surtout quand on doit l'employer pour des mines très-profondes.

Les fusées de montre ont une disposition analogue aux tambours précédents. Un ressort en spirale est fixé d'une part à l'arbre L (fig. 347) et de l'autre à la surface intérieure d'un barillet A, qui peut tourner indépendamment de cet arbre. Une chaîne, attachée à la surface extérieure du même barillet, s'enroule autour d'une fusée C, qui tourne avec l'arbre M, et qui est montée sur une roue motrice D, laquelle fait corps avec une roue à rochet. La fusée C a la forme d'un cone à spirale ; c'est en la faisant tourner qu'on y enroule la chaîne H ; celle-ci communique ce mouvement au barillet, et force le ressort à se bander autour de l'arbre L. Ce ressort, ensuite, en vertu de son débandement, fait tourner le barillet B dans le sens de la flèche indiquée sur la fig. 347, et transmet son action, par l'intermédiaire de la chaîne H, à la fusée dont les rayons inégaux sont les bras de levier de cette

action, mais, comme cette action devient d'autant plus petite que le débandement est plus grand, ces bras de levier croissent à mesure que cette action diminue, et ils sont tels que si on nomme F l'action variable du ressort et r un bras de levier quelconque, le moment de cette action ou le produit $F \times r$ est toujours une quantité constante. Or, F varie suivant une loi que les horlogers trouvent ponr chaque espèce de ressort en mesurant les poids capables de résister au débandement qui a lieu pour chaque longueur de chaîne enroulée autour du barillet. D'où l'on voit que l'on aura facilement les bras de levier, un premier bras étant pris pour origine. Tous ces moyens sont bons lorsqu'on connaît la loi de la variation de l'effort, et quand cette loi est continue et régulière pendant plusieurs révolutions.

Nous passerons sous silence les régulateurs des autres moteurs et opérateurs, régulateurs qui ont pour but d'augmenter ou de diminuer l'action de la puissance ou de la résistance par des dispositifs qui varient avec chaque machine, et nous nous occuperons du régulateur à force centrifuge, qui, à dire vrai, peut être regardé comme le régulateur universel.

47. *Régulateur à force centrifuge.* — Supposez une roue horizontale AB (fig. 348) mise en mouvement par la machine et faisant corps avec son arbre CC. DI est une verge terminée par une boule de fonte pesante P, et qui tourne autour d'une articulation D. Cette tige est liée invariablement avec un levier DE, qui s'engage dans le manchon E, mobile par glissement snr l'arbre CC. Lorsque la roue AB tourne, la force centrifuge écarte d'autant plus la boule P de sa verticale, que la vitesse de rotation est plus grande; de plus, cette même force fait tourner le levier DE, qui pousse le manchon E. Celui-ci pousse un autre levier, GF, mobile autour de l'axe G; de là résulte un mouvement qui sert à fermer soit une vanne, soit une soupape, ou à bander un frein, afin de diminuer l'action du moteur lorsque la vitesse dépasse les limites dont on a besoin. Si, au contraire, la machine se ralentit, la boule P se rapproche de la verticale, le manchon E s'élève un peu, ainsi que le levier FG qui suit le mouvement du manchon; la vanne ou la soupape s'ouvre un peu plus, ou le frein se débande, et la puissance augmente. Telle est l'idée qu'on peut se faire du rôle que joue le régulateur PDE à force centrifuge.

Ordinairement le régulateur à force centrifuge se compose d'un losange à charnières ABCD (fig. 349), monté sur un arbre vertical CH, mis en communication de mouvement avec une pièce de rotation de la machine; le losange est fixé à cet axe par l'un de ses angles C, et en reçoit le mouvement; les verges supérieures CB et CD portent, sur leurs prolongements, des boules égales de métal P, P'; l'angle inférieur A porte un manchon ou annean qui embrasse l'axe CH et qui peut glisser le long de cet axe. L'effet de la force centrifuge sur les boulets est encore de soulever plus ou moins le manchon, qui, par la

communication d'un levier FG, sert à régler la dépense du moteur en faisant varier l'ouverture d'une vanne, d'un robinet, etc.

L'établissement d'un régulateur à force centrifuge dépend de deux conditions essentielles : l'une que le manchon A occupe une position déterminée pendant que la machine décrit un nombre voulu de révolutions dans un certain temps ; l'autre que quand la vitesse de la machine a acquis un excès fixé à l'avance sur celle que lui assigne la nature du travail, la force centrifuge des boules soit capable de régler l'ouverture de la vanne ou du robinet destiné à modérer l'action du moteur.

PREMIÈRE CONDITION. — Pour plus de simplicité, nous réduirons les diverses parties du losange à des lignes. Si, quand la machine possède la vitesse convenable, le manchon doit occuper une position fixe A (fig. 350) sur l'axe vertical, il résulte que ce manchon ne saurait éprouver aucune action de la part des pièces qui le lient aux vannes ou aux robinets, et qu'ainsi, dans la circonstance où cette première condition est satisfaite, le pendule régulateur n'est sollicité que par le poids des boules et par leur force centrifuge, correspondant à la vitesse assignée pour l'axe vertical du régulateur. Il y aura donc équilibre entre le poids des boules et leurs forces centrifuges : ce qui exige que la résultante du poids P de chaque boule dont l'action est verticale et parallèle à l'axe CA, et de sa force centrifuge dont l'action a lieu selon l'horizontale KI du centre de la boule ; que cette résultante, dis-je, soit dirigée dans la direction de la tige CI, ou passe par le point fixe C. Donc, si CI représente la grandeur de cette résultante, les côtés CK et KI du triangle CKI seront proportionnels, le premier au poids P d'une boule, et le deuxième à sa force centrifuge, que je nommerai F ; d'où l'on tire

$$\frac{F}{P}=\frac{KI}{CK}.$$

On sait d'ailleurs (2[e] partie, 68) que la force centrifuge d'un corps, de petites dimensions comparativement à sa distance au centre autour duquel il tourne (et c'est le cas de chaque boule P par rapport à la distance IK qui la sépare de l'axe vertical du régulateur), est égale à la force vive imprimée à ce corps, divisée par le rayon du cercle que décrit son centre de gravité. Or, en appelant v_1, la vitesse angulaire du poids P autour de l'axe lorsque la machine possède la vitesse convenable, et en observant que la vitesse de son centre de gravité et alors $v_1 \times KI$, la force vive de ce poids P est égale à $\frac{P}{g} \times v_1^2 \times \overline{KI}^2$ (2[e] partie, 60). Divisant cette force vive par le rayon KI, le quotient $\frac{P}{g} \times v_1^2 \times KI$ représentera la force centrifuge F de la boule P. Si nous substituons à F cette dernière valeur dans l'égalité $\frac{F}{P}=\frac{KI}{CK}$, on trouvera, après avoir supprimé le facteur commun P aux deux termes de la frac-

tion du premier membre, et le facteur KI commun aux deux termes de l'égalité, cette autre

$$\frac{v_1^2}{g}=\frac{1}{CK},$$

et, par suite,

$$CK=\frac{g}{v_1^2}.$$

On sait que la vitesse angulaire v_1^2, ou le chemin parcouru autour de l'axe à l'unité de distance pendant une seconde, équivaut au produit de 2π (π étant le rapport 3,1416 de la circonférence au diamètre) multiplié par le nombre n de révolutions que le régulateur doit parcourir en une minute, lorsque la machine marche convenablement, et divisé par 60, c'est-à-dire que

$$v_1=\frac{2n.\pi}{60}=\frac{n.\pi}{30}.$$

Ainsi, dans la valeur de CK, v_1 est connu, aussi bien que la gravité $g=9^m,81$. Donc, on aura déterminé CK, c'est-à-dire l'abaissement des boules au dessous du sommet supérieur C du losange. Or, ce losange ayant reçu des côtés d'une grandeur jugée convenable, et le sommet inférieur A, c'est-à-dire le manchon, devant avoir une position fixée d'après la constitution du moteur, et d'après ce dont la vanne ou le robinet seront ouverts pour vaincre toutes les résistances nuisibles et utiles de la machine mue avec la vitesse qui correspond à v_1, on voit ainsi que l'ouverture des verges se trouve entièrement déterminée, et, par conséquent, aussi la position de chaque boule sur les prolongements de ces verges. Car si leur ouverture est l'angle BCA, la perpendiculaire à l'axe menée par le point K, rencontrera les verges aux points I et I', qui seront les centres des boules. On peut encore assigner une règle plus simple pour la détermination CK. Nommons t la durée d'une révolution du régulateur à l'état du régime qu'on veut maintenir dans la machine, il est évident que 2π est le chemin parcouru pendant ce temps à l'unité de distance de l'axe, que $\frac{2\pi}{t}$ est le chemin parcouru à cette même distance, mais pendant l'unité de temps, et qu'enfin

$$v_1=\frac{2\pi}{t}.$$

Faisant cette substitution dans l'égalité précédente $CK=\frac{g}{v_1^2}$, nous aurons

$$CK=\frac{g}{\frac{4\pi^2}{t^2}}=\frac{gt^2}{4\pi^2};$$

d'où l'on tire

$$t^2=4\pi^2\times\frac{CK}{g};$$

et, par suite,

$$t=2\pi\sqrt{\frac{CK}{g}}.$$

Maintenant, si on se reporte à ce qui a été donné sur la durée des oscillations du pendule simple (2e partie, 76), on trouve que cette durée, pour un pendule d'une longueur égale à CK, équivaut à $\pi\sqrt{\frac{CK}{g}}$; ce qui nous apprend que la durée d'une révolution du régulateur est double de celle de l'oscillation du pendule qui aurait pour longueur la distance verticale des boules du régulateur au sommet supérieur de son losange. Si donc on veut trouver cette même distance, il suffira de suspendre une balle de plomb à un fil, et d'allonger ce fil au dessous de son point de suspension jusqu'à ce que la durée de ses oscillations soit moitié de la durée d'une révolution complète du régulateur; la longueur du fil qui remplira cette condition sera précisément la distance verticale cherchée.

SECONDE CONDITION. — Ce qui précède indique seulement que tant que la machine marche avec la vitesse qu'on s'est donnée, les boules demeureront par rapport au sommet supérieur du losange, à la distance verticale trouvée plus haut; qu'elles ne s'écarteront ni ne se rapprocheront, et qu'en un mot, le manchon qui conduit les leviers de manœuvre des vannes, robinets, etc., demeurera dans la même position. Mais si la vitesse venait à se ralentir, ce serait une preuve que les résistances auraient de la prépondérance sur la puissance, et que, cette dernière devant être augmentée, le régulateur aura besoin de faire ouvrir les vannes ou les robinets, pour rétablir la vitesse moyenne qu'on désire maintenir. De même, si la vitesse augmente, il faudrait, au contraire, diminuer l'action du moteur, c'est-à-dire fermer plus ou moins les vannes, et il est évident que le manchon ne saurait opérer ces divers effets, sans éprouver une certaine résistance que je nommerai p. C'est de cette résistance déterminée à l'avance, et qu'il est facile d'évaluer au moyen de poids capables de faire mouvoir les vannes ou soupapes régulatrices; c'est de cette résistance, dis-je, que nous allons conclure le poids P à donner aux boules.

Supposons, par exemple, qu'une petite accélération de vitesse ait été produite; les boules, en s'écartant, soulèveront le manchon, en sorte que la résistance p de ce dernier agira de haut en bas, ou dans le même sens que le poids des boules. Cette action ayant lieu précisément sur l'axe vertical CA (fig. 351), imaginons qu'elle soit représentée par la grandeur Aa. Elle se décomposera en deux autres composantes égales, Ab et Ad, qui, dirigées sur les côtés inférieurs du losange ABCD, pourront, à cause de la rigidité des verges, être regardées comme appliquées en B et en D selon les directions Bb' = AB, et Dd' = Ad. Décomposons de nouveau la force Dd' en deux autres : l'une, hD, concourant au point fixe C; et l'autre, Df, verticale. La première de ces deux composantes sera d'un effet nul, puisqu'elle passe par le point fixe C. Quant à la deuxième, Df, elle redeviendra égale à Aa, ou à p, par suite de l'égalité des triangles Ada et d'Df, qui ont chacun un côté égal

compris entre deux angles égaux. On démontrerait, par une décomposition analogue en B, que la force p s'y produira. Ainsi, cette résistance se répétera aux articulations B et D, tout en y conservant sa valeur primitive. Je fais observer que la force verticale Df ou p peut se décomposer en deux autres forces parallèles, appliquées, l'une au sommet invariable C, et l'autre au centre I de la boule P, attendu que les trois points C, D et I sont situés sur une même verge rigide CI. La première est évidemment d'un effet nul pour le mouvement; il ne reste que la deuxième, dont la valeur (2e partie, 20 et 21), d'après la composition des forces parallèles, équivaut à $Df \times \frac{CD}{CI}$ ou à $p \times \frac{CD}{CI}$, et qui s'ajoute au poids P de la boule. La même chose aurait lieu à l'égard de la boule P′.

Dès lors nous retombons dans un cas semblable à celui du paragraphe précédent, c'est-à-dire que chaque boule est sollicitée par sa force centrifuge F et par une force verticale $P + p\frac{CD}{CI}$, au lieu de la force verticale P. Ainsi, au lieu de la relation d'équilibre précédent, $\frac{F}{P} = \frac{KI}{CK}$, nous aurons ici cette autre

$$\frac{F}{P + p\frac{CD}{CI}} = \frac{KI}{KC};$$

Remplaçons la force centrifuge F par sa valeur correspondante à la vitesse angulaire v_1 de régime, et que nous avons trouvée dans le paragraphe précédent égale à $\frac{P}{g} \times v_1^2 \times KI$; notre égalité deviendra

$$\frac{\frac{P}{g} \times v_1^2 \times KI}{P + p\frac{CD}{CI}} = \frac{KI}{CK};$$

ou, en supprimant le facteur KI, et en multipliant les deux termes de l'égalité par $CK \times \left(P + p\frac{CD}{CI}\right)$, nous aurons, en définitive,

$$\frac{P}{g} \times v_1^2 \times CK = P + p\frac{CD}{CI}.$$

Dans cette relation, CK est connu d'après la première condition, p ou la résistance du manchon est également donnée, et il en est de même de CD et de CI. Donc, cette relation donnerait le poids P de chaque boule métallique. Mais il est impossible que le régulateur cède instantanément; car il y a nécessairement un intervalle pendant lequel la vitesse augmente avant que les tiges ne bougent. Donnons-nous cette limite de vitesse, et supposons que son

excès sur la vitesse moyenne v_1 soit de $\frac{1}{10}$ de cette dernière, en sorte que la vitesse sera $v_1\left(1+\frac{1}{10}\right)$, ou $\frac{11}{10}v_1$, au moment où la vanne s'ouvrira. Si, avant l'instant où cette vitesse est acquise, le mouvement n'a pas lieu, il est visible que la relation $\frac{P}{g}\times v_1^2\times CK = P + p\frac{CD}{CI}$ ne sera satisfaite qu'autant que v_1 y sera remplacée par $\frac{11}{10}v_1$, puisque, d'après notre hypothèse, c'est seulement pour cette dernière vitesse que la résistance p du manchon se manifeste. Nous aurons, par conséquent, après avoir divisé par P,

$$\frac{CK\times v_1^2\left(\frac{11}{10}\right)^2}{g}=1+\frac{p}{P}\times\frac{CD}{CI},$$

et, par suite, $\frac{p}{P}=\frac{CI}{CD}\times\left(\frac{CK\times v_1^2\times\left(\frac{11}{10}\right)^2-g}{g}\right).$

Or, d'après la première condition, CK est réglé de telle sorte que

$$CK=\frac{g}{v_1^2},\quad \text{ou que}\quad \frac{CK\times v_1^2}{g}=1.$$

Notre nouvelle relation se réduit donc à

$$\frac{p}{P}=\frac{CI}{CD}\times\left\{\left(\frac{11}{10}\right)^2-1\right\}$$
$$=\left(\frac{121}{100}-1\right)\times\frac{CI}{CD}=\frac{21}{100}\times\frac{CI}{CD}.$$

Dans les machines à vapeur où la résistance du manchon, ou p, est très-petite, on ne vise pas à donner à P, ou au poids de chaque boule, une valeur très-faible. On fait CI (fig. 352) de moitié en sus plus long que le côté CD, c'est-à-dire que $\frac{CI}{CD}=\frac{3}{2}$. On aura donc

$$\frac{p}{P}=\frac{3}{2}\times\frac{21}{100}=\frac{63}{200};$$

et, par suite, $$\frac{200}{63}.p=3,17.p.$$

Si, par exemple, la résistance p du manchon est de 3 kilogr., on aura, pour le poids de la boule,

$$P=3,17\times 3^k=9^k,51.$$

Si nous revenons à la relation $\frac{p}{P}=\frac{21}{100}\times\frac{CI}{CD}$, on voit que, plus le rapport

de $\frac{p}{P}$ est grand, plus est grand aussi le rapport de CI à CD. Voilà pourquoi, quand la résistance p devient un peu considérable, on change le système pour le disposer de telle sorte qne le manchon se tronve au sommet supérieur du losange, et le point fixe C du régulateur au sommet inférieur. Mais, afin que les verges ne puissent fléchir, CI ne dépasse guère trois à qnatre fois CD.

S'il s'agit d'une vanne qui, pour être levée, exigerait l'effort d'un homme, on conçoit que la force centrifuge deviendrait insuffisante. Cette force est alors employée uniquement à soulever le manchon A, et, par suite, à faire mouvoir, par l'intermédiaire du levier AL (fig. 353), un manchon L armé d'une double griffe et mobile par glissement sur un arbre EF. Il faut, en outre, concevoir que l'arbre EF est mis en mouvement par la machine elle-même, et que la translation du manchon L a pour objet d'embrayer avec lui l'une ou l'autre des deux roues coniques N et N' folles sur l'axe FE, et qui s'engrènent sur une troisième roue P, dont l'arbre QR, auquel elle est fixée, est susceptible de soulever ou de fermer la vanne au delà du point assigné pour le travail ordinaire, selon que cet arbre tourne dans un sens ou dans l'autre.

Lorsque la vitesse de régime de la machine a lieu, le manchon L prend une position moyenne pour laquelle il n'embraie dans aucune des deux roues N et N'; l'arbre EF tourne sans entraîner ces dernières, et il n'y a aucun mouvement de rotation sur la roue P, ni aucun changement dans l'ouverture de la vanne. Mais si la vitesse s'accélère, le manchon embraie l'une des roues N qui se meut avec l'arbre EF ; la roue d'angle P fait fermer la vanne, mais en vertu du travail de cet arbre EF, et non en vertu de celui de la force centrifuge des boules. Dans le cas d'un ralentissement, le manchon L embraie dans la roue N', et son engrènement avec la roue P fait tourner celle-ci, et par conséquent l'arbre QR, dans une direction contraire à celle qui provenait de l'engrènement de la roue N; ainsi, la vanne s'ouvrira, dans ce deuxième cas, au lieu de se fermer. Ce système, quoique très-ingénieux, ne remplit cependant pas tout à fait le but, à moins que, par suite de la diminution apportée à la résistance, ou de l'augmentation apportée à la puissance, la vitesse ainsi accélérée ne doive durer pendant un espace de temps très-long. Sous ce rapport le régulateur serait très-propre à régler le travail du moteur. Mais l'accélération provient le plus souvent d'une cause qui ne peut durer longtemps, et le régulateur ne peut opérer, ni fermer la vanne, etc., qu'après que la vitesse s'est accélérée de $\frac{1}{10}$ ou de $\frac{1}{20}$. Il se passe donc un certain temps entre l'instant où la cause de l'accélération a commencé et l'instant où le régulateur doit la faire cesser. Par conséquent, l'inconvénient du régulatenr à force centrifurge est qu'il ne peut augmenter ou diminuer l'action du moteur instantanément, c'est-à-dire au moment même où une cause

vient à déranger le régime de la vitesse le plus avantageux à la machine.

48. *Régulateur à ressort en spirale.* — Parmi les moyens qu'on pourrait employer pour régulariser instantanément l'action des machines, en voici un que nous proposons et qui nous semble assez convenable. Concevez que l'arbre moteur AB (fig. 354), qui transmet le mouvement à des mécanismes tels que ceux d'une filature, etc., soit interrompu en C et C'; que le mouvement d'une partie de l'arbre à l'autre soit communiqué à l'aide de deux manivelles, dont les boutons E et F sont réunis par une bielle EF, articulée et perpendiculaire au bras CE, énarbré sur la partie AC de l'arbre adjacente aux résistances. Remplacez maintenant ce même bras CE par un tambour cylindrique renfermant un ressort en spirale lié d'une part à l'axe AC et de l'autre à la surface du tambour comme dans le barillet des montres (fig. 355); enfin, supposez que le tambour puisse tourner librement autour de son arbre arrondi à cet effet. Il est évident que le bouton E, attaché à la base du cylindre du côté de la puissance, sera tiré par la bielle EF, avec un effort égal à celui qui est nécessaire pour vaincre les résistances de l'arbre AC; par suite, le ressort spiral sera bandé; le barillet tournera plus ou moins autour de son arbre; et l'angle qu'il aura décrit mesurera l'effort exercé eu E, parce qu'en ce point la bielle EF se trouve perpendiculaire en rayon EC. Imaginez à côté du tambour une aiguille *ab* fixée à l'arbre; elle pourra servir à mesurer la tension du ressort à chaque instant, ou l'effort de la résistance : de là résulte un nouveau dynamomètre qu'on rendra sensible à volonté.

Maintenant, rien n'est plus facile que de communiquer le mouvement du tambour autour de son arbre, à un manchon *fg* (fig. 356), monté sur CA, et dont la surface intérieure est creusée en écrou, tandis que la surface de CA est taillée en vis. IK représente une tige saillante fixée au tambour et qui pénètre dans l'œil d'une tige saillante *fo*, fixée au manchon. Ainsi, dès que la résistance de la machine augmentera ou diminuera, le manchon *fg* avancera ou reculera par suite du mouvement relatif du tambour sur son arbre, et il poussera le levier *gl* destiné à ouvrir ou à fermer une vanne plus ou moins. Connaissant le rapport de la puissance motrice à la résistance on effet utile qu'on veut produire sur l'opérateur, on pourra régler le mouvement du manchon ou de la vanne de façon qu'il y ait à chaque instant équilibre, malgré les changements des résistances de l'opérateur, et cela presque instantanément. Ce système, qui est en même temps un dynamomètre, nous paraît devoir être utilement appliqué aux machines. Le ressort spiral recevra d'ailleurs une force proportionnelle aux efforts qui doivent être exercés, et sa construction n'offrira aucune difficulté.

VI.

DES MANIVELLES SIMPLES.

49. *Manière dont varie le travail élémentaire des manivelles simples, dans un premier demi-tour.* — Toutes les fois qu'il s'agit de transformer un mouvement circulaire continu en rectiligne alternatif, ou même en circulaire alternatif, nous avons vu (3e partie, 28 et 29), que ce qu'il y a de plus avantageux c'est d'employer la manivelle quand les machines sont puissantes, ou l'excentrique (3e partie, 28) quand les efforts ne sont que médiocres. Mais comme le travail élémentaire produit sur une manivelle varie à chaque instant, sous un effort même constant, il est utile d'étudier la loi de cette variation, parce qu'elle nous conduira au principe de l'établissement des volants. Une manivelle est formée, comme on sait, d'un coude ou bras AB (fig. 357), fixé à un arbre tournant AE, et à l'extrémité duquel agit une puissance douée d'un mouvement alternatif, par l'intermédiaire d'une bielle BF. Ordinairement on s'arrange de façon que la direction de la bielle varie très-peu ou ne fasse que des angles fort petits avec la verticale qui passe par le centre de l'arbre; et cela pour qu'après la décomposition de l'effort de la bielle en deux autres, l'un parallèle et l'autre perpendiculaire à cette verticale, ce dernier soit fort petit et ne produise que peu de frottement. Cette condition est suffisamment remplie quand la longueur de la bielle est quatre ou cinq fois celle du bras AB. Ainsi, nous admettrons que la direction de la bielle et de la force qui la sollicite soit invariable, verticale par exemple, et que cette force soit constante, hypothèse qui facilitera beaucoup la considération du travail. Cela posé, cherchons le travail élémentaire produit par la force F pendant que le bouton B, c'est-à-dire son point d'application, décrit le très-petit arc de cercle BB'. Il est évident, d'après le quatrième principe du n° 1, que ce travail se mesure par le produit de l'effort multiplié par le petit chemin parcouru, mais estimé sur la direction de cet effort. Si par le point B' (fig. 358) on mène l'horizontale B'B'', laquelle est perpendiculaire à la direction BF de la force, BB'' sera ce chemin estimé, et, par suite, le produit $F \times BB''$ donnera la mesure du travail élémentaire de la bielle. Mais, en observant que BB'' est égal à *bb'*, c'est-à-dire à la projection de l'arc BB' sur le diamètre EG, ce même travail sera exprimé par $F \times bb'$. Si, maintenant, on cherche toutes les quantités de travail élémentaire produites pendant un intervalle fini, qui sera compris, par exemple, entre les points E et B, et qu'on en fasse la somme, celle-ci donnera le travail dépensé sur la bielle pendant ce même intervalle. Mais remarquons que, dans cette somme, l'effort F constant se trouve multiplié par la somme des projections, telles que *bb'*, sur le diamètre EG de tous les petits arcs élémentaires BB'; c'est-à-

dire par la projection Eb de l'arc total Eb parcouru par le bouton. En général, le travail de la bielle, pour un arc parcouru quelconque, a pour valeur le produit de la projection de cet arc sur le diamètre vertical, et de l'effort de la bielle. D'où l'on voit que si si cet effort a agi sur le demi-tour total ECG, le travail pendant cet intervalle équivaut à l'effort F multiplié par le diamètre EG, ou à $2F \cdot r$, r désignant la longueur AB du bras de la manivelle. Voyons maintenant comment varie le travail élémentaire à chaque instant pour de très-petits arcs égaux à BB', travail que nous avons exprimé tout à l'heure par le produit $F \times BB''$. A cet effet nous remarquons que, si du point d'application B, on abaisse la perpendiculaire BD au rayon horizontal AC, on aura formé un triangle ABD, semblable au petit triangle BB'B''; d'où résulte la proportion

$$BB'' : BB' :: AD : AB,$$

qui donne
$$BB'' = \frac{BB'}{AB} \times AD.$$

Appelant s le petit arc élémentaire BB', et nous rappelant que r représente le rayon ou le bras AB de la manivelle, on trouvera

$$BB'' = \frac{s}{r} \times AD.$$

Le travail instantané devient, par conséquent, $F \times \frac{s}{r} \times AD$. Si nous imaginons la demi-circonférence GCE partagée en nne suite de petits arcs égaux à s, et que, des points de division, on mène des perpendiculaires au rayon horizontal AC, je dis que la distance AD du pied de chaque perpendiculaire au centre A du cercle décrit, coutinuera la variation du travail instantané produit sur chaque petit arc décrit BB', ou lui sera proportionnelle. Car, dans la valeur de ce travail, F, s et r sont des quantités constantes pour chaque travail instantané, et il n'y a que AD qui soit variable dans l'expression $F \times \frac{s}{r} \times AD$. Si le bouton est parvenu en E, la longueur AD est nulle, aussi bien que le travail instantané de la bielle; puis, à partir de ce point jusqu'au rayon horizontal AC, cette perpendiculaire AD augmente jusqu'à devenir égale à r. Le travail instantané est alors parvenu à son *maximum*, et il a pour valeur, dans la position C du bonton, le produit $F \times \frac{s}{r} \times r$, ou $F \times s$. Enfin, au-dessous du point C, la perpendiculaire AD décroît de nouveau, et devient encore nulle au point le plus bas G. Le travail instantané passant par toutes ces variations, on voit combien sont grandes les inégalités qu'il éprouve, puisque de $F \times s$ qu'il se trouve en C, il se réduit à zéro en G et E.

Cherchons maintenant à quelle distance AX il faudrait appliquer l'effort F de la bielle pour que, agissant tangentiellement à une roue de ce rayon AX que nous représenterons par X, elle produise dans un demi-tour le même travail que celui de la bielle dans cette même demi-révolution. Nous avons

reconnu que ce dernier était égal à $2r$. F. Quant au premier, il est évidemment égal à $F \times \pi X$, puisque πX est la mesure de la demi-circonférence dont X est le rayon, et que cette demi-circonférence est en réalité décrite sur les directions partielles de F, en tant que cette force est tangente à cette circonférence. On aura, par conséquent,

$$2r \,.\, F = F \times \pi X, \quad \text{ou} \quad X = \frac{2r}{\pi} = \frac{2r}{3,1416} = 0,637 \,.\, r.$$

Cette longueur X, qu'on nomme le bras de levier moyen de la manivelle, se trouve ici être les $\frac{2}{3}$ environ du bras de cette dernière. Si nous nous rappelons que le travail instantané de la bielle est représenté par $F \times \frac{s}{r} \times AD$, et que, pour le bras de levier moyen, il est égal à $0,637 \,.\, s \times F = F \times \frac{s}{r} \times 0,637 \,.\, r$, on reconnaît sans peine que le premier est proportionnel au moment variable AD . F, et le deuxième au moment moyen et constant $0,637 \,.\, r$. Aussi, les calculs relatifs à la manivelle sont-ils susceptibles de simplification, parce que, sans erreur sensible, cette manivelle peut être remplacée par une roue d'un rayon égal à $0,637 \,.\, r$, que sollicite la force F tangentiellement à sa circonférence. De ce que le plus grand travail instantané de la bielle est proportionnel à $F \,.\, r$, son plus petit à 0, et le travail moyen instantané à $0,637 \,.\, Fr$, on en conclut que le premier étant 1, le deuxième sera 0, tandis que le travail instantané moyen sera représenté par 0,637. Par conséquent, les écarts du plus grand travail instantané et du plus petit hors du travail moyen, comparés au plus grand travail pris pour unité, seront représentés, l'un par 1 — 0,637 ou 0,363, et l'autre par 0,637 : autrement dit, le travail moyen diffère des deux extrêmes des 0,363 et des 0,637 du plus grand travail.

50. *Manière dont varie le travail instantané dans le deuxième demi-tour.*— Nous n'avons encore considéré que ce qui se passe dans un demi-tour de la manivelle, voyons maintenant ce qui a lieu quand elle achève l'autre demi-tour EHG. Or, il peut arriver l'une de ces trois choses : 1° La puissance F cesse entièrement d'agir ; 2° ou elle agit dans une direction contraire à sa direction primitive ; 3° ou enfin elle continue d'agir dans la même direction.

Dans le premier cas, qui est celui des pédales ou des pistons de pompe à simple effet, le travail total de F est $2F \,.\, r$, tandis que celui de la même puissance appliquée au bras de levier moyen X pendant un tour entier, sera $2\pi X \,.\, F$. On aura

$$2\pi X \,.\, F = 2r \,.\, F, \quad \text{ou} \quad X = \frac{r}{\pi} = 0,318 \,.\, r.$$

Le plus grand travail étant toujours proportionnel à $F \,.\, r$, et le plus petit à 0, tandis que le travail moyen instantané sera ici $0,318 \,.\, Fr$, on voit que

les écarts du plus grand et du plus petit sur le travail instantané moyen seront représentés ici par 1 — 0,318 et 0,318, ou par 0,682 et 0,318. Par conséquent, l'écart du plus grand travail sur le travail moyen, écart qui est ici 0,682, sera plus considérable que dans le cas précédent, où il était représenté par 0,637.

Dans le deuxième cas, où la puissance F change de direction à chaque demi-tour, et où elle agit toujours pour faire tourner dans le même sens, elle développera dans le tour entier un travail égal à $4r.F$. On aura donc

$$4r.F = 2\pi X.F, \quad \text{ou} \quad X = \frac{2r}{\pi} = 0,637.r,$$

comme pour le cas où la puissance agit à chaque demi-tour. Les écarts du plus grand travail et du plus petit en dehors du travail moyen sont donc représentés par 0,363 et 0,637. Par conséquent, le plus grand écart dans le deuxième cas est plus petit que celui du premier cas.

Dans le troisième cas, le travail total fourni par la puissance, pendant un tour entier de la manivelle, sera nul, et il en sera de même du travail instantané moyen, en sorte que les écarts du plus grand travail et du plus petit, en dehors du travail moyen, seront proportionnels à ces travaux eux-mêmes, ou représentés par 1 et 0. Ces écarts deviendront dans ce cas les plus grands possibles.

Ce dernier cas ne peut être que relatif à l'action de la pesanteur qui agit toujours dans le même sens, et qui ne produit aucun travail pendant une révolution complète (3e partie, 14). Mais, comme cette action se joint toujours à celle d'une autre force qui agit dans la direction de la bielle comme les précédentes, il convient d'examiner son influenec dans les inégalités du travail instantané.

51. *Manière de régler le poids des équipages de la manivelle.*—Nommons p le poids de la bielle BF et de son équipage, qui agit suivant la direction de F. On observera que le poids p s'ajoute à la force F ou s'en retranche selon qu'il agit ou non dans le sens de cette force, de telle sorte que la quantité de travail dans un tour entier n'est uullement altérée par ce poids. Par conséquent, son influence est également nulle et sur le bras de levier moyen et sur le travail instantané moyen, et comme le travail élémentaire de la puissance est toujours nul pour la position verticale du bouton de la manivelle en E et G, on voit que l'effet du poids p se réduira à augmenter ou à diminuer le plus grand travail instantané en C et H toujours, proportionnel à rF, selon le sens de la puissance F.

Cela posé, il est aisé de voir que les écarts du plus grand travail instantané dû aux forces F et p sur le travail moyen, seront dans le cas où F agirait dans les deux demi-tours, et dans celui où elle n'agirait que dans le premier demi-tour en s'ajoutant à p, plus considérables que dans les cas précédents où on faisait $p = 0$: donc, dans ces circonstances, il sera essentiel

de mettre l'équipage en équilibre autour de l'arbre de rotation. Mais il pourra en être tout autrement du cas où F agit seulement dans le premier demi-tour et dans une direction contraire à celle du poids p. En effet, la plus grande valeur du travail instantané ayant toujours lieu pour la position horizontale du bras de la manivelle, elle sera proportionnelle à r (F—p) pour le premier demi-tour et à rp pour le second. On devra donc prendre la première ou la dernière de ces quantités pour la limite supérieure du travail instantané, selon qu'on aura F—$p >$ ou $< p$, ou F $>$ ou $< 2p$. Le cas le plus avantageux aura lieu évidemment quand la valeur de p sera telle que r (F—p) sera égal à rp, ou que p sera égal à $\frac{1}{2}$ F, en sorte que le plus grand travail instantané, réduit ici à la moitié, sera représenté par $\frac{1}{2}$ F. r. Mais, comme au premier cas, le travail moyen demeure toujours proportionnel à 0,318. r. F, et le plus petit à 0. Les écarts du plus grand et du plus petit travail instantané, en dehors du travail moyen, deviennent donc $\frac{1}{2}$— 0,318 et 0,318, c'est-à-dire 0,182 et 0,318, et ils sont alors moindres que pour les cas précédents.

52. *Différence d'une manivelle à simple effet et d'une manivelle à double effet.* — Nous avons dit que la puissance appliquée à la bielle d'une manivelle agit tantôt pendant un seul demi-tour et n'agit plus pendant le demi-tour suivant, et tantôt agit pendant un tour entier en changeant d'un demi-tour à l'autre, le sens de sa propre direction. De là résultent deux distinctions à faire dans la manivelle, selon ces deux circonstances, c'est-à-dire qu'elle peut être ou *à simple effet* ou *à double effet.*

Pour se faire une idée de la manivelle à simple effet, imaginez un moteur tirant de haut en bas sur une corde attachée au bras d'une manivelle; il ne pourra que faire décrire un demi-tour descendant à ce bras, sans l'élever pendant le demi-tour ascendant, et un volant devient nécessaire pour que la manivelle continue à marcher pendant ce demi-tour où l'action du moteur cesse forcément. Mais si, au lieu d'une corde, on a une bielle inflexible, alors le moteur peut travailler sur cette bielle aussi bien de bas en haut que de haut en bas; et toute manivelle ainsi disposée pour que le moteur exerce son action dans le sens descendant pendant un premier demi-tour, et dans le sens ascendant pendant le second demi-tour, est ce qu'on nomme une manivelle à double effet.

VII.

DES MANIVELLES COMPOSÉES.

53. *Effet des manivelles doubles, et leur disposition la plus avantageuse.* — On applique souvent sur un même axe deux manivelles dirigées en sens contraire, et situées dans des points différents de l'axe, afin que les bielles

qui manœuvrent chacune d'elles ne puissent point se rencontrer. Lorsque ces manivelles sont comprises dans un même plan passant par l'axe, leur disposition ne peut servir à régulariser l'action de la puissance, quand elle est constante en grandeur et en direction. Il faut nécessairement, pour que cette régularisation ait lieu, que les deux manivelles soient dans des plans différents passant par l'axe et formant un angle quelconque. Tantôt deux manivelles sont montées sur un même arbre (fig. 359); tantôt l'arbre est interrompu par des coudes faisant fonction de manivelles, et il est supporté par trois appuis dont les intervalles servent au jeu de chaque bielle (fig. 360); toutefois, les projections latérales de ces deux systèmes sont représentées en commun par la figure 361. Lors donc que les deux bras de manivelles montés sur un même arbre forment entre eux un angle quelconque (et dans ce cas le système s'appelle une manivelle double), voyons s'il y a de l'avantage à répartir une seule puissance en deux autres égales et parallèles sur ces deux bras. Si je nomme F chaque puissance partielle appliquée à chaque bielle, et que ces puissances n'agissent que pendant un demi-tour, on reconnaît que l'action est presque aussi irrégulière que si une puissance égale à 2F se trouvait appliquée à une manivelle simple d'un bras égal à ceux de la manivelle double. Car la résultante 2F des deux premières peut être censée appliquée au milieu I (fig. 362) de la corde BB', qui réunit les deux boutons projetés dans un même plan; et bien que cette résultante agisse sur un bras AI moindre que l'un des bras AB ou AB', néanmoins les variations du travail auront des écarts par rapport au travail moyen, qui seront entièrement les mêmes que pour la manivelle simple. Donc, dans le cas où les deux puissances égales n'agissent que pendant un demi-tour sur une manivelle double, le travail n'est pas plus régulier que celui d'une puissance double de l'une d'elles qui travaillerait sur une manivelle simple.

Mais, quand chaque puissance F agit en montant et en descendant, ou que chaque bras est à double effet, on peut se demander l'inclinaison des deux bras entre eux, pour que l'irrégularité soit la moindre possible. Soient AB, AB' (fig. 363) les deux bras de la manivelle double dans laquelle les puissances agissent également aux deux demi-tours, et BAB' l'angle constant que forment ces deux bras entre eux. Il est aisé de s'assurer que le travail instantané total des puissances F atteindra sa limite supérieure pour les positions verticales et horizontales de la corde BB', et sa limite inférieure pour les quatre positions symétriques où l'un des bras AB, AB' se confondra avec la verticale.

Observons que le travail instantané total pour ses limites supérieures, en appelant s l'arc élémentaire constant décrit, et r le rayon AB, sera exprimé par $2F \times \frac{s}{r} \times AI$, et par $2F \times \frac{s}{r} \times BI$; que si la première valeur devient très-grande lorsque AI est très-grand, la grandeur de BI est alors très-petite,

aussi bien que la deuxième valeur de la limite supérieure du travail instantané. Par conséquent, les écarts de ces deux limites en dehors du travail moyen instantané, quel que soit ce dernier, seront réduits le plus possible si AI = BI, c'est-à-dire si l'angle BAB′ est droit. On a alors

$$AI = BI = \frac{AB}{\sqrt{2}},$$

et les limites supérieures du travail instantané deviennent, l'une et l'autre,

$$2F \times \frac{s}{r} \times \frac{r}{\sqrt{2}}.$$

Quant aux quatre valeurs des limites inférieures du travail instantané, il est évident qu'elles sont, dans le cas de l'angle droit BAB′, égales à

$$F \times \frac{s}{r} \times r.$$

Pour avoir le travail instantané moyen, il faut remarquer que les puissances, dans un tour entier, développent un travail égal à $2F \times 4r$, et que le même travail produit par elles quand elles sont appliquées à la circonférence dont X est le rayon sera égal à $2F \times 2\pi X$. On aura donc

$$X = \frac{2r}{\pi} = 0,6366 \,.\, r.$$

Le travail moyen instantané sera donc exprimé par

$$2F \times 0,6366.\, s.$$

Si maintenant nous comparons le plus grand travail instantané et le plus petit avec ce travail moyen, on trouve que leurs écarts en dehors de ce dernier pris pour unité, sont environ le $\frac{1}{9}$ et le $\frac{1}{5}$ de ce travail moyen. Les manivelles coudées à angle droit sont donc très-avantageuses pour la régularité du mouvement.

54. *Effets et inconvénients des manivelles triples.*— Pour une manivelle triple dont les bras AB, AB′, AB″ (fig 364) partageraient dans leur projection sur un plan perpendiculaire à l'axe, la circonférence en trois parties égales, et qui seraient sollicitées par trois forces égales F agissant seulement dans le demi-tour EBG, on trouve que le travail instantané total a sa plus grande et sa plus petite valeur quand l'un quelconque des bras est horizontal ou vertical; que le bras de levier moyen donné par l'équation $6F \,.\, r = 2\pi X \,.\, F$, a pour expression $\frac{3r}{\pi} = 0,955 \,.\, r$, et qu'enfin le travail moyen instantané ne diffère que de $\frac{1}{2}$ du plus grand et de $\frac{1}{11}$ du plus petit, pourvu toutefois que les équipages des manivelles soient ici censés en équilibre autour de l'axe A. Enfin, si les puissances agissent sur les deux demi-tours de chaque bras, le plus grand travail instantané et le plus petit ont lieu quand l'un des

bras est successivement horizontal et vertical. Le bras de levier moyen est donné par la relation

$$6\pi X \, . \, F = 12r \, . \, F, \quad \text{ou} \quad X = \frac{2r}{\pi} = 0{,}6366.$$

On reconnaîtra, d'ailleurs, que le travail instantané moyen est proportionnel à 1,910, que le plus grand travail instantané est proportionnel à 2 et le plus petit à 1,732. Par conséquent, les écarts hors du travail moyen, rapportés à ce dernier pris pour unité, sont $\frac{1}{21}$ et $\frac{1}{10}$.

Ainsi, dans les manivelles triples à double effet, le mouvement est presque aussi régulier que si les puissances agissaient tangentiellement à une roue. Mais ces manivelles sont inexécutables par la difficulté de maintenir en ligne droite les appuis d'un arbre quand il y en a plus de deux (et il en faut quatre au moins pour les manivelles triples énarbrées à un seul axe). Toutefois, voici comment à Moyeuvre on a cherché à éviter ce dernier inconvénient pour une manivelle triple destinée à faire jouer trois soufflets, et dont l'utilité est incontestable non-seulement pour que ces soufflets produisent un jet d'air continu, mais encore pour régulariser le plus possible la résistance qui, dans l'établissement, se trouve vaincue par la puissance uniforme d'une roue hydraulique.

L'arbre des manivelles se compose de deux parties *ab* et *cd* (fig. 365), dont la première porte deux manivelles et l'autre une troisième, de manière que les projections de ces manivelles sur un même plan perpendiculaire à l'axe partagent la circonférence en trois parties égales. Un autre arbre AB, parallèle aux deux parties précédentes, reçoit le mouvement du moteur, et le transmet au moyen de deux roues égales C et C′, qui engrènent chacun dans deux autres roues D, D′, aussi égales entre elles, et montées respectivement sur les deux parties *ab* et *cd* de l'arbre de la manivelle triple. Il est évident que les roues C et C′ recevront des vitesses égales, et que, si dans le principe les trois bras de manivelle sont à angles égaux, les choses se passeront comme pour une manivelle triple ordinaire.

VIII.

THÉORIE ET ÉTABLISSEMENT DES VOLANTS.

55. *Forme ordinaire des volants et expression de leur force vive.* — Il n'est pas toujours possible de régulariser le travail d'un moteur ou d'une résistance par l'emploi des manivelles doubles ou triples, et quand on est réduit à se servir d'une manivelle simple, on a vu, au chapitre précédent, que les variations du travail instantané ne laissaient pas que d'être assez sensibles. Il en

est de même dans toutes les circonstances où tantôt le mouvement alternatif a lieu, tantôt la puissance ou la résistance, ou toutes deux à la fois agissent par intermittences. Le moyen le plus général de satisfaire à la condition de la régularité du travail, est sans contredit le *volant*. Il se compose ordinairement d'un anneau en fonte à section rectangulaire (fig. 366), relié à l'axe au moyen de bras de même matière ou de bois qui s'assemblent sur un *noyau* ou *moyeu* commun, monté sur la partie carrée de cet axe. Quelquefois aussi on se contente de placer à l'extrémité des bras, des masses métalliques auxquelles on donne, quand elles sont isolées, une forme lenticulaire, dans la vue de diminuer la résistance de l'air; mais ce dernier moyen doit être proscrit à cause des dangers qu'il présente. Pour avoir la force vive d'un volant, nous renverrons au n° 67 de la 2e partie, duquel il résulte que si on nomme P la poids du volant, V la vitesse de sa circonférence moyenne ou l'espace qui y est décrit dans une seconde, $\frac{P}{g} \times V^2$ est la force vive de ce volant, en se rappelant que V' équivaut au produit de la vitesse angulaire et du rayon moyen.

56. *Volant pour une manivelle à simple effet.* — Nous commencerons par l'établissement du volant dans le cas le plus fréquent qui se rencontre pour les machines, c'est-à-dire dans celui de la manivelle dont le bras AB (fig. 367), sollicité de haut en bas par la force F agissant sur une bielle verticale pendant le premier demi-tour EBG, fait tourner l'arbre A, ainsi qu'une roue M, dont la réaction en N en fait mouvoir une autre destinée à vaincre l'effet utile. J'appelle Q la résistance de haut en bas que cette dernière roue oppose et qui sera mesurable en poids sans être cependant pour nous un poids véritable à soulever. Dans ce calcul nous ne tiendrons aucun compte de l'inertie de la roue M, parce que son diamètre est peu de chose par rapport à celui du volant, dont la grande masse est toujours rejetée le plus loin possible de l'axe de rotation, afin qu'il puisse acquérir une grande force vive. Cela posé, considérons le système à un certain état de mouvement, et observons que, d'après ce qui a été dit au n° 49, le travail instantané de la puissance F sur la bielle est variable; que ce travail croît de E en C, décroît de C en G où il devient 0, et qu'enfin il est nul pendant toute la demi-révolution ascendante GHE. Quant au travail instantané de Q, comme cette résistance est constante et qu'elle demeure tangente à la circonférence de la roue M, il est nécessairement constant. Tant que le travail instantané de la puissance F l'emporte sur celui de Q, la vitesse s'accélère ; mais elle ne saurait s'accélérer indéfiniment, parce que le travail instantané de la puissance finit par diminuer, et qu'il arrivera un moment où il sera devenu égal à celui de la résistance. A cet instant la vitesse aura acquis sa plus grande valeur, ou sera parvenue à son *maximum*. Le travail instantané de la puissance décroissant encore, deviendra moindre que celui de la résistance, et de cette

nouvelle inégalité, contraire à la première, résultera un ralentissement tel que la vitesse diminuera de plus en plus.

Mais, comme le travail de la puissance ne peut décroître indéfiniment, et qu'il arrive un instant où il croît de nouveau, on voit que tant qu'il demeure inférieur à celui de la résistance, le ralentissement se continue, mais de moins en moins, jusqu'à l'instant où le travail instantané de la puissance est devenu égal à celui de la résistance. A ce moment la vitesse a cessé de décroître ; mais elle est parvenue à son *minimum* : car, au delà, le travail de la puissance l'emporte de plus en plus sur celui de la résistance ; la vitesse augmente alors, et arrive enfin de nouveau à son *maximum*.

Si maintenant nous supposons sur l'arbre A un volant capable d'une grande force vive, et qu'on se reporte aux deux époques où la vitesse du système est la plus grande et la plus petite, il est évident que la force vive du volant se sera aussi, à ces mêmes époques, accrue ou diminuée, et on sait que l'accroissement ou la diminution de la force vive de ce volant devra être égale (puisqu'on fait abstraction de l'inertie des autres pièces) au double de la différence absolue entre le travail dépensé par la puissance et le travail absorbé par la résistance pendant l'intervalle des deux époques correspondantes au *maximum* et au *minimum* de vitesse (3ᵉ partie, 1, dixième principe). Cette relation à établir n'offre aucune difficulté, puisque nous savons calculer les quantités de travail des diverses forces. Examinons maintenant quel est l'effet du volant. Sa force vive, avons-nous dit, est $\frac{P}{g} \times V^2$, ou $\frac{P}{g} \times A^2 v_1^2$, A étant son rayon moyen, et v_1 sa vitesse angulaire, laquelle est proportionnelle au nombre de tours du volant dans un temps déterminé, nous reconnaissons déjà que, pour un même nombre de tours, la force vive du volant croît proportionnellement à son poids, et au carré de son rayon : autrement dit, pour un rayon *double*, *triple*, la force vive du volant devient *quatre*, *neuf* fois plus grande. D'où il suit que cette force vive sera considérablement augmentée, surtout par le rayon. Si nous nous reportons vers les instants où la machiue s'accélère, la force vive qu'absorbe le volant est toujours égale au double du travail de la puissance diminuée de celui de la résistance, et en supposant que toutes les circonstances de ce travail soient les mêmes, n'est-il pas évident que la vitesse angulaire s'accroîtra d'autant moins que le poids et le rayon du volant sont rendus plus considérables? Il y a donc lieu de régler le poids et les diminutions d'un volant de telle façon que sa vitesse angulaire ne dépasse pas une certaine limite, ou pour qu'elle varie seulement de $\frac{1}{10}$ en plus on en moins. Telle est aussi la marche que nous suivrons dans l'exemple de la manivelle à simple effet. Nous admettrons que dans la résistance Q on ait compris celle du frottement, c'est-à-dire que ce frottement, déterminé à l'avance par le calcul, sera multiplié par le rapport

du rayon du tourillon de la roue M au rayon AN, et que ce produit sera ajouté à la résistance variable de l'autre roue. Cette somme sera pour nous ce que nous entendrons désormais par Q.

La première condition à remplir, c'est qu'au bout de chaque révolution, le travail total de la puissance F soit égal à celui de la résistance Q. Car si le premier était plus grand, la vitesse s'accroîtrait de révolution en révolution, et la machine serait mal réglée. Or, nous avons vu (3e partie, 49) que le travail de F dans la première demi-révolution ECG est $F \times EG$, ou $F \times 2r$; et comme la puissance ne travaille point pendant l'autre demi-révolution ascendante GHE, il est évident que le produit $F \, . \, 2r$ représente encore le travail de la puissance pendant une révolution complète. D'ailleurs le travail de la résistance Q qui ne cesse d'agir pendant toute la durée d'une révolution tangentiellement à la roue M dont on représentera le rayon par R, ce travail, dis-je, aura pour valeur $2\pi \, . \, R. \, Q$ (π étant le rapport 3,1416 de la circonférence au diamètre). Ainsi, en vertu de notre première condition énoncée, on aura

$$F \, . \, 2r = 2\pi \, . \, R \, . \, Q,$$

et, par suite,

$$Q = \frac{F \, . \, r}{\pi R}. \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (a)$$

Telle est la valeur de la résistance pour que le mouvement puisse se maintenir.

Cherchons actuellement les dispositions de la manivelle pour lesquelles la vitesse du volant devient la plus grande et la plus petite. A cet effet nous nous rappellerons que le travail instantané de la puissance F, en un point quelconque B, a été trouvé (3e partie, 49) égal à $F \times \frac{s}{r} \times AD$. Supposez que le bouton de la manivelle soit en E, et que celle-ci tourne de gauche à droite. Il est évident qu'en cette position le travail instantané de la puissance est nul, quoique la résistance agisse toujours; toutefois la manivelle tourne, et si la puissance n'agit pas encore avec prépondérance, son travail instantané augmente : ainsi la vitesse ne cessera de décroître jusqu'à ce que le bouton soit parvenu dans un point B, où le travail instantané de la puissance sera devenu égal à celui de la résistance. Mais, pendant que le bouton parcourt le petit arc bB que j'ai nommé s, le point d'application de la résistance Q parcourt sur la circonférence de la roue M un arc lL semblable à bB, et tel qu'on a

$$lL : bB \text{ ou } s :: R : r,$$

ou

$$lL = \frac{R}{r} \times s.$$

Le point B, où les deux travaux instantanés sont égaux, est d'ailleurs celui où la vitesse du volant cesse de décroître, et il sera déterminé par cette

relation, due à l'égalité des travaux instantanés de la puissance et de la résistance,

$$F \times \frac{s}{r} \times AD = Q \times Ll,$$

ou, en remplaçant Ll par sa valeur trouvée tout à l'heure,

$$F \times \frac{s}{r} \times AD = Q \times \frac{s}{r} \times R.$$

Cette relation se réduit, en définitive, à

$$F \times AD = Q \times R.$$

Mettons à la place de Q sa valeur donnée (a), on trouve encore

$$F \times AD = \frac{F \cdot r}{\pi R} \times R,$$

ou

$$AD = \frac{r}{\pi} = 0{,}318 \cdot r.$$

Telle est la valeur de AD, c'est-à-dire la distance au centre A, du pied de la perpendiculaire abaissée du point cherché B, sur le rayon horizontal AC. Cette distance est, comme on voit, environ le tiers du rayon de la manivelle.

Lorsque ensuite le bouton quitte le point B, le travail instantané de la puissance l'emporte sur celui de la résistance, et la vitesse s'accélère jusqu'à ce que de nouveau ces deux travaux instantanés soient devenus égaux ; alors la vitesse du volant a acquis son *maximum*. Ce point doit être évidemment au-dessous du rayon horizontal AC, parce que sur ce rayon le travail instantané de la puissance est le plus grand possible, et qu'il a dû décroître pour redevenir égal à celui de la résistance. Du reste, la position B″ de la manivelle pour laquelle la vitesse du volant est un *maximum*, s'obtient par le même calcul que tout à l'heure, et elle est déterminée par la valeur AD encore égale à $0{,}318 . r$; ce qui prouve que les points B et B′, pour lesquels la vitesse du volant est un *minimum* et un *maximum*, sont sur une même corde BB′ perpendiculaire au rayon horizontal AC, et dont la distance au centre est $0{,}318 . r$. Passé le point B′, le travail instantané de la puissance est plus petit que celui de la résistance ; il reste même nul pendant toute la demi-révolution ascendante, de sorte que la vitesse décroît et reprend son premier *minimum* quand le bouton est parvenu en E. En un mot, l'action de la puissance variant de la même manière à chaque révolution, les vitesses redeviennent les mêmes, quand le bouton arrive aux mêmes positions.

Pour calculer le poids du volant, nous considérerons ce qui se passe dans l'intervalle de la position B à la position B′. Désignons par V la vitesse *maximum* du volant comptée sur son rayon moyen, et qui a lieu quand le volant est en B′ : $\frac{P}{g} \times V^2$ sera la force vive du volant pour cette position de la

manivelle; de même, $\frac{P}{g} \times v^2$ sera la force vive du volant à l'instant de la position B de la manivelle, v représentant la vitesse *minimum* de ce volant. Ainsi, $\frac{P}{g}V^2 - \frac{P}{g}v^2$, ou $\frac{P}{g}(V^2 - v^2)$ exprimera l'accroissement de force vive qu'aura absorbé le volant pendant l'intervalle des positions B et B' de la manivelle. Le travail de la puissance F pendant ce même intervalle sera F $\times$ corde BB'. D'ailleurs, on a

$$\text{corde } BB' = 2BD,$$

$$BD = \sqrt{\overline{AB}^2 - \overline{AD}^2} = \sqrt{r^2 - (0{,}318 \, . \, r)^2} = 0{,}948 \, . \, r,$$

d'où $$BB' = 2 \times 0{,}948 \, . \, r = 1{,}896 \, . \, r.$$

Le produit F $\times$ corde BB' deviendra donc $1{,}896 \, . \, r \, . \, F$. Si nous voulons avoir le travail de la résistance Q pendant l'intervalle dont il s'agit, on remarquera que ce travail n'est autre chose que le produit de Q multiplié par l'arc que son point d'application décrit pendant que le bouton décrit l'arc BB', ou que ce travail sera égal à $Q \times \text{arc } BB' \times \frac{R}{r}$. Or, à l'aide de la *table des arcs et des cordes correspondantes*, et sachant que la corde $BB' = 1{,}896 \, . \, r$, on trouve que l'arc $BB' = 2{,}4938 \, . \, r$. Par conséquent, le travail cherché de la résistance deviendra

$$Q \times 2{,}4938 \, . \, r \times \frac{R}{r}, \quad \text{ou} \quad Q \times 2{,}4938 \, . \, R.$$

Remplaçant dans cette expression Q par la valeur donnée d'après la condition première et qui est $\frac{Fr}{\pi R}$, on trouve que le travail résistant équivaut à

$$\frac{F \, . \, r}{\pi R} \, . \, 2{,}4938 \, . \, R, \quad \text{ou à} \quad F \frac{2{,}4938 \, . \, r}{\pi}, \quad \text{ou à} \quad F \frac{2{,}4938 \, . \, r}{3{,}1416},$$

ou enfin à $$0{,}7938 \, . \, r \, . \, F.$$

L'excès du travail de la puissance sur celui de la résistance sera évidemment

$$r \, . \, F \, (1{,}896 - 0{,}7938), \quad \text{c'est-à-dire,} \quad 1{,}102 \, . \, r \, . \, F,$$

dont le double $2{,}204 \, . \, r \, . \, F$ équivaut à l'accroissement de la force vive du volant, ou à $\frac{P}{g}(V^2 - v^2)$. On aura donc, en définitive, cette égalité,

$$\frac{P}{g}(V^2 - v^2) = 2{,}204 \, . \, r \, . \, F \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (b)$$

Je nomme V_1 la vitesse moyenne du volant, c'est-à-dire celle qui correspond au régime voulu pour le système. Si le poids de ce volant doit être tel que sa vitesse ne croisse ni ne décroisse de plus de $\frac{1}{10}$ de la moyenne ou en

général de $\frac{1}{n}$, il est évident que les vitesses *maximum* et *minimum* du volant seront représentées, l'une par $V_1 + \frac{V_1}{n}$, et l'autre par $V_1 - \frac{V_1}{n}$. Ainsi, les trois vitesses V, V_1 et v formeront entre elles une proportion par différence dont la raison sera $\frac{V_1}{n}$; si d'ailleurs V surpasse de cette quantité $\frac{V_1}{n}$ la vitesse V_1, et que celle-ci surpasse la vitesse v de la même quantité, c'est comme si V surpassait v du double $\frac{V_1}{n}$. On aura donc

$$V = v + \frac{2V_1}{n}, \quad \text{ou} \quad V - v = \frac{2V_1}{n}.$$

Mais il est visible que si $V = V_1 + \frac{V_1}{n}$ et $v = V_1 - \frac{V_1}{n}$,

on a aussi $V + v = 2V_1$. Donc, si on multiplie $V + v$ par $V - v$, et qu'on se rappelle que le produit de la somme de deux quantités par leur différence est égal à la différence de leurs carrés, on en conclut

$$V^2 - v^2 = \frac{4V_1^2}{n}.$$

Substituons cette dernière expression dans la relation (*b*) du volant, on trouvera

$$\frac{P}{g} \times \frac{4V_1^2}{n} = 2{,}204 . r . F,$$

et, par suite, $$PV_1^2 = 2{,}204 \times \frac{g . n}{4} . r . F.$$

On voit ainsi que PV_1^2 sera connu. Mais on obtient la vitesse moyenne V_1 du volant d'après le nombre de tours qu'il doit faire dans un temps déterminé et d'après le rayon de son anneau. Par conséquent, l'équation finale à laquelle nous venons d'arriver, nous donnera le poids P du volant.

On peut parvenir à l'expression du produit PV_1^2 sous une autre forme, et la définir par le nombre des chevaux de force qui constitue le travail du moteur et par le nombre de tours que doit faire le récepteur dans un temps déterminé, dans une minute par exemple. Si nous appelons, en effet m ce dernier nombre, $2m . r . F$ sera le travail du moteur pendant une minute, et $\frac{2m . r . F}{60}$ ou $\frac{m . r . F}{30}$ ce même travail pendant une seconde. Désignant par N le nombre de chevaux-vapeur contenus dans le moteur et capables d'un travail de 75 kilogr. élevés à 1 mètre pendant une seconde, on aura

$$\frac{m . r . F}{30} = 75^{k.m} \times N, \quad \text{ou} \quad r . F = \frac{30 . 75 . N}{m} = \frac{2250 . N}{m}.$$

Après avoir remplacé r . F par cette nouvelle valeur, dans l'expression de PV_1^2, on trouve

$$PV_1^2 = 2,204 \times \frac{g.n}{4} \times \frac{2250.N}{m};$$

et, en mettant pour g sa valeur $9^m,81$, on trouve, tout calcul fait,

$$PV_1^2 = \frac{24324}{m} \times n \times N. \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (c)$$

Ainsi que nous l'avons dit, le nombre m est relatif à la bielle à laquelle la puissance est appliquée, et non au volant, si ce dernier était, comme cela arrive quelquefois, monté sur un arbre différent de l'axe de la puissance. Il n'y a que le nombre n qui soit arbitraire. A la vérité plus n sera grand, moins sera considérable la variation de la vitesse, et si l'on veut que la vitesse ne varie que très-peu, ce ne pourra être qu'à l'aide de très-grandes valeurs données au poids P du volant. Si $n = 1000$, ou si la vitesse varie seulement de $\frac{1}{1000}$ en plus ou en moins, le poids P sera dix fois plus considérable que quand $n = 100$. Or, les volants coûtent cher, et une augmentatien de leur poids produit sur leurs appuis des pressions d'où résultent des frottements capables d'absorber à eux seuls plus de la moitié du travail du moteur. Par exemple, un volant du poids de 20 000 kilogr. éprouvera sur son tourillon un frottement de 2 000 kilogr., lorsque le rapport f du frottement à la pression est $\frac{1}{10}$. Que ce volant fasse 30 révolutions par minute ou une demi-révolution par seconde, et que son tourillon ait 20 centimètres de diamètre, c'est-à-dire $0^m,60$ de circonférence, le travail absorbé par le frottement du volant pendant 1″ équivaudra à

$$2000^k \times \frac{0^m,60}{2}, \quad \text{ou à } 600^{k.m};$$

c'est-à-dire que cette résistance absorberait à elle seule le travail de huit chevaux à $75^{k.m}$ chaque, par seconde.

On ne peut donc arbitrairement choisir le nombre n, et sa détermination dépend de la comparaison qu'il faut faire des avantages et des inconvénients qui y sont inhérents. Au reste, cela dépend du but qu'on veut remplir. Si des machines doivent marcher avec beaucoup de régularité, on fera $n = 15$ ou 20, et on réduira ce nombre à 10 quand les machines ne doivent avoir qu'une régularité médiocre. Les Anglais, pour les machines à vapeur destinées à faire mouvoir des filatures, élèvent le nombre n à 30, mais il y a exagération.

57. *Volant des manivelles à double effet.*—Lorsque la manivelle est à double effet, le calcul du volant est analogue, si ce n'est qu'ici le travail de la puissance dans une révolution s'élève à $4r$. F. Par conséquent, pour que ce travail

fût égal à celui de la résistance au bout d'une même révolution, on poserait $4r.F = 2\pi R.Q$. Les positions du bouton de la manivelle où les vitesses *maximum* et *minimum* sont également différentes, sont ici fixées par une antre valeur de $AD = 0,64 . r$. Calcnlant enfin la corde qui joint, dans une même demi-révolution, la position où une vitesse *minimum* a lieu à celle qui correspond à nne vitesse *maximum*, ainsi que l'arc sous-tendu par cette corde, on sera à même de trouver, comme précédemment, la différence du travail de la puissance et du travail de la résistance pendant l'intervalle d'une vitesse *minimum* à une vitesse *maximum*. Si on égale le double de cette différence à l'accroissement de force vive que le volant a absorbé, si de plus on fait attention que le travail de la puissance pendant une seconde est représenté par $\frac{4r . F . m}{60}$, on aura, pour le volant de la manivelle à double effet, cette relation,

$$PV_1^2 = \frac{4645}{m} . n \times N. \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (d)$$

Maintenant, si on compare cette expression à celle qui est relative à la manivelle à simple effet, tout s'y trouve semblable à l'exception du facteur numérique, qui est cinq fois plus considérable pour la manivelle à simple effet que pour la manivelle à double effet. Donc à vitesse égale la première exige un poids de volant cinq fois plus grand. Cette conclusion démontre tout l'avantage qu'il y a à régulariser autant que possible le mouvement indépendamment de l'emploi du volant : car le poids de ce volant se réduirait au quart si la puissance était repartie sur les deux bras d'une manivelle double à simple effet; et il ne serait plus que de $\frac{1}{10}$ si la puissance agissait sur une manivelle triple, etc.

58. *Idée sur le calcul d'autres volants.*— L'exemple précédent de la manivelle pour lequel nous avons déterminé les dimensions du volant, et qui se rapporte aux machines à vapeur, cesse d'être applicable dans une infinité de circonstances. Tout à l'heure la résistance était supposée constante et continne, et la direction de la puissance variait à chaque instant par rapport au bras de la manivelle. Or, il arrive souvent que l'action du moteur demeure constante, et que la résistance qui varie, soit parce que l'outil, comme la scie, est doué d'un mouvement alternatif, soit parce que la direction de la résistance change continuellement, soit encore parce que la résistance éprouve des intermittences. Les calculs sont alors différents les uns des autres pour la détermination du volant nécessaire à la régularisation du mouvement. Il conviendra toujours d'étudier comment les choses se passent dans nne révolution ou plutôt dans une période complète, et de rechercher les deux positions d'équilibre, ou celles pour lesquelles le travail instantané de la puissance et celui de la résistance sont égaux, parce que ces deux posi-

tions correspondent à l'instant où la vitesse est devenue *maximum* et *minimum*. Si, en outre, on calcule les quantités de travail dépensées par la puissance et absorbées par la résistance pendant l'intervalle de ces positions, et qu'on égale le double de leur différence absolue à l'augmentation ou à la diminution de force vive du volant, cette relation traitée, comme on l'a fait, avec la condition que les plus grande et plus petite vitesses ne dépassent point de certaines limites, conduira à l'estimation convenable des dimensions du volant. Mais, comme ces calculs doivent être renouvelés autant de fois qu'il y a de cas particuliers, il est impossible d'assigner une règle générale. Nous allons donner quelques exemples qui serviront de guides dans la marche qu'on doit suivre.

1° *Laminoirs.* — Un laminoir consiste dans deux cylindres en fonte, tournant, chacun, sur deux tourillons, selon un mouvement convergent du côté où une barre de fer rouge est présentée à leur intervalle, et divergent du côté où cette même barre s'en échappe (fig. 368). Le fer se trouve aplati et allongé par l'effet de ces deux cylindres; mais comme il ne peut être d'une longueur indéfinie, et que la barre, après avoir passé une première fois entre les deux cylindres, doit être replacée au-dessus du cylindre supérieur pour être ramenée à l'ouvrier chargé de la présenter de nouveau, il arrive que le travail du laminage n'est point continu et qu'il éprouve des interruptions. Le moteur continuant à agir pendant la durée de ces intermittences, la vitesse augmente graduellement et acquiert sa limite supérieure au moment où la barre va être présentée, puis elle diminue, parce que le travail instantané de la résistance du fer l'emporte sur celui du moteur, et elle se réduit à sa limite inférieure à l'instant où la barre est entièrement sortie du laminoir. La détermination des dimensions du volant est ici fort simple, attendu que la vitesse *maximum* correspond à l'instant où la barre est présentée, et la vitesse *minimum* à l'instant où la barre s'est échappée des deux cylindres. Si, par l'observation ou par le calcul, on pouvait trouver la quantité de travail nécessaire pour faire passer la barre et qu'on en retranchât celle du moteur dépensée pendant la durée de ce passage, le double de cette différence sera égal à la perte de force vive du volant pendant que sa vitesse descend du *maximum* au *minimum*. Nommant donc S la différence absolue de ces deux quantités de travail, parmi lesquelles celles de la résistance du fer est ici la plus grande, V et v les vitesses *maximum* et *minimum* de la circonférence moyenne du volant, P le poids de ce dernier, on aura la relation

$$\frac{P}{g}(V^2 - v^2) = 2S.$$

Ce volant doit être monté sur l'axe de l'un des cylindres, et comme chacun de ces derniers doit faire environ moyennement vingt tours par minute, on connaîtra la vitesse moyenne V_1 du volant. Si, d'ailleurs, on se donne pour condition que les vitesses *maximum* et *minimum* ne dépassent

point la vitesse de régime, ou V_1, de $\frac{V_1}{n}$, en plus ou en moins, on pourra effectuer le calcul comme pour la manivelle, en faisant $n = 15$ ou 20. On se donnera, en outre, pour première condition, que le travail du moteur dépensé pendant une période complète, ou pendant l'intervalle où une barre est présentée deux fois, soit égal au travail de la résistance consommée par la barre, augmenté de celui des frottements.

2° *Scierie.* — Le volant d'une scierie exige des considérations qui ne ressemblent plus à celles du laminoir. On sait que le mouvement vertical de va-et-vient est transmis au châssis de la scie, par l'intermédiaire d'une bielle, au moyen d'une manivelle énarbrée à un axe qui reçoit son mouvement de la puissance (fig. 369). Dans ce travail la scie ne mord qu'en descendant, et elle remonte à vide. Ainsi, le bouton de la manivelle, dans la demi-révolution ascendante, est chargé du poids de la bielle et du châssis ; en descendant, au contraire, le bouton favorise l'action de la puissance, et est poussé de haut en bas par le poids de la bielle et du châssis, diminué de la résistance de la scie contre le bois. Cette dernière, qui augmente avec l'épaisseur et la nature du bois, sera supposée d'une valeur moyenne, ou telle qu'elle conviendrait pour une pièce de bois de chêne, sans nœuds et d'un pied d'équarissage. Cela posé, vous examinerez de point en point et pour tous les petits arcs élémentaires égaux décrits par le bouton, comment varient le travail instantané de la puissance et celui de la résistance pendant une révolution complète ; les positions où ces travaux deviendront égaux seront évidemment celles où les vitesses sont devenues *minimum* ou *maximum*. Si on calcule ensuite la quantité totale de travail dépensée par la puissance et par les résistances pendant l'intervalle du *minimum* au *maximum* de vitesse, et qu'on égale le double de cette différence absolue à l'accroissement de force vive du volant, on déduira encore le poids de ce dernier pour que les vitesses demeurent dans une limite assignée.

3° *Filatures.* — Il y a certaines machines dont toutes les pièces sont douées de mouvements continus, et dans lesquelles il s'opère des variations qui rendent leur action fort irrégulière. Telles sont les filatures, dont tous les métiers sont mûs à la fois par un même moteur, et où quelques-uns d'entre eux sont souvent arrêtés momentanément par leurs ouvriers respectifs sans qu'on puisse immédiatement modifier le travail du moteur. Il serait alors difficile de régler le mouvement, si on ne voyait par soi-même ce qui se passe dans l'atelier, et si on n'observait moyennement le nombre des métiers dont le mouvement est suspendu, ainsi que la durée de cette interruption. Supposons, par exemple, que le travail de tous les métiers réunis soit de 24 chevaux, et qu'il soit réduit à 20 quand on suspend trois ou quatre métiers pendant un nombre moyen de secondes représenté par t. Le travail de la résistance ainsi réduit pendant ce temps équivaut à $20 \times 75 \times t^{k.m}$; car

n'oublions pas que le cheval représente le travail de 75^k élevés à un mètre pendant une seconde. Supposons, en outre, que le travail du moteur qui fait marcher l'établissement soit de 23 chevaux. L'excès de ce travail sur celui de la résistance réduite par l'interruption des quatre métiers sera de 23—20 ou 3 chevaux ; cet excès répété pendant t secondes, équivaudra à $3 \times 75 \times t$, et produira au bout de ce temps sur le volant une vitesse V plus grande que la vitesse V_1 correspondant au régime ordinaire de la machine. Donc $\frac{P}{g}$ $(V^2 - V_1^2)$ sera l'accroissement de force vive du volant, et il sera égal à $2 \times 3 \times 75 \ . \ t$. On aura donc

$$\frac{P}{g}(V^2 - V_1^2) = 2.3.75.t = 450.t\,;$$

imaginons qu'on veuille que la vitesse V n'excède pas V_1 de $\frac{1}{10}$, on posera $V = \frac{11}{10} V_1$. ou $V^2 = 1{,}21 . V_1^2$; d'où

$$\frac{P}{g} \times 0{,}21 . V_1^2 = 450t, \text{ ou } PV_1^2 = \frac{981 \times 450t}{21}.$$

De cette relation rien n'est plus facile que de conclure le poids du volant. Au lieu de $\frac{1}{10}$ il sera bon de prendre pour l'excès de la limite $\frac{1}{15}$ ou $\frac{1}{20}$.

Quand, au lieu d'un moteur quelconque, la filature est mue par une machine à vapeur, on détermine le volant de cette dernière, indépendamment de la considération des métiers, et en faisant $n = 30$, pour rendre ce volant un peu puissant. Telle est au moins la méthode des Anglais. Nous croyons, au contraire, qu'il vaut mieux d'abord chercher ce premier volant, en faisant $n = 15$, et calculer ensuite un autre volant pour régulariser la machine filante. Si le poids de ce nouveau volant est plus considérable que celui de la machine à vapeur, c'est une preuve que n doit dépasser 15 et qu'il faut l'augmenter ; s'il est moindre, c'est une preuve qu'on doit se borner au premier volant de la machine à vapeur. La régularisation d'action dans les filatures est d'autant plus essentielle, que la perfection du travail en dépend.

S'il s'agit d'un moulin mû par une roue hydraulique, il n'y a point à établir de volant, parce que la meule agit symétriquement sur le grain et qu'elle fait elle-même fonction de cette pièce. Mais si le moulin marche au moyen d'une machine à vapeur, celle-ci n'aura pas besoin d'un volant à beaucoup près aussi puissant, et en général ce genre de machine doit être régularisé indépendamment de l'outil, sauf à régulariser ce dernier, si ses intermittences étaient trop fortes.

IX.

DES ENGRENAGES.

59. *Tracé des engrenages; conditions.* — Lorsqu'on se propose de transmettre le mouvement circulaire continu d'une manière uniforme et régulière, nous avons vu (3e partie, 26) que cette transformation pouvait s'opérer à l'aide de chaînes ou courroies enroulées sur des tambours. Mais quand les machines sont puissantes, il vaut mieux armer les couronnes de dents qui s'engrènent et conduisent les couronnes de la même manière que celles-ci roulaient l'une sur l'autre par simple contact primitif. Pour trouver les circonférences de deux roues destinées à rouler l'une sur l'autre, nous avons vu qu'il suffisait de connaître le rapport qui existe entre les nombres de leurs révolutions simultanées, ainsi que la position de leurs axes dont l'intervalle peut d'ailleurs être quelconque, et cependant tel que les diamètres des roues consécutives soient compris entre deux pieds et six pieds, parce qu'en effet en dehors de ces limites les roues exigent beaucoup de sujétion pour être exécutées. Enfin, si les axes sont parallèles (et c'est le cas dont nous nous occuperons d'abord), on partage leur intervalle CC′ (fig. 370), en parties CT et C′T, réciproquement proportionnelles aux nombres de révolutions qui s'opèrent en même temps autour de ces axes, et on obtient ainsi les rayons des circonférences primitives. Si, maintenant, on monte des tambours égaux à ces circonférences sur les axes CC′ de manière à se presser l'un et l'autre, et qu'on fasse tourner le premier autour de C, il entraînera l'autre tambour autour de C′, et celui-ci décrira deux ou trois révolutions pendant que l'autre n'en décrira qu'une seule, selon que son rayon sera la moitié, le tiers, etc., du rayon du second. Pour remplacer ces tambours par des roues dentées dont les vitesses leur soient proportionnelles, les dents ne sont point placées sur les circonférences primitives, mais sur des couronnes intérieures à ces circonférences, et elles s'étendent au dehors de ces dernières. Chaque circonférence primitive est la séparation de ce qu'on nomme le *creux* et la *saillie* d'une dent.

Le tracé des engrenages est soumis aux conditions suivantes : 1° que les dents d'une même roue soient égales; 2° que leurs espacements soient les mêmes sur les deux roues; 3° que leur forme extérieure soit symétrique par rapport à la ligne milieu de chacune d'elles; 4° qu'elles ne se pressent point avant d'arriver à la ligne des centres CC′, ou plutôt que ce soit sur cette ligne que les dents commencent à se toucher; 5° enfin, que les courbes par lesquelles les dents se poussent ou se conduisent soient tellement tracées que les roues se conduisent avec des vitesses angulaires qui soient constamment

dans un même rapport ou dans celui qui a lieu pour les circonférences primitives, si ces dernières se conduisaient par leur simple contact.

PREMIÈRE CONDITION.—La simplicité de la solution et la facilité de l'exécution matérielle des engrenages exigent que les dents d'une même roue soient toutes égales et disposées régulièrement autour de la couronne. Mais il n'est pas nécessaire que l'épaisseur, c'est-à-dire la dimension comptée sur la circonférence primitive, soit la même d'une roue à l'autre. Pour une roue en fer, la dent sera moins épaisse que pour une dent en bois : il faudra, au contraire, plus d'épaisseur aux dents de la roue qui tourne le plus vite, parce qu'elles sont plus exposées à l'usure.

DEUXIÈME CONDITION. — On nomme *pas* d'un engrenage la distance mesurée sur la circonférence primitive de la racine d'une dent à la racine de sa consécutive. Ce pas doit être le même non-seulement d'une dent à l'autre, mais encore sur les deux roues. Car, puisque l'engrènement est successif d'une roue à l'autre, ces dents se gêneraient réciproquement, si les espaces décrits simultanément par les circonférences primitives pendant l'engrènement n'étaient égaux entre eux. Il résulte de cette condition que les nombres des dents des roues sont proportionnelles aux diamètres des circonférences primitives, de sorte que l'une d'elles ayant, par exemple, 15 dents, l'autre en aura 30 si le rayon de celle-ci est double de celui de la première. C'est ordinairement sur ces circonférences primitives, dites aussi circonférences *de passées*, que la division s'effectue, et nous reviendrons sur les méthodes les plus convenables à cet effet. Nous ferons remarquer qu'une dent pendant son engrènement avec une roue se trouve logée entre deux dents de celle-ci, et qu'elle a besoin d'un certain jeu qu'on réduit au douzième de l'épaisseur des dents pour des roues bien faites et à un sixième pour des roues plus grossières. L'intervalle vide entre deux dents d'une roue équivaut, par conséquent, à l'épaisseur des dents de l'autre roue, augmentée du jeu, en sorte que le pas est égal à la somme des épaisseurs de chaque dent de l'une et l'autre roue plus le jeu.

TROISIÈME CONDITION.—Comme il arrive souvent dans les machines, que les roues ne tournent pas toujours dans le même sens, il faudra que chaque dent soit terminée symétriquement par deux courbes semblables, afin qu'elle soit propre à conduire les dents de l'autre, ou à en être conduite indifféremment.

QUATRIÈME CONDITION. — Lorsque les dents de deux roues s'approchent de la ligne des centres CC′, ces dents vont à l'encontre l'une de l'autre. Lorsqu'au contraire ces dents engrenées s'éloignent de CC′, elles tendent à s'écarter. D'après cela, conformément à la 4e condition, il faut faire en sorte, autant que possible, que les dents ne commencent à se pousser qu'à partir de l'instant où elles sont arrivées à la ligne des centres CC′. On évitera ainsi l'effet des aspérités et des arcs-boutements, en vertu desquels deux dents viennent

a se froisser ou à se heurter en avant de la ligne des centres, en présentant la pointe ou la tête, et se brisent si elles ne suspendent entièrement le mouvement. La forme des dents n'est, en général, point arbitraire; jamais on ne leur donnera celle d'une courbe concave, ou d'un carré ou d'un trapèze, non pas parce que les roues ne sauraient encore se transmettre le mouvement uniforme, mais bien à cause des arcs-boutements dangereux qui résulteraient si deux dents de cette espèce se rencontraient avant la ligne des centres. On voit, en effet, qu'en A (fig. 371), où le sommet commun des dents tend à se rapprocher de CC′, il est impossible que le mouvement se continue sans qu'il y ait rupture, parce que la somme des distances CA + CA′ est > CC′. Au delà de la ligne des centres, où l'angle B tend à s'ouvrir, le mouvement peut s'opérer librement.

CINQUIÈME CONDITION. — Les dents doivent toujours avoir une forme arquée qui leur permette de se mettre en tangeance l'une à l'autre dès qu'elles sont en prise. On tient de plus à cette condition dans le tracé des faces qui se poussent, que la vitesse d'une roue soit transmise à l'autre dans un rapport constant, afin que les engrenages soient bien déterminés. Mais on y satisfait encore d'une infinité de manières. Car on peut se donner à volonté la courbe des dents de l'une des roues, de la roue C′, et on trouvera toujours pour l'autre C une courbe analogue qui sera conduite uniformément par la première, ou comme si les deux roues roulaient par leurs cercles primitifs. En effet, si *a′mb′* (fig. 372) est la courbe attachée à la couronne de C′, et que *amb* soit la courbe correspondante sur l'autre roue, cette dernière courbe devra être constamment touchée par la première pendant que les deux cercles C et C′ tournent simultanément, ou bien encore, ce qui revient au même, pendant que le cercle C demeure fixe, l'autre C′ roule autour de la circonférence primitive du premier, en roulant lui-même sur son propre cercle primitif. Dans ce dernier mouvement la courbe *a′mb′* changera de place, et de point de contact avec la courbe *amb*, de sorte que cette dernière sera précisément l'enveloppe de toutes les positions de la première. Si on fait attention que, dans le roulement du cercle C′ autour du cercle C demeuré fixe, tous les points du cercle C′, ainsi que ceux de la courbe *a′mb*, décrivent de petits arcs élémentaires autour du point de contact T des deux cercles primitifs, et que les éléments de contact des deux courbes de dents se confondent avec l'un de ces arcs, c'est une preuve que les normales communes à l'une et l'autre dent pendant qu'elles se touchent, doivent passer par le contact des deux circonférences primitives.

60. *Méthode générale pour le tracé des courbes des dents.* — Lorsque, se donnant la courbe des dents de l'un des cercles, on veut trouver la courbe correspondante sur l'autre cercle, la question est susceptible de se résoudre physiquement. Prenez en effet deux cercles de planches égaux aux circonférences primitives, que vous appliquerez tangentiellement l'un à l'autre sur

la surface d'un plan. Armez le cercle dont la courbe est donnée d'un *patron* ou modèle égal à cette courbe, et fixez l'autre cercle invariablement. C'est autour de ce cercle que vous ferez rouler le cercle qui porte un patron, vous rendrez d'ailleurs ce mouvement non susceptible de glissement; 1° en liant les deux centres par une verge ayant un jeu autour des axes de ces centres; 2° en enveloppant le cercle mobile d'une bande de parchemin dont les extrémités sont fixées sur les circonférences de ces cercles. Quand le mouvement sera donné au cercle mobile, tracez sur le plan ou table avec un crayon toutes les positions du patron, et l'enveloppe de toutes ces positions vous représentera la courbe de la dent du cercle fixe. Mais un pareil système devient d'une exécution trop difficile pour en espérer une exactitude suffisante.

Voici un procédé graphiqne qui s'applique à tous les patrons de dents imaginables donnés à l'un des cercles. Soit aTb (fig. 373) la courbe du patron fixée au cercle C', et $a't'b'$ la même courbe embrassant entre elle et la première sur la circonférence primitive de C' un arc de cercle Tt', égal au pas de l'engrenage. Soit de même Tt le même pas sur la circonférence primitive C; ici on suppose que les dents des deux roues se pousseront à partir de la ligne des centres. Ainsi on a arc $Tt' =$ arc Tt. On divisera ces deux arcs en un même nombre de parties égales, en trois par exemple; nous aurons sur le premier les points de division T, 1', 2' et t', et sur le deuxième arc Tt les points de division T, 1, 2 et t. Maintenant de T comme centre on décrira un arc de cercle dont le rayon est la plus courte distance de ce point à la courbe $a't'b'$. Cette plus courte distance est donnée par une ouverture de compas telle que l'arc de cercle touche la courbe sans la couper. Cherchez de la même manière la plus courte distance de la division 1' sur l'arc Tt', à la courbe $a't'b'$, et du point 1 correspondant sur l'arc Tt décrivez avec cette plus courte distance un nouvel arc de cercle. De même, du point 2 de cet arc Tt décrivez un troisième arc de cercle dont le rayon est donné par la plus courte distance de la division 2' à la courbe $a't'b'$. Sachant en outre que la courbe de dent cherchée pour le cercle C doit passer par le point t, on n'aura plus qu'à tracer l'enveloppe à tous ces arcs de cercle ainsi obtenus.

En pratique, on peut se contenter de diviser les deux pas des cercles primitifs en deux parties égales, de tracer deux arcs de cercle, et de faire passer la courbe par le point t et tangentiellement à ces deux arcs. Veut-on agir plus simplement encore? cherchez l'intersection i de la première normale Ti (fig. 374) avec la courbe $a't'b'$; joignez t, et par le milieu n de cette droite, élevez une perpendiculaire no qui coupe le cercle primitif C en o. Ce point o sera le centre d'un cercle ayant pour rayon $oi = ot$, et l'arc décrit représentera d'une manière suffisamment exacte la courbe de la dent du cercle C qui doit conduire la courbe donnée du cercle C'. En y réfléchissant, on verra sans peine que ce procédé est fondé sur ce que la ligne qui joint le contact des dents au point de contact T des circonférences primitives, est, comme

nous l'avons fait voir, en même temps une normale commune aux courbes des deux dents en prise.

61. *Divisions des circonférences primitives.* — La plus grande difficulté consiste à obtenir sur chaque circonférence primitive les points de division dont l'intervalle constitue le pas. En se rappelant d'abord que les nombres de ces points sont proportionnels aux rayons des cercles primitifs, on connaîtra d'abord en combien de parties ces circonférences doivent être partagées pour satisfaire aux conditions du mouvement. Si ces nombres sont des multiples de 3, de 4, de 5, et de 6, on partagera d'abord les cercles dans le nombre de parties indiqué par l'un de ces derniers facteurs, et cela à l'aide des procédés que la géométrie enseigne; puis on agira séparément sur chacune de ces grandes divisions, de manière à avoir les nombres de dents voulus sur les cercles primitifs. En général, r étant le rayon de l'un deux, $2\pi r$ sera sa circonférence; et si le nombre des dents doit être 17, 31 ou n, l'arc qui mesurera le pas de l'engrenage sera représentée par $\frac{2\pi r}{17}$, ou par $\frac{2\pi r}{31}$, ou enfin par $\frac{2\pi r}{n}$. La difficulté n'est pas ici d'avoir l'arc, mais plutôt la corde qui le sous-tend. On y parviendrait en divisant 360 par 17, par 31, ou par n, et le quotient représenterait le nombre de degrés d'un tel arc, de sorte qu'avec un rapporteur, on pourra marquer sur chaque cercle primitif les points de division. Mais les rapporteurs ne sont jamais assez divisés pour que l'opération se fasse avec précision. Connaissant les angles au centre de ces arcs, on pourrait encore employer une table de cordes. Mais de tous ces moyens, le meilleur est le suivant quand l'arc est fort petit, ainsi que cela arrive à l'égard du pas des dents. Désignons par z le quotient $\frac{2\pi r}{n}$, la corde qui sous-tend cet arc est égal à $z\left(1-\frac{1}{24}\cdot\frac{z^2}{r^2}\right)$. Ce calcul fait, donnera le degré d'ouverture de compas pour tracer le pas sur chaque circonférence primitive.

62. *Des courbes génératrices dans les engrenages.*—Nous appellerons courbe génératrice celle que, dans un engrenage, on se donne sur une des deux roues, pour en déduire la courbe convenable à chaque dent de la roue qui doit engrener avec la première. Toutefois, le nombre des courbes génératrices employées dans la pratique est fort petit; ces courbes sont (fig. 375): 1° Un cercle entier dont le centre est sur la circonférence primitive de la couronne à laquelle il est attaché; 2° une droite dirigée au centre de la couronne; 3° la développante dont le tracé s'obtient en divisant le cercle dont elle dérive en une infinité de parties égales très-petites, en menant des tangentes par chaque point de divisions égales en longueur à la somme des divisions comprises entre les points de contact et celui d'origine de la courbe, et en faisant passer une courbe par les extrémités de ces tangentes. Cette courbe est d'ailleurs engendrée par l'extrémité d'un fil tendu qui se déroule le long d'une circonférence. Les formes des dents correspondantes d'une

roue pour les trois espèces de courbes génératrices fixées à celle qui engrène avec elle, s'obtiendraient aisément à l'aide du tracé indiqué dans le précédent numéro.

63. *Lanterne à fuseaux cylindriques.* — On appelle lanterne une petite roue armée de *cylindres* ou *fuseaux* parallèles à l'axe dont la section est un cercle, et dont les axes sont sur la circonférence primitive de la roue; ces fuseaux s'assemblent par les extrémités sur deux *plateaux* ou *tourteaux* (fig. 376). Pour tracer les dents de l'autre roue, on disposera la lanterne C' (fig. 377) de telle sorte que l'un de ses fuseaux touche la ligne des centres au point T de contact des cercles primitifs; ce point sera aussi la racine de la dent qui doit saisir le fuseau sur la ligne des centres; et si T*t* est le pas de la roue C sur sa circonférence primitive, le point *t* sera également la racine de la dent qui doit quitter un fuseau de la lanterne lorsque celui qui le suit doit être saisi dans la ligne des centres. Joignons le point T au centre *a* du fuseau en avant, la droite T*a* sera une normale au cercle de ce fuseau, et, par conséquent, T*b* la plus courte distance du point T à ce cercle. Par le point *t* et le point *b* nous ferons passer un cercle dont le centre se trouve sur la circonférence C en o : on aura ainsi la courbe de dent qui doit conduire un fuseau; le point *b* sera en outre la saillie de cette dent, parce que, si elle était plus courte, la dent quitterait le fuseau qu'elle a engrené, avant que le fuseau consécutif ne fût parvenu dans la ligne des centres où il doit être en prise. Ainsi, l'arc décrit du point C comme centre, et d'un rayon égal à C*b*, limitera extérieurement les dents de la roue C. Il est entendu que le pas de l'engrenage a été réglé d'après le diamètre des fuseaux, l'épaisseur des dents et le jeu qu'on juge convenable. Cette épaisseur étant d'ailleurs mesurée sur la circonférence primitive, rien n'est plus facile que de terminer la dent par une courbe égale et symétrique à celle qu'on vient de trouver. Les dents ne s'étendent ici que jusqu'à la circonférence primitive de C; on les termine au dedans de cette circonférence par un creux où les fuseaux puissent se loger avec un jeu d'autant moindre que la matière de la roue est plus dure. Ces creux sont définis soit par des courbes arbitraires, soit par des rayons qui partent des racines de deux dents consécutives.

Dans les *crics*, le mouvement se transmet par l'engrènement de la lanterne; mais comme elles sont fort petites, les fuseaux (fig. 378), au lieu de s'appuyer sur des tourteaux, sont liés au centre de rotation par des bras arbitraires qui n'enveloppent pas les points de *touche* des dents contre ces fuseaux.

On remarquera qu'en conservant le tracé précédent, une lanterne ne peut conduire une roue qu'en poussant ses dents avant l'arrivée sur la ligne des centres; si on voulait que l'action du fuseau sur la dent eût lieu encore à partir de la ligne des centres, il faudrait que la dent eût une forme concave du côté du fuseau qui la conduit, ce qui n'est pas admis en pratique. On

doit donc éviter de faire conduire une roue par une lanterne. Les fuseaux des lanternes frottant plus souvent que les dents, leur diamètre doit être des $\frac{4}{5}$ aux $\frac{5}{3}$ de l'épaisseur de ces dernières, supposées de même matière. Les fuseaux ne doivent avoir que la longueur nécessaire pour le jeu des dents entre les plateaux de la lanterne. Il n'y a que la simplicité de construction qui puisse faire adopter les lanternes dans les machines, attendu leurs divers inconvénients. Un des plus graves c'est que le point de contact de la dent avec le fuseau ne varie presque pas sur le fuseau, tandis que le contraire arrive sur la dent; le frottement ne s'exerçant, par conséquent, que sur l'étendue d'un très-petit arc sur les fuseaux, ceux-ci s'useraient très-promptement, s'ils n'étaient construits en fonte. Les fuseaux mobiles autour de leur axe sont très-défectueux; ils acquièrent du jeu à la longue et occasionnent des secousses.

Si, dans les constructions ci-dessus, on suppose que le rayon de la lanterne devienne infini, on aura le cas d'une crémaillère droite avec fuseaux cylindriques (fig. 379); le centre de tous les fuseaux est la ligne primitive de la crémaillère, et la longueur de la perpendiculaire abaissée du centre sur cette droite équivaut au rayon de la circonférence primitive du cercle destiné à engrener avec cette crémaillère. Il est facile de voir que la forme des dents de la roue est une développante; car cette courbe serait engendrée par la droite primitive des fuseaux en roulant autour de la circonférence primitive de la roue. On voit encore que, d'après les raisons déjà spécifiées, on ne doit employer ce système qu'autant que ce serait la roue qui conduirait la crémaillère.

Lorsqu'au contraire une crémaillère est destinée à conduire une lanterne, le tracé des dents de cette crémaillère droite s'effectue absolument de la même manière que pour une roue; la courbe obtenue par la méthode générale devient une *cycloïde* dont la génération est due à un point d'une circonférence qui roule sur une droite. On tracera d'abord le cercle primitif de cette lanterne, c'est-à-dire celui qui contient les centres des fuseaux (fig. 380); une tangente à ce cercle sera la ligne primitive de la crémaillère, et devra contenir les naissances des dents de cette dernière. La profondeur des creux de la crémaillère sera déterminée par une droite parallèle à la ligne primitive, et passant à une distance égale au jeu qu'on veut donner. La saillie des dents sera enfin fixée par la condition que chacune d'elles abandonne un fuseau, au moment où la consécutive saisit un nouveau fuseau. Ce système est quelquefois employé (par exemple, dans les scieries) pour faire mouvoir une crémaillère, à dents courbes, par une lanterne; mais cela est défectueux, attendu qu'ici, comme dans le cas général, les fuseaux ne peuvent pousser les dents qu'en avant de la ligne des centres. Si on voulait que ces fuseaux n'agissent encore qu'à partir de la ligne des centres, il faudrait donner aux dents une forme concave, ainsi qu'il a déjà été expliqué plus haut.

64. On appelle *pignon* toute roue où la génératrice adoptée pour ses dents est une droite convergente au centre (fig. 381). Les dents d'un pignon ne sont autre chose que des prismes renfermés entre deux rayons, et qui se terminent extérieurement à la circonférence primitive de ce pignon. Ces droites sont ainsi limitées parce qu'elles doivent être conduites par les dents de l'autre roue; mais, pour ne pas laisser d'*arête vive* à la partie extérieure des flancs, on les termine du côté de la circonférence primitive par un arc de cercle peu bombé. Quant au tracé des dents, il s'effectue en cherchant l'enveloppe de plusieurs arcs de cercle, dont les centres sont sur les divisions du pas de l'autre roue et dont les rayons sont égaux aux plus courtes distances des divisions correspondantes du pas du pignon à la droite génératrice de sa dent. Si les dents de la roue doivent être courtes, on se bornera à un seul arc de cercle. En un mot, le tracé s'effectuera par la méthode générale indiquée au n° 59, et en admettant que le pignon ne doit être poussé qu'à partir de la ligne des centres. Mais il en est ici du pignon comme de la lanterne; ce pignon doit être conduit par l'autre roue. Si le contraire arrive, et qu'il soit lui-même destiné à conduire la roue, il faudra alors armer ce pignon de dents qui devront la pousser en agissant contre des flancs droits pratiqués sur cette roue et convergents à son centre. On s'arrangera de manière que cette action ne commence qu'à partir de la ligne des centres. C'est même quand deux dents se pousseront sur la ligne des centres, qu'on fixera le creux de l'une et l'autre roue au moyen d'un creux suffisant qui empêche que le creux ne soit atteint par la pointe des dents engagées. Enfin, les saillies seront telles que chaque dent conduise le flanc de l'autre roue jusqu'au moment où les deux dents suivantes se trouveront sur la ligne CC'.

On passe aisément du cas général qui précède à celui d'une crémaillère, en supposant infini le rayon de la circonférence primitive du pignon; les flancs de ce dernier deviennent alors perpendiculaires à la direction de la crémaillère et se terminent extérieurement à sa ligne primitive. Le cercle primitif de la roue est tangent à cette dernière ligne, et ses dents sont des développantes produites par le roulement de la droite AB (fig. 382) autour du cercle C. Si on veut que la crémaillère conduise à son tour la roue C, on armera la crémaillère de dents courbes, et la roue C de flancs droits assez creux pour que les dents de la crémaillère n'y soient pas arrêtées par leur pointe.

65. *Tracé des cames en général.* — Les considérations précédentes sont applicables aux cames qui soulèvent les pilons, ou à celles qui agissent sur des leviers mobiles autour de points fixes. Le premier cas est celui d'une roue qui conduit une crémaillère, et le deuxième celui d'une roue qui conduit ce pignon. Mais comme les cames doivent conduire longtemps, et que leur développement est beaucoup plus grand que celui des dents d'un engrenage, on conçoit pourquoi leur tracé doit être plus rigoureux que celui de ces dernières.

1° *Came de pilon.* — Une tige verticale L (fig. 383) porte en saillie un mentonnet BE, que soulève une came, ou courbe, fixée à une circonférence primitive tangente à la droite verticale AB décrite par l'extrémité du mentonnet. Toutefois, le véritable cercle qui porte la came doit être *en retrait* avec un certain jeu en arrière du cercle primitif. Maintenant, pour que le mouvement de l'arbre C transmette son mouvement uniforme au mentonnet, il faudra tracer la came comme on en agit d'après la méthode générale. Le chemin parcouru par le mentonnet devra être égal au chemin décrit sur la circonférence primitive, en sorte que la courbe de cette came sera une développante dérivée de la circonférence primitive tangente à la droite AB. T6 (fig. 384) étant la hauteur verticale dont le mentonnet doit être soulevé à partir de la ligne des centres, on cherchera l'arc T6′ que doit décrire la circonférence primitive pendant le soulèvement ; on partagera la hauteur T6 et le pas T6′ dans le même nombre de parties égales ; l'enveloppe des cercles décrits avec les rayons 6T, 5T, 4T, etc., et des points T, 1′, 2′, 3′, etc., sera la courbe cherchée, qui n'est autre qu'une développante. Tantôt la came est pleine et armée d'un tenon pour être fixée sur la roue qui doit la porter (fig. 385) ; tantôt elle est évidée (fig. 386) ; tantôt enfin c'est une simple lame courbe (fig. 387).

2° *Came d'un levier mobile.* — Supposons un levier AT (fig. 388) mobile autour de l'axe C, et destiné à imprimer un mouvement uniforme à la tige AB d'un piston. Imaginons que le levier AT doive en outre recevoir son mouvement de l'arbre C′ ; on demande quelle sera la forme de la came de ce dernier. On supposera d'abord qu'à la position initiale du levier AT, son mentonnet TO soit sur la ligne des centres CC′. Connaissant la vitesse de rotation du levier AT d'après les conditions du problème, ainsi que celle de l'arbre C′, on partagera d'abord l'intervalle CC′ en deux parties CT et C′T, réciproquement proportionnelles à ces vitesses ; ces parties seront les rayons des deux cercles primitifs tant du levier que de l'arbre ; le mentonnet du premier est ici une droite dirigée vers C. Si la position la plus basse du levier correspond à l'instant où le mentonnet prend la position C*t*, on partagera l'arc primitif T*t* en un certain nombre de parties égales très-petites, en quatre, par exemple ; on portera ces mêmes parties de T en *t′* sur le cercle primitif de l'arbre ; puis on tracera l'enveloppe de tous les arcs décrits des points T, 1, 2, 3, *t′* de l'arc T*t′* comme centres avec des rayons égaux aux plus courtes distances des points de divisions de l'arc T*t* (T, 1′, 2′, 3′,...) à la droite C′*t*. La courbe *o′t*1″2″3″. . . sera la forme cherchée de la came, en tant que celle-ci transmettra le mouvement uniforme au levier AT. L'amplitude OT du mentonnet sera obtenue en rapportant l'extrémité *o′* de la courbe par un arc de cercle sur la ligne CT en O.

Quand la came doit rester peu de temps en contact, ainsi qu'il arrive pour les marteaux à choc, la forme de la came est indifférente, et il est inutile

de chercher à rendre momentanément le mouvement uniforme, parce que le choc détruit la régularité du mouvement. A la vérité, dans les deux exemples précédents, il y a également choc ; mais la came conduit longtemps, et d'ailleurs on a le soin de rendre la vitesse du mouvement très-faible.

66. *Tracé des cames dans le cas où l'on veut éviter le choc.* — Quand on veut éviter le choc, il n'est plus possible de satisfaire à la condition de l'uniformité du mouvement. Il suffit de faire en sorte que la came et le mentonnet se prennent et se quittent tangentiellement à la direction du mouvement de l'arbre moteur qui porte la came. Si, par exemple, l'arbre C′ (fig. 389) doit faire tourner le levier CD sans choc, et l'abaisser jusqu'à la position CD′, on disposera l'arbre C′ très-près de la position initiale du levier, et la perpendiculaire C′*a* donnera le point *a* de contact de la came avec la face supérieure du levier. De même, en abaissant la perpendiculaire C′*b* pour la position extrême du levier, le point *b* sera le point de contact d'*échappée* de la came. Mais on connaît aussi l'angle *a*C′*b*′ que décrit l'arbre C′ pendant que le levier passe de CD en CD′ : si donc on rapporte le point *b* en *b*′ sur le rayon C′*b*′ qui fait avec C*a* l'angle décrit par l'arbre, on aura les deux éléments extrêmes de la came.

Un système analogue s'emploie pour faire mouvoir un pilon sans choc ; le montant du pilon est fendu par une disposition moisée (fig. 390) et semblable à celle du n° 28, afin de laisser passer la came. Ici la vitesse du mentonnet est nulle à l'instant où il est saisi par la came, mais elle croît progressivement. On pourrait donc encore se proposer de tracer la came de façon que la vitesse du mentonnet ou du levier soit accélérée suivant une loi donnée. On voit à l'avance que plus la came sera courbée, plus la vitesse variera avec douceur. Si on veut que la vitesse soit éteinte à l'instant où la came abandonne, il suffira, comme nous l'avons fait, que la came soit encore tangente à l'extrémité du mentonnet ou du levier. On aura soin, tout en donnant beaucoup de courbure à la came, que le mentonnet ou le levier, en s'échappant, ait le temps d'arriver à sa position de repos avant que la came suivante soit arrivée en contact, autrement il y aurait choc et une partie de la course anéantie. C'est par cette raison qu'on enlève de la came en arrière tout ce qui pourrait s'opposer au mouvement du mentonnet ou du levier devenu libre. Ces dispositifs de cames où l'on cherche à éviter le choc ont, pour le cas des leviers, l'inconvénient que, vers la fin du contact, il y a repos ou interruption ; parce que l'extrémité *b* de la came doit parcourir le bout *b*D′ du mentonnet (figure du levier) qui a déjà été parcouru pendant la durée de la rotation du levier. Mais cet inconvénient est insensible, lorsque le centre de rotation C′ de l'arbre est très-éloigné de l'extrémité des cames ; car la perpendiculaire *b*D′ diffère d'autant moins de l'arc décrit par l'extrémité *b* de la came que la longueur C′*b* est plus grande relativement à *b*D′.

67. *Engrenage à développantes.* — On se donne la développante *a*′*mb*′ (fig.

391) d'un certain cercle C'K' assez peu distant de sa circonférence primitive, développante qui est la courbe d'une dent fixée au cercle dont C' est le centre; je dis que l'autre courbe du cercle primitif en C qui touche le cercle primitif C' en T sera une autre développante *amb*, tangente à la première en un point *m* sur la normale commune KK' passant par T, et que cette développante *amb* appartient au cercle CK touché par la normale KK', et concentrique au cercle primitif C. C'est ce qu'il serait facile de reconnaître en employant encore le procédé du n° 60, pourvu qu'en prolongeant les points de division des circonférences primitives en avant et en arrière de la ligne des centres, et au delà du point où la courbe *a'mb'* rencontre son cercle primitif. Mais il est plus simple d'avoir recours à cette propriété que la courbe *amb* est aussi une développante. Voici comment on peut la démontrer. Toutes les normales à la développante *a'mb'* sont tangentes au cercle C'K'; on sait en outre que l'autre courbe cherchée *amb* touche continuellement *a'mb'* en des points *m* tels que la normale commune KK' en chacun de ces points passera par T, point de contact des cercles primitifs. Donc ces normales communes se confondront toutes avec la tangente invariable TK' au cercle C'K' ou avec la tangente au cercle CK, ou bien encore avec la tangente commune aux deux cercles C'K' et CK. Partant aussi, les normales à la courbe *amb* se confondront aussi successivement avec la tangente TK de ce dernier cercle; ce qui n'appartient qu'à une développante produite par l'enroulement d'un fil K*pa* de K en *a* autour du cercle CK. On peut d'ailleurs démontrer, réciproquement, qu'en prenant pour courbes de dents les développantes *amb* et *a'mb'* des cercles CK et C'K' tangents à une droite KK' passant constamment par le point de contact T des cercles primitifs, la condition de l'uniformité de mouvement est satisfaite, car les tangentes *m*K et *m*K' étant, d'après la propriété des développantes, toujours égales aux arcs *a*K et *a'*K', on voit que *a* cheminera autant que *a'*. Mais on a la proportion

$$CK \ : \ C'K' \ :: \ CT \ : \ C'T'.$$

Donc les circonférences primitives, décrivant des arcs proportionnels à ceux que décrivent les cercles CK et C'K', décriront elles-mêmes simultanément des arcs égaux.

Voici maintenant une propriété particulière aux dents à développante. Nommons P l'effort sur l'une et l'autre roue suivant la tangente en T, à leurs cercles primitifs; N la pression normale exercée par les deux dents suivant la direction invariable KK'; il y aura, à cause du mouvement uniforme, équilibre entre l'effort P et la résistance N: autrement dit, le moment de la puissance $P \times CT$ sera égal au moment de la résistance $N \times CK$; d'où l'on tire

$$N = P \times \frac{CT}{CK}.$$

Mais le rapport $\frac{CT}{CK}$ est constant en vertu de la propriété géométrique des développantes, P reste le même à cause du mouvement uniforme. Ainsi la

pression N demeure constante dans tous les points de contact de deux dents à développantes. Voilà pourquoi le frottement qu'elles exercent l'une contre l'autre est toujours le même. Cependant il n'en résulte pas que les dents s'useront régulièrement, comme il a été dit à tort pour la première fois dans le cours de mécanique de l'École d'application, et comme d'autres auteurs l'ont répété depuis. Car les dents qui auraient la propriété de s'user également dans tous leurs points sont celles pour lesquelles le travail du frottement serait constant, et il faudrait que les arcs de glissement fussent égaux pour l'une et l'autre de celles qui engrènent ensemble. Or, il arrive qu'à la racine les arcs ou chemins parcourus sont plus petits qu'à la pointe. Donc les dents à développantes tendent aussi davantage à s'user à la racine qu'à la pointe. Toutefois, comme la pression est constante sur ce genre de roues, elle est nécessairement moindre que la plus grande des pressions variables exercées sur les autres espèces de dents, cette plus grande pression aura nécessairement lieu, d'après ce qui précède, toujours à la pointe, et c'est un inconvénient d'autant plus réel qu'à cet endroit il y a plus de chances à la rupture.

Pour trouver la limite des creux des dents, il faut considérer deux dents sur la ligne des centres CC′, parce qu'en cet endroit les dents se croisent le plus possible. Les saillies des dents de la roue conductrice et de la roue conduite, sont déterminées par les intersections *m* et *m′* (fig. 392) de la normale invariable commune avec la dent antérieure et la dent postérieure de la roue qui conduit. Toutefois ces dents prendront toujours avant la ligne des centres et d'autant plus en avant que la normale commune est plus inclinée par rapport à cette dernière ligne. Si on voulait que les dents de la roue C ne prissent celle de la roue C′ que sur la ligne des centres, il faudrait arrêter la saillie de ces dernières à la circonférence primitive C′ à laquelle elles appartiennent, et ce serait la roue C qui conduirait la roue C′.

68. *Engrenage des roues d'angle.* — Passons aux engrenages coniques ou des roues d'angle; toute la difficulté consiste à transporter dans l'espace ce que nous avons dit pour le cas du plan. La position des axes (3e partie, 26) CS et C′S (fig. 393) étant fixée, nous avons dit (3e partie, 26) qu'il fallait diviser l'angle CSC′ compris entre eux en deux autres CST, C′ST par une droite ST, telle que les perpendiculaires TC et TC′ soient réciproquement comme les vitesses de rotation à imprimer à ces axes. En faisant tourner ces angles autour des axes respectifs qui leur correspondent, on a vu qu'on obtenait ainsi les cônes primitifs se touchant suivant l'arête commune ST. Cela posé, tout ce que nous avons pu dire pour le cas des roues comprises dans un plan, sera applicable à l'espace, pourvu qu'on remplace les lignes dont il a été question par des plans passant par le sommet S des cônes primitifs, et les lignes courbes par des cônes ayant ce même point pour sommet. On remarquera que les couronnes ou jantes ADBT et BTFG, qui portent des dents ou fuseaux,

sont et doivent être en général terminées, du côté opposé au sommet S des cônes, par d'autres surfaces coniques DEHT et TGKI, dont les sommets S_1 et S_1' sont sur les axes SC et SC' des roues, et dont les arêtes S_1T et $S_1'T$, comprises dans le plan de ces axes, sont perpendiculaires à l'arête de contact ST des cônes primitifs, en sorte qu'elles forment le prolongement de l'une et l'autre, et sont comprises dans le plan perpendiculaire à ST et tangent à la fois aux cônes S_1 et S_1' : c'est sur la surface de ces cônes qu'on applique les panneaux des dents et qu'on vérifie le tracé général de l'engrenage. Or, je remarque que, vu le peu d'étendue qu'occupe sur ces cônes, le profil de la courbe d'une dent et de celle qui la conduit, on peut, sans erreur sensible pour la pratique, regarder les petites portions des surfaces coniques S_1, S_1', correspondantes à ces dents, comme se confondant avec le plan tangent S_1TS_1' lorsqu'elles se poussent en T, où a lieu leur contact mutuel.

Développons donc les deux surfaces de cônes DETH et TGKI sur le plan tangent dont il s'agit. Ce développement n'offre aucune difficulté, puisqu'on a la longueur des arêtes S_1T et S_1H pour l'une, et celle des arêtes TS_1' et IS_1' pour l'autre. On connaît aussi le périmètre des bases DT et GT. On observera d'ailleurs que, dans ce développement, les longueurs dans le sens des arêtes et les largeurs dans le sens des cercles méridiens concentriques aux sommets, ne sont nullement altérées. De cette manière on ramènera de suite le problème des engrenages coniques à celui des engrenages cylindriques ou sur un plan, car les cercles primitifs DT et TG sur la surface des cônes seront devenus des arcs de cercle TM et TN sur le développement, tangents entre eux et qu'on pourra regarder comme les cercles *primitifs* de deux roues planes à tracer par les méthodes ci-dessus, selon le genre d'engrenage que l'on désire adopter. On aura aussi obtenu tous les panneaux nécessaires pour tracer les dents sur la surface des cônes limites S_1 et S_1'; d'après quoi l'on exécutera facilement les dents tout entières. Ces dernières ayant une certaine saillie au delà des cercles primitifs du développement, on portera cette saillie de D en P pour l'un des cônes primitifs et de G en Q pour l'autre, les couronnes premières devront ainsi être terminées par les profils EPS_2 et R'QK, afin qu'il devienne possible d'y entailler les dents entières de chaque roue d'angle. On pourra d'ailleurs préparer un nouveau panneau développé pour les surfaces coniques U_1 et U_1', qui terminent intérieurement les couronnes du côté du sommet S ; ces cônes ont leurs arêtes parallèles à celles des premiers cônes limites, et donnent pour les dents des profils ou figures exactement semblables, en sorte qu'il suffira, comme l'indique la figure 393, de réduire les premiers panneaux dans le rapport de ST à SB.

69. *Exécution des engrenages.* — Lorsque les dents des deux roues d'engrenage se prennent avant la ligne des centres, ou quand leurs divisions, leurs formes ont été tracées par des ouvriers inhabiles, il peut se produire des arcs-boutements, et par suite des ruptures, si ces dents ne sont pas sus-

ceptibles de résister aux efforts que les deux roues exercent l'une contre l'autre. Pour obvier aux inconvénients de l'arc-boutement, les anciens praticiens ont cherché à faire en sorte que les dents ne puissent jamais se prendre que sur la ligne des centres, ou même après, et ils ont eu l'idée d'agrandir un peu le rayon de la roue qui conduit, sans augmenter pour cela le nombre des dents qui convient à son rayon primitif. De cette manière il n'y avait qu'une seule dent de cette roue en prise avec une dent de la roue conduite, tant que la première poussait la seconde, toutes les autres dents de la roue conductrice demeuraient en arrière des autres dents de la seconde roue. Les deux dents se quittant seulement après la ligne des centres et au moment où la dent consécutive de la roue conduite avait son flanc inférieur dans cette ligne, ce n'était aussi qu'au delà de cette ligne que deux nouvelles dents pouvaient se saisir. Mais il arrivait que le mouvement de la roue qui conduisait l'autre, s'accélérait et parcourait un certain intervalle qui la tenait en arrière de celle qu'elle devait saisir, et qui est à peu près égal à la différence des *pas* de dent des roues. On voit ainsi que cette accélération produisait un choc, ou que chaque dent conductrice arrivait sur chaque dent conduite avec une vitesse acquise; mais c'était remplacer l'inconvénient de l'arc-boutement par un autre pour le moins aussi grave.

Un second moyen consistait à monter sur leurs tourillons les roues dentées, à les faire engrener entre elles, et à corriger avec la lime les endroits défectueux ; ce ne serait plus alors la peine de porter tant de soin au tracé des engrenages pour le déformer ensuite d'une manière si arbitraire.

Aujourd'hui on procède avec plus de rigueur. Les modèles ou *moules* dans lesquels les roues en fonte sont coulées, donnent d'abord à celles-ci des dents un peu plus épaisses. Quand les roues sont revenues de la fonderie, on les monte sur un arbre bien concentriquement, ce dont on s'assure au moyen d'une pointe fixe qui, touchant l'extrémité d'une première dent, doit ensuite toucher celles de toutes les autres. La roue étant bien posée et bien établie, on la fait tourner avec son axe, pour en dresser le *plat* autour. Après quoi on marque sur ce plat la circonférence primitive. C'est sur cette dernière qu'on opère avec précision la division dont les points représentent les lignes milieux des dents. Ces points milieux servent de repères à un patron métallique qui porte plusieurs dents d'une forme parfaitement régulière et qu'on présente à la roue de telle manière que les milieux des dents du patron coïncident avec les divisions de la circonférence primitive. Enfin, on trace sur le plat, avec une pointe d'acier qui suit les contours du patron, et on enlève soit au ciseau soit à la lime les parties excédantes, selon qu'elles sont plus ou moins considérables. En général, dans les modèles qui servent au coulage des roues, on laisse environ une ligne de *gras* aux dents.

Ce qui précède concerne les roues entièrement métalliques; mais souvent l'anneau seul des roues est en fonte, et leurs dents sont en *bois*. Cet anneau

est percé de mortaises (fig. 393); et si elles sont bien faites on y met en place les dents découpées à l'avance. La dent traverse toute la jante de fonte; les deux faces de la mortaise *parallèles* à l'axe convergent vers le centre; les deux autres demeurent parallèles au plan de la roue et sont munies d'un épaulement qui empêche la dent de descendre. Ces dents se nomment *peignes* ou *aluchons* et sont retenues au-dessous de la jante par une clef qui les traverse un peu de biais. Lorsque les roues sont très-petites ou qu'elles ont beaucoup de courbure, les dents, après avoir traversé la jante, laissent entre leurs extrémités inférieures un intervalle dans lequel on chasse un coin avec force au-dessous de la jante (fig. 394); ce coin ne peut évidemment tendre à tomber. Enfin, parlons encore d'une disposition moins assujettissante que la première de toutes, et qui consiste à remplacer la mortaise prismatique par une autre qui renferme un évidement dans lequel la dent de bois plus épaisse, après avoir été chassée avec force, se renfle par suite de la compression qu'elle éprouve au dehors de la jante.

70. *Épaisseur des dents.* — Autrefois on avait coutume de donner aux dents une très-forte épaisseur et une largeur dans le sens de l'axe de la roue qui ne dépassait pas le double de leur épaisseur. Le pas de ces engrenages était grand et s'élevait de quatre à six pouces; l'épaisseur des dents était de dix-huit lignes à quatre pouces, c'est-à-dire de 4 à 8 centimètres. Aujourd'hui on les fait plus minces et en même temps plus larges, de façon à ce qu'elles aient la même force pour résister à la rupture. Les dents ont actuellement six centimètres d'épaisseur et jusqu'à 25 à 30 centimètres de largeur dans les plus fortes machines ou dans celles de quarante à cinquante chevaux; pour les machines médiocres ou de la force de dix à douze chevaux, les dents se réduisent à 2 et 3 centimètres d'épaisseur sur 12 à 16 centimètres de largeur ordinaire. Enfin, on fait les dents de bois, d'épaisseur égale à celle des dents de fonte seulement pour plus de commodité. Ces dimensions sont établies plutôt par l'usage que par des règles certaines; leur emploi est néanmoins très-avantageux, afin de diminuer les résistances des frottements des engrenages; car les dents, par cela seul qu'elles ont moins d'épaisseur, deviennent, à rayon égal de roue, plus multipliés. On a vu (2[e] partie, 135) que la résistance du frottement de deux dents l'une contre l'autre pouvait être représentée par une force tangentielle à l'une ou l'autre des circonférences primitives, et égale à

$$f.Q.\pi\left(\frac{m+m'}{mm'}\right), \text{ ou à } f.Q.\pi\left(\frac{1}{m}+\frac{1}{m'}\right).$$

Dans cette expression, f est le coefficient du frottement dépendant de la nature des substances des roues et donné par l'un des tableaux du n° 106, 2[e] partie; Q est l'effort ou la réaction des deux roues l'une contre l'autre; π exprime le rapport 3,1416 de la circonférence au diamètre, et m et m' sont les nombres des dents dont les deux roues sont armées à leur circonférence. Si je nomme V le chemin que parcourt dans une seconde un point de la circon-

férence primitive d'une roue, c'est-à-dire sa vitesse à la distance de son rayon primitif, le produit du frottement des dents par V sera le travail absorbé par ce frottement dans une seconde, lequel aura pour expression

$$f.\,Q.\pi\left(\frac{1}{m}+\frac{1}{m'}\right)\times V, \quad \text{ou} \quad f.\pi\left(\frac{1}{m}+\frac{1}{m'}\right)\times QV.$$

Je remarque que, dans ce dernier résultat, QV ou le produit de la puissance motrice de la roue par le chemin que parcourt son point d'application dans l'unité de temps, n'est autre chose que le travail transmis à cette roue, travail qui est indépendant du diamètre de cette roue, et qui est donné une fois pour toutes. Mais, pour un même travail, il est visible que plus V est considérable, plus Q est petit. Or, la vitesse à la circonférence d'une roue qui doit parcourir un certain nombre de révolutions pendant un temps déterminé, augmente proportionnellement avec son rayon. Ainsi, en augmentant le rayon, on diminue, on rend plus faible la puissance Q qui réagit contre la roue à travail égal. Revenant maintenant à l'intensité de la résistance du frottement d'un engrenage, ou à $f.\,Q.\pi\left(\frac{1}{m}+\frac{1}{m'}\right)$, on a deux manières de la diminuer, soit en augmentant les nombres de dents m et m' qui entrent en dénominateurs dans cette expression, soit encore en affaiblissant Q. Or, on peut rendre plus grand le nombre des dents en réduisant leur épaisseur, et on peut rendre Q plus faible, en agrandissant le rayon de la roue. Remarquez que cet agrandissement est toujours possible dans les engrenages, pourvu que les rayons de l'une et l'autre roue soient augmentés tous deux de manière à conserver le rapport suivant lequel leurs deux axes doivent se transmettre la vitesse angulaire. Il y a donc avantage à diminuer l'épaisseur des dents, et à augmenter la grandeur des rayons des roues ; il ne faut pas oublier que si, le travail demeurant constant, les bras de levier des puissances et des résistances sont agrandis, les frottements produits sur les tourillons, et qui sont proportionnels à la résultante de ces forces, deviennent eux-mêmes moins considérables.

Les pièces d'une machine, ou les engrenages, ont, comme on sait (3e partie, 4 et 6), pour objet de transmettre de proche en proche le travail du moteur jusqu'à l'outil destiné à fabriquer l'ouvrage ; que chacune d'elles absorbe par ses résistances passives, par ses frottements, une portion de travail qui peut être le quart ou le cinquième du travail qu'elle communique à la pièce du côté de l'outil. Si donc on connaît *à priori* ce dernier travail, ou même encore celui qui est dépensé par le moteur, il est facile de conclure celui qui fait mouvoir chaque pièce séparément, soit en diminuant d'un quart ou d'un cinquième le travail qui fait mouvoir la pièce qui la précède du côté du récepteur, soit en augmentant dans le même rapport environ celui qu'elle doit laisser à la pièce du côté de l'outil. Cette quantité de travail ainsi obtenue pour chaque pièce ou roue d'engrenage est précisément ce que représente le produit QV ; et si nous le divisons par V ou par la vitesse de la circonférence, nous aurons Q,

c'est-à-dire la pression motrice qui réagit sur cette pièce. C'est d'après la connaissance de cet effort que les Anglais règlent les dimensions des dents des engrenages. Voici le tableau donné à cet égard par Tredgold, dans son *Traité des machines à vapeur:*

TABLEAU des dimensions des dents des engrenages.

PRESSION Q en kilogrammes.	PAS DES DENTS en centimètres.	ÉPAISSEUR en centimètres.	LARGEUR en centimètres.
k.	c.m.	c.m.	c.m.
10	0,63	0,30	2,00
40	1,27	0,60	3,27
80	2,00	0,90	4,54
158	2,54	1,20	5,81
244	3,17	1,50	7,08
336	3,80	1,80	8,35
430	4,43	2,10	9,62
580	5,08	2,40	10,89
730	5,71	2,70	12,16
870	6,34	3,00	13,43
1100	6,97	3,30	14,70
1210	7,62	3,60	15,97
1500	8,25	3,90	17,24
1750	8,88	4,20	18,51
2200	9,51	4,50	19,58
2300	10,16	4,80	20,85
2660	10,79	5,10	22,12
2840	11,42	5,40	23,39
3220	12,05	5,70	24,66
3500	12,68	6,00	25,93

Ce tableau paraît d'autant moins fondé en principe, que les épaisseurs y sont croissantes, on ne sait pourquoi, suivant une progression arithmétique dont la raison est trois millimètres; néanmoins il donne des dimensions qui s'éloignent peu de celles que l'usage a consacrées. Il n'y est pas fait mention de la saillie des dents, parce qu'en effet cette détermination consiste à amener deux dents sur la ligne des centres et à rogner ce qui excède le contact des dents suivantes. En général, l'épaisseur des dents dépend de deux circonstances : 1° de l'effort qu'elles ont à supporter par leur pointe sans se rompre; 2° de l'usure qu'elles éprouvent au bout d'un certain temps. La surface qui résiste à l'effort exercé contre la pointe est évidemment la section transversale de la dent faite à sa racine; plus cet effort est considérable, plus devra être grande l'épaisseur de la racine. Or, ce même effort agira avec un bras de levier dont la longueur dépend de la saillie de la dent, en

sorte que l'épaisseur devra croître avec cette saillie. Mais nous avons reconnu l'avantage qu'il y avait à diminuer cette épaisseur : on doit donc s'attacher à réduire la saillie des dents au strict nécessaire, quoique quelques auteurs aient cherché à faire engrener plusieurs dents à la fois, sous le prétexte qu'elles répartissent entre elles la réaction que les deux roues exercent. Quant à l'usure, elle est surtout sensible près de la racine des dents conduites et à la pointe ou courbe des dents conductrices. On s'en rend raison en observant que c'est à ces endroits que le contact a lieu pour des dents à flancs droits ; il en résulte que les dents de la roue conduite sont sujettes à se rompre au bout d'un certain temps à la racine. Celles de la roue conductrice s'usent moins vite, à cause du développement de leur courbe qui est plus grand que celui du flanc conduit de l'autre dent. Donc il faut principalement régler les dimensions des dents sur la roue conduite et, d'après la condition que, malgré l'usure qu'elles doivent éprouver au bout d'un certain temps, elles ne puissent encore rompre. D'après des observations recueillies à Anzin, l'usure des dents en fonte, de pignons ou petites roues conduites, était de trois à cinq millimètres pour six années d'un travail journalier de douze à dix-huit heures. Quant aux dents en bois de la roue conductrice, elles ne s'usaient guère plus vite. Ainsi, il convient de calculer l'épaisseur d'un pignon en la supposant réduite à ce qu'elle devient au bout de six ans ; cette épaisseur ainsi calculée, et augmentée de celle que l'usure doit consommer, sera également donnée aux dents de la roue conductrice. Lorsque les roues sont très-grandes et qu'elles appartiennent à des machines puissantes, on peut se dispenser de faire engrener des dents en bois avec des dents en fonte, et les construire en fonte les unes et les autres. Cela a peu d'inconvénient, à cause que l'influence du frottement est rendue très-faible par l'agrandissement des rayons. Le calcul des dimensions des dents se fonde d'ailleurs sur la théorie de la résistance des matériaux à la flexion et à la rupture dont il est nécessaire de donner ici un exposé succint.

X.

NOTIONS GÉNÉRALES SUR LE CALCUL DE LA RÉSISTANCE DES MATÉRIAUX.

71. Les pièces d'une machine destinée à transmettre de l'une à l'autre jusqu'à l'opérateur le travail d'un moteur quelconque, se composent de diverses parties dont les sections transversales sont pour l'ordinaire de grandeur constante dans leurs longueurs respectives, et qui peuvent, par conséquent, être regardées comme des corps prismatiques ou cylindriques. La réaction exercée réciproquement entre ces corps peut avoir lieu de quatre manières différentes : tantôt elle confond la direction de son effort dans la direction

même de l'axe longitndinal du corps prismatique, soit en étendant soit en rapprochant les fibres de ce corps ; tantôt oblique par rapport à cet axe, elle fléchit le corps ou elle le tord transversalement. La résistance que le corps oppose à ces divers modes d'action est *directe* dans les deux premières circonstances, et relative dans les deux dernières.

Nous avons donc à considérer quatre espèces de résistances des matériaux, c'est-à-dire leurs résistances à la traction, à la compression, à la flexion, et à la torsion. Toute force, selon son intensité, peut seulement changer la forme d'un corps ou altérer son élasticité, ou même encore le rompre ou l'écraser. Si l'action produisait ce dernier effet, ce serait une preuve qu'il n'aurait pas reçu les dimensions convenables ; et si même elle était capable de détruire l'élasticité du corps de telle sorte qu'après un changement de forme produit par la force, le corps ne reprît plus sa forme primitive lorsque cette force aurait cessé d'agir, l'altération qu'il aurait ainsi subie serait une véritable cause de destruction que l'on doit toujours éviter. Aussi dans les calculs des dimensions des pièces d'une machine, aurons-nous le soin de choisir pour limite supérieure l'effort au delà duquel l'élasticité devient imparfaite, effort qui est une fraction déterminée par l'expérience, de celui qui amène la rupture. Mais il n'arrive pas toujours que les corps soient sollicités par l'effort limite capable d'altérer leur élasticité ; des efforts moindres produisent également sur ces corps des déformations avant que ces derniers aient acquis la roideur nécessaire pour communiquer le travail qui leur est transmis, et ces déformations ont dû évidemment absorber un certain travail qui, pour être évalué, exige qu'on connaisse la grandeur de ces déformations, afin d'en conclure le chemin parcouru par le point d'application des forces qui les ont produites, et par suite le travail absorbé.

Or, soit qu'il s'agisse de trouver les allongements, accourcissements, flexions ou torsions qu'un corps de forme donnée éprouve de la part d'une force qui lui est appliquée, soit qu'il s'agisse de calculer ses dimensions pour que son élasticité ne soit point altérée, les formules auxquelles on est conduit, et que nous allons rapporter sans chercher à les démontrer, renferment des coefficients constants que l'expérience a donnés et qu'il convient au préalable de définir.

72. *Définition des forces de traction, de compression, de flexion, de torsion. — Valeur des coefficients d'élasticité et de résistance.* — Lorsqu'une force tire un corps dans le sens de sa longueur, comme un poids suspendu à une corde ou à une barre de fer verticale, cette force est dite de *traction*. Elle devient de *compression*, lorsqu'elle presse le corps ou qu'elle tend à en refouler toutes les fibres dans le sens de leur longueur, ainsi qu'en agit un poids sur des soutiens posés debout. La force est une force de *flexion*, lorsqu'elle est perpendiculaire à la longueur d'une pièce, et qu'elle la courbe de telle sorte que les fibres situées du côté de la partie convexe s'allongent, et que celles situées

du côté de la partie concave s'accourcissent. Par conséquent, dans toute pièce soumise à la flexion, il y a une fibre intermédiaire qui ne s'allonge ni ne s'accourcit ; on la nomme *fibre invariable*. Enfin, supposez une pièce encastrée par un de ses bouts, et recevant à l'autre extrémité un levier perpendiculaire à sa longueur sur lequel une force exerce son action ; cette force se nomme force de *torsion*. Son effet est tel que les divers points de ses fibres se déplacent perpendiculairement à leur longueur, de quantités proportionnelles à la fois à leur distance de l'axe de la pièce et à leur distance de la partie encastrée. Toutes les fois que ces forces sont en deçà de l'effort capable d'altérer l'élasticité d'un corps prismatique, le coefficient constant qui entre dans les formules relatives à cette circonstance, est le même, pour une même nature de substances, à l'égard des forces de traction, de compression et de flexion. Nous le désignerons par E ; et nous l'appellerons simplement *coefficient d'élasticité*. Quant au cas où il s'agit d'une force de torsion toujours en deçà de la limite dont il s'agit, le coefficient constant sera désigné par t et sous le nom de *coefficient de torsion*. Mais si ces quatre forces sont considérées comme très-voisines des efforts qui produisent l'altération du corps, ou qu'il s'agisse de calculer les dimensions de ce dernier, le coefficient constant qui entre dans les formules, non-seulement est différent de ceux d'élasticité ou de torsion, mais encore il a une valeur particulière pour chacune des quatre espèces de forces. Nous aurons alors un *coefficient de résistance à la traction*, un *coefficient de résistance à la compression*, un *coefficient de résistance à la flexion*, et un *coefficient de résistance à la torsion*. Nous désignerons le premier par A, le deuxième par B, le troisième par R, et le quatrième par T. Voici maintenant le tableau de ces coefficients numériques pour les diverses substances employées dans les constructions en général.

TABLEAU

DES COEFFICIENTS D'ÉLASTICITÉ ET DE RÉSISTANCE

POUR LES DIVERS MATÉRIAUX

EMPLOYÉS DANS LES CONSTRUCTIONS.

TABLEAU des coefficients d'élasticité et de résistance pour les divers matériaux employés dans les constructions.

	NATURE DES MATÉRIAUX.	COEFFICIENTS					
		D'ÉLASTICITÉ, ou E (a).	DE TORSION, ou t (b).	DE RÉSISTANCE à la traction. ou A (c).	DE RÉSISTANCE à la compres. ou B (d).	DE RÉSISTANCE à la flexion, ou R (e).	DE RÉSISTANCE à la torsion, ou T (f).
		k.	k.	k.	k.	k.	k.
PIERRES.	Basalte.				200		
	Granit dur.				70		
	id. ordinaire				40		
	Marbre le plus dur.				100		
	Id. blanc veiné				30		
	Grès le plus dur.				90		
	id. tendre.				0,40		
	Brique très-dure.			2,00	15		
	id. ordinaire.			»	4		
	Pierre calcaire ordinaire.			6	50		
	Plâtre.			0,40	6		
	Bon mortier de dix-huit mois.			0,90	4		
	Mortier ordinaire de dix-huit mois.			0,30	2,50		
BOIS.	Chêne le plus fort.	1.688.000.000	8.117.592	196	80	850.100	405.800
	id. faible.	683.000.000	3.284.000	140	50	586.200	167.200
	Sapin fort.	1.293.000.000	6.218.000	»	100	709.700	310.900
	id. faible.	558.000.000	2.683.000	167	26	511.100	134.100
	Orme.				18		
CORDES.	Cordes en chanvre sèches.			125			
	id. mouillées.			82			
	id. goudronnées.			95			
FERS.	Fer forgé, le meilleur de mince échantillon.	25.000.000.000	120.225.000	1333	1250	24.513.000	20.037.000
	id. faible, ou de gros échantillon.	15.000.000.000	72.130.000	667	1250	13.710.000	12.022.000
	Fonte grise	9.029.000.000	43.420.000	167	2500	4.493.000	7.233.000
	id. douce	10.653.000.000	51.230.000	167	2500	7.355.000	8.600.000
	Acier, le meilleur.			1500			
	id. le plus mauvais.			333			
	Chaîne ordinaire de fer forgé.			2000			
	id. de fer forgé, renforcée par un tenon transversal.			2667			

(a) Les coefficients E servent à mesurer les allongements, accourcissements, ou flexions des pièces.

(b) Les coefficients t sont relatifs aux solides dont les sections sont rectangulaires. On leur ajoutera le 1/5 en sus, si les sections sont circulaires.

(c) Les coefficients A représentent les tractions en kilogrammes que doivent au plus supporter les matériaux par centimètre carré de surface de section transversale. En les multipliant par 10, par 5, par 6 ou par 4, on a les mêmes forces capables de les rompre, selon qu'il s'agit de pierres, de bois, de fer ou de cordes.

(d) Les coefficients B représentent la charge que les pièces debout doivent au plus supporter dans les constructions par centimètre carré de section transversale quand elles sont de forme cubique. On les réduira aux 5/6 et à 1/2 pour les pièces de bois dont la hauteur sera 12 et 24 fois le plus petit côté de la base, aux 5/6 et à 1/2 pour des barreaux de fer forgé dont la hauteur sera 12 et 24 fois le plus petit côté de la base, et aux 2/3, 1/2 et 1/5 pour du fer fondu selon que la hauteur sera 4 fois, 8 et 36 fois le plus petit côté. On multipliera par 10, par 5 ou par 4 le coefficient B pour conclure la pression par centimètre carré capable d'écraser les pièces debout, selon qu'elles sont en pierres, en bois ou en fer.

(e et f) Les coefficients R et T de résistance à la flexion et à la torsion deviennent des coefficients de rupture en les multipliant par 10, par 3 ou par 4, selon que la pièce est en bois, ou en fer forgé, ou en fer fondu. On ajoutera aux valeurs de T le 1/5 en sus si les sections sont circulaires, au lieu d'être rectangulaires.

73. *Déformation et résistance d'une pièce soumise à une force de traction.* — Si on considère une barre prismatique tirée dans le sens de son axe par une force P en kilogrammes en deçà de celle qui peut altérer l'élasticité du corps, il faut admettre que cette force est proportionnelle au rapport de l'allongement l produit à la longuenr primitive L de la barre, c'est-à-dire à $\frac{l}{L}$. Cette même force devant croître avec le nombre des fibres du corps parallèles à sa longueur, ou avec la grandeur de son équarrissage, ou plns généralement avec l'air de sa section transversale O, nous aurons

$$P = E \times \frac{l}{L} \times O.$$

Dans cette formule, E n'est autre chose que le coefficient de l'élasticité donné par le tableau du n° 72; l et L sont exprimés en mètres, et l'aire O en mètres carrés.

La quantité de travail dépensé par la force P, pour produire sur le corps l'allongement dont elle est susceptible, s'estime en multipliant cet allongement par la force elle-même, ou l par $E \times \frac{l}{L} \times O$; ce produit équivaut à $E \times \frac{O}{L} \times l^2$: ce qui nous apprend que la quantité de travail de la force ou de la résistance de la pièce croît comme les carrés des allongements ou comme le carré des forces ; car les allongements et les forces correspondantes sont proportionnelles l'un à l'autre. Si on veut trouver les dimensions d'une barre destinée à tenir suspendue une certaine charge P, en kilogrammes, ou réciproquement calculer la charge que soutiendrait par son extrémité une barre d'un certain équarrissage, on aura recours à la formule $P = A \times O'$, dans laquelle O′ exprime l'équarrissage de la pièce en centimètres carrés, et A le *coefficient de résistance à la traction.* Demandons-nous, par exemple, le poids que soutiendra par sa partie inférieure une barre de fer fondu donc la section transversale est un carré de deux centimètres de côté. On aura $O' = 4$; d'après le tableau précédent, A, pour le fer fondu, est de 167 kilogr. D'où

$$P = 167 \times 4 = 668^k ;$$

une pareille barre pourra donc supporter 668 kilogr., sans que son élasticité soit altérée. Si on voulait trouver le poids capable de la rompre, il faudrait, d'après l'observation (c) du tableau, multiplier le poids précédent par 6, en sorte que cette barre devrait être rompue par un poids de 4000 kilogr. environ.

74. *Déformation et résistance d'une pièce soumise à une force de compression.* — Supposons actuellement une pièce debout chargée à sa partie supérieure par un poids qui tend à refouler ses différents fibres, et qui soit inférieur à la limite d'un effort semblable et capable d'altérer l'élasticité du corps. L'hypothèse précédente sur les accourcissements qu'éprouvera cette barre devient

tout aussi admissible qu'à l'égard des allongements qu'elle éprouverait de la part d'une force de traction. Ainsi, on regardera cette force de compression comme proportionnelle au rapport $\frac{l}{L}$ de l'accourcissement du corps à la longueur primitive ; on posera $P = E \times \frac{l}{L} \times O$, et, par suite, la quantité de travail dépensée par l'accroissement de la pièce est égale à $E \times \frac{O}{L} \times l^2$ ou est encore proportionnelle soit au carré de l'accroissement soit au carré de la résistance opposée par la pièce.

Il est également très-facile de calculer les dimensions d'une pièce debout chargée par le haut d'un poids donné, ou de déterminer la charge quand les dimensions sont connues, et cela au moyen de la formule $P = B \times O'$, dans laquelle B est le coefficient de résistance à la compression, et O' la section transversale de la pièce estimée en centimètres carrés. A la vérité le coefficient B est donné d'après l'observation (*d*) du tableau précédent, c'est-à-dire tant que la hauteur de la barre ne dépasse pas 24 fois ou 36 fois sa largeur selon qu'elle est en bois ou en fer : nous verrons plus loin comment on s'y prendra quand les hauteurs s'élèveront au-dessus de ces limites. Cherchons la charge que doit supporter un pilot de chêne de 25 centimètres de diamètre. Sa section transversale O, estimée en centimètres carrés, est égale à

$$\frac{\pi . D^2}{4} = \frac{3,1416 . (25)^2}{4} = 490^{\text{c. m. car.}}$$

La longueur du pilot peut être regardée comme comprise entre 12 fois et 24 fois son diamètre. Le rapport de la résistance du pilot à celle qu'il aurait s'il était cubique est une moyenne entre $\frac{5}{6}$ et $\frac{1}{2}$, ou est égal à

$$\frac{\frac{5}{6} + \frac{1}{2}}{2} = \frac{\frac{8}{6}}{2} = \frac{2}{3}.$$

On multipliera la valeur de $B = 80$ kilogr. pour le chêne fort, par $\frac{2}{3}$; ce qui donne cette autre,

$$B = \frac{2}{3} 80 = \frac{160}{3} = 53^k.$$

d'où l'on tire $P = 53_k. \times 490 = 25970_k.$

Peronnet évalue la charge d'un pilot à 25000 kilogr.

75. *Déformation d'une pièce soumise à une force de flexion, et encastrée par un bout.*— Considérons maintenant une pièce prismatique horizontale DEGF (fig. 395), encastrée solidement par son extrémité DF et partagée par la pensée en une suite de sections *pr*, *qs*, perpendiculaires à sa longueur et très-rapprochées. Si, par l'extrémité libre, on fléchit la pièce au moyen d'une force P

perpendiculaire à sa longueur, les intervalles rectangulaires qui séparent ces sections entre elles deviennent des trapèzes, de telle sorte que la petite longueur *pq* de fibre située du côté de la partie convexe DE s'allonge, et que la petite longueur *rs* de fibre située du côté de la partie concave FG s'accourcit. Il y a donc une fibre intermédiaire et intérieure qui ne s'est ni accourcie ni allongée ; on nomme cette dernière *fibre invariable*. Duhamel a reconnu, en effet, par expérience, que pour une pièce horizontale fléchie, les fibres supérieures s'allongent et les fibres inférieures se refoulent directement. Il a scié la pièce par le bas jusqu'à moitié de son épaisseur environ, et après avoir chassé un coin de bois dans l'intervalle du trait de scie, il a vu que la résistance de la pièce n'était nullement altérée, et qu'elle commençait à diminuer dès que le trait s'élevait aux trois quarts de l'épaisseur. En observant que chaque élément de fibre compris entre deux sections consécutives de la pièce s'allonge ou s'accourcit d'autant plus que cette fibre est plus éloignée de la fibre invariable, il est naturel d'admettre que ces allongements ou accourcissements sont proportionnels aux distances de chaque fibre par rapport à la surface de la fibre invariable. De plus, la résistance de chacune d'elles à la flexion est proportionnelle non-seulement à son allongement ou à son accourcissement (3e partie, 73 et 74), mais encore à sa section élémentaire. Ainsi, chaque résistance d'un élément de fibre est proportionnelle au produit d'un élément de la section de la pièce et de la distance de cet élément à la surface de la fibre invariable ; car cette distance est proportionnelle à l'allongement ou à l'accourcissement. Toutes ces résistauces partielles étant sensiblement horizontales à cause du peu de flexion qu'on suppose à la pièce, et par conséquent parallèles, ont pour résultante une valeur proportionnelle à la somme des produits de chaque élément de la section transversale, multiplié respectivement par sa distance à la surface de la fibre invariable, ou bien encore au produit de la section entière et de la distance de son centre de gravité à cette surface (2e partie, 42). Mais, comme le mouvement dû à la flexion ne peut s'opérer que dans le sens de la force P qui l'occasionne, il faut nécessairement que la résultante des résistances soit nulle d'elle-même, ou que *la fibre invariable passe par le centre de gravité de la section transversale de la pièce*. Il faut de plus que le travail total de toutes les résistances partielles soit égal au travail de la force P qui a produit la flexion, ou au produit $P \times CD$, ou $P \times f$. L'abaissement f de l'extrémité libre de la pièce est ce qu'on nomme la *flèche de flexion*. Or, je remarque que si on examine seulement chaque travail de la résistance des portions de fibres comprises entre deux sections consécutives *pr* et *qs*, on voit qu'il est proportionnel au produit de chaque section élémentaire transversale d'une fibre et du carré de son allongement ou accourcissement (3e partie, 73 et 74), ou même encore au produit de chaque élément de la section totale multiplié par le carré de sa distance à la surface de la fibre invariable. Donc, enfin, le travail total des résistances des fibres est

proportionnel à la somme des produits de chaque élément de la section de la pièce multiplié par le carré de sa distance verticale au centre de gravité de la section entière ; en un mot, il est proportionnel au moment d'inertie de cette section par rapport à un axe horizontal qui passe par son centre de gravité, et qui est situé dans son plan. Enfin, comme ces distances constituent en quelque sorte l'épaisseur verticale de la pièce, et que le travail de la résistance de cette dernière augmente avec les carrés de ces distances et même encore avec l'aire transversale, on peut prévoir à l'avance que le travail de la résistance, ainsi que la résistance de la pièce, augmente comme le cube de l'épaisseur de la pièce. En égalant le travail $P \times f$ de la force appliquée au travail total des résistances des fibres, et en nommant I le moment d'inertie de la section transversale par rapport à un axe qui passe par le centre de gravité de la section, et dans le plan de cette dernière, E le coefficient d'élasticité, et L la longueur de la pièce, on trouve

$$f = \frac{P}{E \times I} \times \frac{L^3}{3}.$$

Telle est l'expression de la flèche que produit une force P sur l'extrémité libre d'une pièce encastrée invariablement à l'autre bout, avant que cette pièce ne transmette l'action de cette force. Si on multiplie f par P, le produit $\frac{P^2 \times L^3}{3 . E \times I}$ sera le travail consommé uniquement pour fléchir la pièce (1). Cette quantité d'action, qui est évidemment une perte dans le travail des machines, étant proportionnelle aux cubes des longueurs et en raison inverse du coefficient d'élasticité et du moment d'inertie de la section, on voit qu'il y a du désavantage à se servir de pièces trop longues, et qu'il y a, au contraire, avantage à rendre le moment d'inertie de la section le plus grand possible, ainsi que le coefficient d'élasticité. On parvient au premier but soit en faisant l'aire de la section transversale la plus grande possible, ou, ce qui vaut mieux encore, en rejetant un grand nombre de ses points loin de l'horizontale passant par son centre de gravité. Quant au coefficient d'élasticité, le tableau du n° 72 montre qu'il est plus considérable à l'égard du fer que du bois ; aussi fait-on mieux, quand on le peut, de construire les pièces d'une machine en fer qu'en bois. L'augmentation qu'on vient de reconnaître si convenable dans la section transversale d'une pièce, explique pourquoi une pièce rectangulaire fléchit moins de champ que sur son plat. C'est encore ainsi qu'on justifie l'emploi des pièces dont le profil a la forme d'une croix, ou qui sont terminées par des *côtes* ou nervures.

76. *Application aux pièces carrées, rectangulaires, ou circulaires.* — Nous

(1) La valeur de la flèche et du travail consommé par la flexion d'une pièce prismatique, au moyen du moment d'inertie de sa section transversale, est le résultat d'un chapitre sur la résistance des matériaux qui devait être annexé à la deuxième partie.

allons rechercher la flèche et le travail consommé par une force verticale P sur une pièce horizontale encastrée par un bout, et dont la section est successivement un rectangle, un carré, un carré posé parallèlement à ses diagonales et un cercle.

1° *Pièce à section rectangulaire.* — Soit a (fig. 396) la largeur horizontale de la pièce, b son épaisseur verticale, L sa longueur ; le moment d'inertie I de la section tranversale par rapport à l'axe horizontal passant par son milieu est $\frac{a \cdot b^3}{12}$; d'où l'on tire

$$f = \frac{P \times L^3}{E.\frac{a \cdot b^3}{12} \times 3} = \frac{4PL^3}{E \cdot ab^3}.$$

Le travail consommé par la flexion a pour valeur

$$\frac{4P^2L^3}{E \cdot ab^3}$$

Il ne faut pas oublier que dans cette formule, et dans les suivantes, toutes les dimensions de la pièce sont rapportées au mètre, et les charges ou résistances au kilogramme.

2° *Pièce à section carrée.*—Il suffira de faire $a = b$ (fig. 397) dans la formule précédente, et on trouve, pour f et pour le travail consommé,

$$\frac{4PL^3}{E.a^4}, \quad \text{et} \quad \frac{4P^2L^3}{E.a^4}.$$

3° *Pièce à section posée parallèlement à une diagonale.*—On a $I = \frac{a^4}{12}$ (figure 398), et les deux expressions de f et du travail consommé sont encore

$$\frac{4PL^3}{E \cdot a^4}, \quad \text{et} \quad \frac{4P^2L^3}{E \cdot a^4}.$$

4° *Pièce à section circulaire.*—On a, en désignant par r le rayon du cercle de la section transversale (fig. 399), $I = \frac{\pi r^4}{4}$; faisant cette substitution dans la formule générale $f = \frac{PL^3}{E \times I \times 3}$, on trouve

$$f = \frac{4}{3} \times \frac{PL^3}{E \cdot \pi r^4}.$$

Quant au travail consommé, il devient égal à

$$\frac{4}{3} \times \frac{P^2L^3}{E \cdot \pi r^4}.$$

Si le poids ou la charge P était réparti uniformément sur la même longueur L de la pièce, de manière que celle-ci fût chargée d'un poids $\frac{P}{L}$ par unité

de longueur, on trouve que, dans ce dernier cas, la flèche f n'est que les $\frac{3}{8}$ de celle qui a lieu quand toute la charge est appliquée à l'extrémité non encastrée.

77. *Résistance à la flexion d'une pièce encastrée par un bout.* — Lorsqu'une force P, perpendiculaire à la longueur d'un corps prismatique DFGE (fig. 400), encastré par son extrémité DF, tend à rompre ce corps, il est aisé de voir que la rupture tend à s'opérer dans la section même où la pièce est encastrée. Car l'énergie de la puissance P est proportionnelle au produit de cette force multipliée par la distance qui sépare son point d'application du plan de la section transversale où la rupture se fait ; et il est évident que la section qui correspond à l'encastrement est la plus éloignée de la force. Désignant par L la longueur totale de la pièce, $P \times L$ sera le moment de la puissance, lequel devra être égal au moment de la résistance des fibres sur la section de rupture, pris par rapport au point où la fibre invariable AB coupe cette section. En admettant que la pièce tend à tourner autour de la fibre invariable en ce dernier point, on trouve que le moment de la résistance à la rupture est proportionnel au moment d'inertie I de la section transversale divisé par la distance verticale V de la fibre la plus éloignée à la fibre invariable. Si, maintenant, nous nous rappelons qu'il ne s'agit ici que de déterminer les dimensions de la pièce de manière à ce que son élasticité ne soit pas altérée par l'effort P de flexion, et qu'on désigne par R le coefficient de résistance relatif à ce cas, la condition d'équilibre revient à cette égalité

$$P \times L = \frac{R \times I}{V}, \quad \text{ou} \quad P = \frac{R \times I}{L \times V}.$$

Considérons encore les quatre espèces de pièces que nous avons considérées (fig. 396-399).

PREMIER CAS. — *Section rectangulaire.* — La plus grande distance verticale d'une fibre à la fibre invariable V est évidemment $\frac{b}{2}$, ou la moitié de la hauteur du rectangle $I = \frac{ab^3}{12}$. D'où

$$P = R \cdot \frac{\frac{ab^3}{12}}{L \times \frac{b}{2}} = R \cdot \frac{ab^2}{6L}.$$

Ainsi, la résistance croît proportionnellement à sa largeur et au carré de son épaisseur.

DEUXIÈME CAS. — *Section carrée.* — On fera $a = b$ dans la formule précédente, ce qui donne

$$P = \frac{R \cdot a^3}{6L}.$$

TROISIÈME CAS. — *Section carrée dont une diagonale est horizontale.*

On a $V=\frac{1}{2}\sqrt{2a^2}=\frac{a}{\sqrt{2}}$, $I=\frac{a^4}{12}$; d'où

$$P=\frac{\frac{R.a^4}{12}}{L.\frac{a}{\sqrt{2}}}=\frac{R.a^3}{L.12}.\sqrt{2}=\frac{R.a^3}{L.6\sqrt{2}};$$

expression plus petite que celle du carré, et qui nous apprend que la résistance d'une pièce carrée posée parallèlement à l'une de ses diagonales est moindre que celle d'une pièce carrée posée sur l'un de ses côtés, dans le rapport de $\frac{1}{\sqrt{2}}$ à 1.

QUATRIÈME CAS. — *Section circulaire.* — On a $V=r$, $I=\frac{\pi r^4}{4}$;

d'où
$$P=R\times\frac{\pi r^3}{4L}.$$

D'après cela, on voit qu'il est avantageux d'augmenter la hauteur d'une pièce par rapport à sa largeur, puisque la résistance augmente comme le carré de la première. Si cependant cette pièce était rendue trop mince, elle pourrait se déverser dans le sens horizontal. Ordinairement le rapport de la hauteur et de la largeur d'une section transversale est comme 7 est à 5 (fig. 401); le débitage des pièces se fait avec économie en suivant ces dimensions. Si la largeur est rendue plus mince, on garnit la pièce d'épaulements, de nervures ou côtes (fig. 402). Les épaulements ajoutés vers son milieu ajoutent, il est vrai, peu de résistance à la pièce, mais ceux qui occupent les extrémités de la base transversale augmentent beaucoup les résistances à la rupture. Nous verrons plus loin, au n° 83, comment il est possible de tenir compte de cette addition des épaulements dans l'évaluation de la résistance à la flexion.

Exemple. Trouver l'équarrissage d'une pièce carrée en bois de chêne de deux mètres de longueur encastrée par un bout et qui doit supporter à l'autre extrémité un poids P de 1000 kilog. On a

$$P=\frac{R.a^3}{6L};\quad \text{d'où}\quad a^3=\frac{6LP}{R};\quad L=2^m,\quad P=1000^k,$$

et R (tableau du n° 72) = 850.100 ou 850000. D'où

$$a^3=\frac{2.6.1000}{850000}=\frac{12}{850}=0{,}014,$$

et, par suite,

$$a=\sqrt[3]{0{,}014}=0^m{,}25 \text{ environ.}$$

Ainsi, pour qu'une pièce de bois de 2^m, encastrée horizontalement, supporte,

sans perdre son élasticité, une charge de 1000^k. à l'autre extrémité, il convient de lui donner un équarrissage de 25 centimètres de côté.

78. *Solide d'égale résistance.* — On a vu que quand une pièce prismatique est encastrée par une extrémité et qu'elle est fléchie perpendiculairement par une force appliquée à l'autre, le point dans lequel elle est plus exposée à se rompre, est évidemment celui de l'encastrement. Si la résistance est suffisante en ce point, la pièce sera partout ailleurs plus forte qu'il n'est nécessaire. Cherchons la figure de la pièce de manière à ce que sa résistance soit partout suffisante et jamais excédante, en supposant d'ailleurs que toutes ses sections transversales soient rectangulaires. Une pièce ainsi déterminée est ce qu'on nomme *solide d'égale résistance.* Il suffira évidemment que la relation $P = R.\frac{ab^2}{6L}$ soit satisfaite pour toutes les sections. Dans cette formule a représente la largeur horizontale constante de la section transversale de la pièce AB = L (fig. 403) ; b est la hauteur LI de la section d'encastrement; et on aura la valeur de LI au moyen de l'équation

$$b^2 = \frac{6LP}{aR}, \quad \text{ou} \quad b = \sqrt{\frac{6LP}{aR}}.$$

Si nous voulons avoir maintenant la hauteur y de la section MM′, située à une distance OA $= x$ du point A d'application de la force P, on remplacera b et L par y et x dans l'équation précédente; ce qui donne

$$y^2 = \frac{6P}{aR}.x.$$

Donc, la courbe LMAM′I est telle que ses ordonnées MM′, ou y, croissent proportionnellement à ses abscisses OA, ou x, comptées du point A : cette propriété appartient à une parabole qui a pour sommet le point d'application de la force fléchissante. Voici, au reste, un procédé pratique pour tracer cette courbe quand la longueur AB (fig. 404) de la pièce est donnée, et quand on a calculé sa hauteur LI de la section d'encastrement d'après la formule précédente. Partagez l'axe BA et la demi-corde BI en un même nombre de parties; en quatre parties, par exemple. Joignez l'extrémité L de la demi-corde non divisée à chacun des points de division de l'axe BA par des droites; leurs intersections avec les parallèles à l'axe menées par les divisions de même numéro de la demi-corde BI, seront des points de la courbe AI. L'autre partie AL est symétrique par rapport à la première. C'est de cette manière qu'on détermine la forme d'un balancier dans les machines à vapeur. La résistance qu'il oppose au mouvement a lieu vers ses points de rotation; ceux ci peuvent être regardés comme des points fixes sur lesquels la section milieu du balancier est encastrée, et l'extrémité de la moitié de sa longueur comme sollicitée par une pression égale à la tension de la vapeur. On a coutume de garnir la ligne milieu longitudinale, et

les rebords du balancier, de nervures qui, comme nous l'avons dit, ajoutent à sa résistance.

79. *Déformation d'une pièce encastrée soumise à une force de torsion appliquée sur son autre extrémité.*— Imaginons un cylindre encastré par son extrémité D (fig. 405), et soumis par l'autre extrémité libre à une force P, qui tend à le tordre autour de l'axe DC avec le bras de levier CB. Cette déformation sera telle que, pour chaque fibre longitudinale ou parallèle à l'axe DC, l'extrémité située dans la base encastrée AA se maintiendra constamment à la même position, tandis que l'extrémité *b* du côté libre se déplacera le plus possible de manière à décrire l'arc *bb'*. On suppose en outre que toutes les extrémités analogues à cette dernière, décrivent dans le plan de la section passant par la force P, des angles égaux autour du centre C. Cela posé, en admettant que la résistance à la torsion de chaque fibre longitudinale est proportionnelle à l'arc que son extrémité libre décrit, ainsi qu'à sa grosseur, et réciproque à sa longueur ou à celle du cylindre, on trouve le résultat suivant. Nommons θ l'arc décrit à l'unité de distance dans le plan de la section extrême du côté de la force P, L la longueur du cylindre, K la longueur du bras de levier CB, I' le moment d'inertie de la section transversale du cylindre par rapport à l'axe central DC perpendiculaire à cette section, *t* le coefficient de torsion, on a

$$\theta = \frac{L.P.K}{t \times I'}.$$

Quant au travail absorbé par la torsion ou par la déformation de la pièce, il est égal à $\frac{L . P^2 . K^2}{t \times I'}$. Si le cylindre a pour base un carré, on a $I' = \frac{a^4}{6}$. L'arc de torsion θ décrit à l'unité de distance est égal à $\frac{6LPK}{ta^4}$; et le travail consommé a pour valeur $\frac{6LP^2K^2}{ta^4}$. Lorsque le cylindre est circulaire, le moment d'inertie I' devient $\frac{\pi r^4}{2}$, et les deux expressions précédentes

$$\frac{2LPK}{\pi t r^4}, \quad \text{et} \quad \frac{2LP^2K^2}{\pi t r^4}.$$

80. *Résistance à la torsion.* — Désignant par T le coefficient de résistance à la torsion par r_1 la distance de la fibre la plus éloignée à l'axe du cylindre, par P l'effort limite dont le bras de levier est toujours K, et au delà duquel l'élasticité serait altérée par suite de cette torsion, on a $P = \frac{T}{r_1} \times \frac{I'}{K}$. S'il s'agit d'un carré, la distance r_1 à l'axe du prisme, de la fibre la plus éloignée, est évidemment la moitié d'une diagonale; et si *a* est le côté de ce carré, cette distance équivaut à $\frac{1}{2}\sqrt{2a^2}$, ou à $\frac{a}{\sqrt{2}}$. On fera dans la for-

mule précédente $r_1 = \frac{a}{\sqrt{2}}$, $I' = \frac{a^4}{6}$; ce qui donne, pour la résistance de cette pièce à la torsion,

$$P = \frac{T\sqrt{2} \times a^4}{6aK} = \frac{Ta^3\sqrt{2}}{6K} = 0,2357 . \frac{a^3T}{K}.$$

Dans cette expression, K représente la longueur du levier avec lequel la torsion de la barre s'effectue. Si le cylindre encastré est circulaire et de rayon r, on a $r_1 = r$, $I' = \frac{\pi r^4}{2}$; d'où. . . . . $P = \frac{T}{r_1} \times \frac{I'}{K}$ $= \frac{T . \pi r^3}{2K}$. Avec ces formules, et en prenant dans le tableau du n° 72 le coefficient de résistance à la torsion suivant la nature de la substance, il est possible de trouver quelle force de torsion une pièce prismatique de dimensions données peut supporter sans s'altérer, ou réciproquement quelles seraient les dimensions de cette pièce pour supporter sans altération une force de torsion déterminée.

81. *Résistance des pièces chargées debout ou verticalement.* — Ce qu'on a dit (3e partie, 74) relativement à la résistance des pièces debout, ou verticalement posées, ne s'applique pas à toutes les hauteurs d'une pièce ; il convient d'examiner cette circonstance qui se présente fréquemment dans la pratique. Nous distinguerons le cas où une pièce a une hauteur très-petite de celui ou la hauteur est plus grande. Dans le premier cas la pièce résiste seulement à l'écrasement, et ses dimensions se calculent au moyen du tableau suivant, qui donne la charge qu'elle doit supporter par millimètre carré de section transversale.

TABLEAU de la résistance des pièces à l'écrasement.

HAUTEURS.	SUBSTANCES.	CHARGE MAXIMUM par MILLIMÈTRE CARRÉ de surface.
		k
1 à 2 fois l'épaisseur. .	Chêne ou sapin. . . .	0,30
	Fer forgé.	10,00
	Fonte.	20,00
4 fois *id.* . . .	Fonte.	13,00
8 fois *id.* . . .	Fonte.	10,00
12 fois *id.* . . .	Bois.	0,25
	Fer forgé.	6,25
24 fois *id.* . . .	Bois.	0,15
	Fer forgé.	5,00
36 fois *id.* . . .	Fonte.	1,33

Les cas intermédiaires ne sont pas donnés par l'expérience directe.

Quand la longueur L de la pièce surpassera vingt fois l'épaisseur ou petit côté de la section, on emploiera la formule suivante pour calculer la charge Q *maximum* à faire supporter :

1° Pour une pièce rectangulaire, $Q = 0,823 \cdot \frac{ab^3}{L^2} \cdot E'$;

2° Pour une pièce à base circulaire, $Q = 7,757 \cdot \frac{r^4}{L^2} \cdot E'$:

Dans lesquelles, pour le bois, $E' = \frac{E}{10} = 100.000.000^k$;

» pour le fer forgé, $E' = \frac{E}{4} = 5.000.000.000$;

» pour la fonte, $E' = \frac{E}{5} = 2.000.000.000$.

82. *Influence des appuis sur la résistance des matériaux.* — Le calcul précédent est seulement relatif au cas où la pièce n'est pas solidement encastrée à ses extrémités, et où ces dernières peuvent sortir de la direction primitive de l'axe; c'est ce qui arrive aux bielles des manivelles. Mais si l'un des bouts est fortement encastré, et que l'autre soit libre, la pièce pourra supporter une charge double de celle qui est donnée par les formules. Enfin, la charge deviendra quadruple si les extrémités supérieure et inférieure sont maintenues par des guides dans l'axe primitif de la pièce, ou bien encore si, les extrémités étant libres, elle est retenue à son milieu. En général, on peut dire que la mesure de la résistance d'une pièce est proportionnelle au nombre des sections de rupture ou d'inflexion qui peuvent se produire par suite de la disposition des appuis. Si, par exemple, les extrémités A et B (fig. 406) de la pièce sont libres, le refoulement opéré sur elle la fait courber à son milieu O, et c'est autour de cette section seule que la rupture tend à s'opérer; ce cas est celui des formules générales.

Lorsque, pour un refoulement analogue, l'extrémité B (fig. 407) est encastrée à une certaine profondeur BC, la partie de la pièce qui est saillante au dehors de l'encastrement tend à se courber à son milieu O, et il se forme une inflexion à la naissance C de l'encastrement : il y a donc deux sections de rupture en O et en C; voilà pourquoi la charge est double de celle que donne le calcul précédent.

Si l'encastrement a lieu aux deux bouts A et B (fig. 408), il y a trois sections de rupture D, O et C; la charge de la pièce est encore augmentée.

Il en est de même quand elle est retenue par son milieu O (fig. 409); la pièce AB se compose de deux moitiés AO et OB, qui tendent chacune à se courber à leurs milieux D et C. Il n'y a donc de sections de rupture qu'en ces deux derniers points; mais comme les flèches sont aussi moitié moindres, et qu'elles mesurent le moment de la charge dont elles sont le bras de

levier, on reconnaît de suite que la charge est quadruple de celle qui a lieu quand les extrémités de la pièce sont libres.

Des considérations analogues sont appliquables aux pièces de bois horizontales reposant sur des appuis. Si, par exemple, une telle pièce, chargée à son milieu par un poids 2P, repose sur deux couteaux où les extrémités A et B (fig. 410) ont la faculté de glisser, elle est évidemment dans le même état que si, le point milieu O étant fixe, chaque extrémité était sollicitée par une force P. Ainsi, la charge d'une pareille pièce sur son milieu est double de celle qu'une pièce de même longueur, mais encastrée par un bout, peut recevoir à son extrémité libre. Si, au contraire, la pièce horizontale AB (fig. 411) est fortement encastrée par ses extrémités dans deux murs qui ne peuvent céder, je dis qu'elle supportera à son milieu une charge quadruple de celle d'une pièce de même longueur encastrée par un bout et fléchie à son autre extrémité. En effet, à l'égard de la pièce horizontale AB doublement encastrée, non-seulement la puissance appliquée en O a un bras de levier moitié moindre, mais encore il y a deux sections de rupture en C et D; et, par conséquent, deux moments de résistance, égaux l'un et l'autre à celui de la résistance qu'oppose la pièce encastrée par un seul bout.

83. *Influence des évidements ou des renforts ou côtes ajoutées aux pièces.* — Nous avons promis (3e partie, 77) de faire voir l'influence des épaulements, côtes ou épaisseurs ajoutées à la section transversale d'une pièce prismatique. En désignant toujours par L la longueur d'une pièce encastrée par un bout, et par P la puissance appliquée au bout libre, qui tend à la faire fléchir, $P \times L$ sera toujours le moment de cette puissance. Mais on a vu au même paragraphe à quoi était égal le moment de la résistance des fibres selon la nature de la section transversale supposée pleine. Ce moment est, pour le rectangle, $R \cdot \frac{ab^2}{6}$, et pour le cercle, $R \cdot \frac{\pi r^3}{4}$. Si, maintenant, la section transversale est évidée, comme le représentent les deux figures (412 et 413), on cherchera le moment de la résistance comme si toute la section était pleine, on en retranchera le moment de la résistance du vide, et la différence devra être égalée au moment de la charge, ou à $P \times L$.

S'il s'agit du profil d'un balancier de machine à vapeur (fig. 414), on calculera le moment de la résistance du rectangle ABDC, ainsi que ceux de la résistance des rectangles vides *abdc* et *efhg*. Retranchant ces derniers du moment du rectangle total ABDC, la différence devra être égale au moment de la charge.

On agira d'une manière analogue pour la disposition de la figure 415, et la disposition composée de deux pièces liées entre elles et maintenues à un certain intervalle (fig. 416).

Enfin, quand les pièces sont d'inégales épaisseurs, ou que, boulonnées par leurs extrémités (fig. 417), elles sont écartées par un tasseau situé à leur

milieu et dont on peut dans le calcul faire abstraction, on verra où se fera la rupture, c'est-à-dire le point où la courbure est la plus grande; et on choisira pour section celle où la résistance est la moindre. Deux pièces liées par leurs deux bouts, de manière que ceux-ci ne puissent glisser, et écartées par un tasseau, sont ici plus fortes que si elles étaient appliquées à plat l'une contre l'autre. Car le moment de la résistance du milieu est égal au moment de la résistance du rectangle total *abcd* (fig. 418) moins celui de la résistance du rectangle vide *efhg*, et le premier croît comme le carré de la hauteur totale *ab*. En comparant les moments de résistance des pièces creuses à ceux des pièces pleines, on reconnaît qu'à égalité de matière les premières l'emportent sur les autres. La nature nous offre l'exemple des tuyaux de plume, des roseaux, qui, quoique très-légers, sont susceptibles d'une certaine résistance.

XI.

CONSTRUCTION ET SOLIDITÉ DES PIÈCES DE MACHINES.

84. *Tourillons et coussinets.* — Les tourillons sur lesquels une roue doit tourner sont adaptés tantôt à des arbres en fer, et tantôt à des arbres en bois. Dans le premier cas ils font corps et sont coulés avec l'arbre, parce qu'en général un arbre en fer de grandes dimensions coûterait trop cher s'il était forgé. Mais lorsque l'arbre est en bois, les tourillons en fer, qui sont toujours préférables aux tourillons en bois, sont réunis à ces arbres de plusieurs manières.

1° *Tourillon à équerre ou à talon.* — Le plus simple des dispositifs, ordinairement mis en usage dans les moulins, consiste à pratiquer dans l'arbre, depuis la circonférence jusqu'au-dessous du centre, une entaille capable de recevoir la partie carrée qui forme le prolongement du tourillon (fig. 419). Cette même partie carrée est de plus coudée en équerre à son extrémité, pour se loger dans une mortaise creusée au fond de l'entaille, puis on frette l'arbre dans la partie qui avoisine le tourillon.

2° *Tourillon à quatre bras.* — Une autre disposition consiste à armer le tourillon de quatre bras qui se réunissent autour d'un petit épaulement et qui sont coulés d'une même pièce avec le tourillon. Les bras sont serrés contre l'arbre par des boulons dont l'écrou est noyé dans l'épaisseur de la pièce (fig. 420). La tête de chaque boulon du côté des bras est carrée pour qu'on puisse le tourner avec une clef dans son écrou ; chaque boulon est introduit par une mortaise pratiquée dans l'arbre à la distance convenable. On bouche ensuite cette mortaise et on frette.

3° *Tourillon à ailes.* — Quelquefois les tourillons portent deux ou quatre

ailes en fonte, minces de deux pouces, qui s'enfoncent jusqu'à quinze ou vingt pouces dans deux ou quatre entailles pratiquées à l'extrémité de l'arbre (fig. 421). Lorsque les ailes sont logées dans leurs entailles respectives, on serre l'arbre avec des frettes.

4° *Tourillon à ailes réunies par un anneau.* — Le meilleur dispositif consiste à réunir les ailes par un anneau très-épais, d'un diamètre plus considérable que celui de l'arbre, et à chasser des cales entre l'arbre et l'anneau (fig. 422).

Il faut établir les tourillons bien concentriquement avec l'axe de l'arbre, et, s'il se peut, les tourner mis en place.

Les tourillons roulent sur des crapaudines ou coussinets qu'on a le soin d'évider en demi-cercle pour que chaque tourillon puisse s'y mouvoir. Ces coussinets sont ordinairement en bronze, ou mélange de 84 parties de cuivre et de 16 d'étain, qui forme une composition fort dure. Les demi-coussinets dont il est d'abord question, s'emploient quand le tourillon ne tend pas à sortir (fig. 423); autrement on les compose de deux demi-cercles qui sont opposés par un même diamètre. Si les sauts ne sont que momentanés, on se contente d'une simple bride au-dessus d'un demi-coussinet. Un coussinet de cette dernière espèce est encastré au moyen de cales sur une pièce de bois qu'on nomme *plumard*.

Les coussinets doubles reposent entre deux montants de fonte, coulés sur une semelle fixée au plumard par deux boulons; les montants sont garnis chacun extérieurement d'un épaulement destiné à recevoir dans le moment de la coulée un boulon à vis (fig. 424). C'est dans ces derniers boulons que pénètre une bride supérieure qui appuie sur le double coussinet par un talon placé au milieu de cette bride, et qui est serrée par deux écrous adaptés aux boulons des épaulements accolés à chaque montant. Enfin, pour què les coussinets ne glissent point dans les montants parallèlement à l'axe du tourillon, on garnit chaque montant d'une oreille qui est engagée dans une rainure verticale pratiquée à la surface latérale des coussinets.

Quand la vitesse des tourillons n'est pas très-grande, on peut les faire en bois de gaïac ou de cormier, ou de sorbier desséché et bouilli dans l'huile de lin. La meilleure graisse est le suif.

Enfin, lorsque les supports de coussinets doivent être très-hauts, on évide la semelle en forme de voûte.

85. *Dimensions des tourillons.* — Tredgold donne aux tourillons une longueur égale aux 0,85 du diamètre. Cette longueur, qui n'influe nullement sur la résistance du frottement, car ce dernier est indépendant de la grandeur de la surface; cette longueur, dis-je, n'est point indifférente pour la résistance du tourillon à la rupture. Pour calculer son diamètre, il faut supposer que le tourillon ne pose que par un point sur l'extérieur du coussinet, et que la pression qu'il y éprouve tend à le rompre autour de son collet

près de l'arbre. Le tourillon est alors dans la circonstance d'une pièce encastrée par un bout et sollicitée par une force agissant à l'autre extrémité et égale à la pression du tourillon contre la crapaudine. On sait (2e partie, 131), que pour avoir cette pression, il faut chercher la résultante de la puissance et des résistances de l'arbre transportées parallèlement à elles-mêmes, et la décomposer en deux autres forces parallèles sur chaque tourillon. Nous pouvons d'ailleurs ici faire abstraction de la puissance, qui généralement est tagentielle à la roue, et ne considérer que le poids de la roue et de toutes les pièces énarbrées décomposé sur chaque tourillon. Nommons donc N cette pression ainsi évaluée, l la longueur du tourillon; $N \times l$ sera le moment de la puissance qui tend à faire fléchir le plus possible ou même à rompre le tourillon autour de son collet. Si r est le rayon de ce tourillon, le moment des résistances (3e partie, 77) a pour expression $R . \frac{\pi r^3}{4}$. R est le coefficient de la résistance à la flexion pour le fer, donné par le tableau du n° 72. On se contentera de faire $R = 8.000.000$ pour la fonte, et égal à 14.000.000 pour le fer forgé. On aura, par conséquent . . . . . $Nl = R . \pi . \frac{r^3}{4}$. Mais, d'après la loi de Tredgold, la longueur l du tourillon est égale à $0,85 . 2r = 1,70 . r$;

d'où $$1,70 . r . N = R . \frac{\pi r^3}{4},$$

et, par suite, $$r = \sqrt{\frac{4N \times 1,70}{\pi . R}} = \sqrt{\frac{6,80 . N}{\pi . R}}.$$

Le tourillon est encore soumis à d'autres causes de rupture, à la torsion, par exemple. D'une part, il est entraîné par l'arbre en vertu de la puissance tangentielle à la roue, et de l'autre il est retenu contre la crapaudine par le frottement. Soit donc F une composante de la puissance, décomposée en deux autres situées dans le plan perpendiculaire à l'axe passant par le collet de chaque tourillon, K la grandeur du rayon de la roue; on aura, en vertu du n° 80,

$$F \times K = T . \frac{\pi r^3}{2},$$

et, par suite, $$r = \sqrt[3]{\frac{2FK}{\pi T}}.$$

On pourra, afin de rendre les calculs plus simples, faire $T = 8.000.000$ pour la fonte et T 20.000.000 pour le fer forgé. Ces nombres sont plus ronds que ceux qui sont portés au tableau du n° 72. Ce calcul étant fait ainsi que le précédent, on choisira le plus grand des deux rayons obtenus. On ajoutera à ce rayon, encore trop faible, une plus-value relative à l'usure, que Tredgold estime au sixième du rayon du tourillon, mais qui nous paraît plutôt devoir être proportionnelle au travail du frottement, et que nous estimons égale à $\frac{Nv}{3000}$ pour un tourillon qui marche toujours. Dans cette

dernière formule, v est la vitesse effective à la circonférence du tourillon, et N la pression qu'il supporte.

La règle de Tredgold pour évaluer le diamètre d'un tourillon consiste dans cette formule, $N = 60\ d^2$, dans laquelle N représente la pression du tourillon en kilogrammes et d le diamètre de ce tourillon évalué en centimètres. Ainsi, pour $N = 6000$ kilog., on trouve $d = 10$ centimètres. Cette charge est celle de l'arbre des martinets de l'usine des Pucelles à Metz, dont le tourillon est de 11 centimètres. Il est vrai qu'en ajoutant à 10 le sixième en sus, comme le veut Tredgold, pour tenir compte de l'usure, on aurait avec sa formule un peu plus de 11 centimètres.

86. *Arbres en bois ou en fonte. Calcul de leurs dimensions.* — Les arbres en bois sont tantôt d'une seule pièce, et tantôt composés de plusieurs parties. Dans le premier cas la pièce est taillée à 6 ou 8 pans dans le sens de son profil (fig. 425), ou même elle est circulaire. Pour lui donner cette dernière forme, des hommes la font tourner sur place autour de son axe par une manivelle armée de béquilles, et un ouvrier enlève avec une gouge toutes les parties de bois excédantes. Si l'arbre se compose de plusieurs pièces, on donne à celles-ci la forme de voussoirs, de façon que leur réunion forme un arbre creux qui se maintient tel, non-seulement par leur arc-boutement, mais encore par la pression extérieure d'une frette dont on les enveloppe les uns et les autres. Au lieu de remplir le vide intérieur, il vaut mieux le laisser, et faire porter le tourillon par un manchon à bras en fonte. Les frettes peuvent d'ailleurs se composer de deux parties armées de pattes qu'on rapproche à volonté au moyen d'écrous et de boulons (fig. 426).

Lorsqu'un arbre est en fer forgé ou en fonte, sa grosseur est au moins égale à celle du tourillon. En général, il n'y a que les petits arbres qu'on construise en fer forgé. Si les arbres en fonte ont une grande portée, on les renfle vers leur milieu.

Les dimensions d'un arbre se calculeront par les règles précédentes dans l'hypothèse de la flexion et de la torsion.

1° *Flexion.* — Les forces qui agissent sur les arbres des machines se réduisent presque toujours aux poids des arbres et des pièces montées dessus; le tourillon ayant la solidité suffisante, on n'aura qu'à supposer que la flexion se produit vers le milieu de l'intervalle des tourillons. A cet effet on décomposera chacun des poids des pièces montées sur l'arbre en deux forces appliquées l'une au tourillon le plus voisin, et l'autre au milieu de l'arbre; les premières composantes seront détruites par la résistance des tourillons. Toutes les autres, appliquées au milieu de l'arbre, seront ajoutées au poids total de cet arbre et formeront une somme que je nomme 2P, laquelle est censée agir sur le milieu d'une pièce appuyée librement à ses deux extrémités. D'après ce qui a été dit au n° 82, l'arbre aura les mêmes dimensions que s'il était encastré par un bout et sollicité à l'autre par une force P, moitié de celle qui agit à son milieu. On aura, en vertu du n° 77, $P \times L = R$.

$\frac{\pi r^3}{4}$; d'où

$$r=\sqrt[3]{\frac{4PL}{\pi R}}.$$

L est la longueur de l'arbre. R ou le coefficient de résistance à la rupture est donné par le tableau du n° 72. On pourrait, pour abréger, faire R = 700.000 pour le chêne, égal à 8.000.000 pour la fonte, et égal à 14.000.000 pour le fer forgé. J'observe en outre que le rayon r sera celui de la section milieu de l'arbre. Si l'arbre est creux, on défalquera le moment de la résistance du creux pour avoir $P \times L$, ainsi qu'il a été dit (3e partie, 83), et en nommant r' le rayon du creux, on aura

$$P \times L = R \cdot \frac{\pi r^3}{4} - R \cdot \frac{\pi r'^3}{4}.$$

Lorsque r' est connu d'avance, cette formule donnera r. Il en sera de même si le rapport de r' à r est donné, ou si, par exemple, $r' = \frac{3}{4} r$. La méthode que nous venons de donner, quoique approchée, est cependant bien suffisante pour la pratique.

2° *Torsion.* — La résistance à la torsion est indépendante de la charge; mais elle dépend des efforts tangentiels aux roues montées sur l'arbre. Si l'une d'elles est poussée dans un sens par la puissance, l'autre est poussée en sens contraire en vertu de la résistance. L'arbre tend à se tordre entre les deux roues, comme si l'une était fixe. Rien n'est plus facile que de trouver l'effort tangentiel F à chaque roue d'après le travail qui leur est communiqué (3e partie, 70). Nommant K le rayon de l'une de celles pour laquelle l'effort est F, et considérant l'autre roue comme fixe, r le rayon de l'arbre, on aura cette relation des dimensions de l'arbre, pour qu'il ait une résistance suffisante à la torsion (3e partie, 80),

$$F \times K = T \cdot \frac{\pi r^3}{2};$$

d'où

$$r=\sqrt[3]{\frac{2F \times K}{T \cdot \pi}}.$$

Les côtes ou nervures ajoutées à un arbre ne contribuent point à augmenter sa résistance à la torsion.

Si l'arbre était mû par une manivelle, le calcul s'effectuerait de la même manière. F serait l'effort exercé sur le bout de la manivelle et K la longueur de son bras. Cet effort se déterminera d'ailleurs d'après ce qu'on a dit touchant le travail des manivelles. On fera la manivelle plus forte près de l'arbre qu'à l'extrémité, suivant la forme de la parabolle d'égale résistance (3e partie, 77), et on calculera les dimensions de sa plus grande section près de l'arbre, de la même manière que pour le balancier d'une machine à vapeur, et d'après l'intensité de l'effort F qui a lieu sur le bouton. Il est inutile de répéter que des deux rayons obtenus pour la section d'un arbre soit par

la considération de la flexion, soit par celle de la torsion, on devra choisir le plus grand.

87. *Roues.* — Les roues en bois, à petites dimensions ou de deux mètres de diamètre, ont trois à quatre bras ; elles en ont cinq à six (fig. 427), ou même huit, quand elles sont grandes. Ces bras s'assemblent à mi-bois ou à tiers-bois dans l'arbre, et sont destinés à porter les jantes de la roue. La construction de ces roues est trop variée pour que nous entrions dans plus de détails.

Les roues dentées en fonte se coulent d'une seule pièce avec leurs bras quand elles sont petites ou d'un diamètre inférieur à trois mètres. On fait les *rais* ou bras plus larges au moyeu que vers la couronne de la roue, suivant ce qu'indique la parabole de moindre résistance. Ils sont plus minces que la jante n'est large, et on les renforce latéralement par des côtes ou nervures suivant la forme *abdc* (fig. 428), pour s'opposer à la flexion latérale. Voici une table, donnée par Tredgold, des proportions des rais, selon la nature des efforts exercés à la circonférence des roues, en supposant à ces dernières un mètre de rayon, et six rais.

TABLEAU des proportions des rais, d'après les efforts exercés à la circonférence des roues de 1^m de rayon, à 6 rais.

EFFORTS TANGENTIELS à la roue en kilogrammes.	LARGEUR DES RAIS en centimètres.	ÉPAISSEUR DE LA NERVURE en centimètres.
k.	c.m.	c.m.
10	4,20	1,21
40	6,00	2,00
80	8,00	3,00
158	8,50	3,90
244	9,70	4,85
336	10,67	6,30
430	11,64	6,80
580	12,12	8,25
730	13,10	8,73
870	13,80	9,70
1100	14,50	10,67
1210	15,50	11,64
1500	16,00	12,60
1750	16,50	13,68
2200	17,00	14,06
2300	17,50	16,50
2660	18,00	17,00
2840	18,50	17,95
3220	19,00	19,00
3500	19,50	19,40

La première colonne de ce tableau contient les efforts tangentiels à une roue; la deuxième, la largeur la plus grande du milieu du rayon dans le sens du mouvement; la troisième, l'épaisseur ou la saillie de la nervure qui fortifie le rayon. Pour avoir ces mêmes dimensions pour une roue d'un tout autre rayon qu'un mètre, on les multipliera par $\sqrt{r}$, r étant le rayon donné. On pourrait encore ici calculer la largeur des rais par les formules précédentes, en supposant que la rupture se fasse à la base des rais, et que son extrémité du côté de la jante soit sollicitée par l'effort de la couronne. A la rigueur, comme les rais sont au nombre de six, on ne devrait prendre que le sixième de cet effort.

Tredgold suppose qu'on donne aux rais une épaisseur perpendiculaire au plan de la roue, et égale au tiers de l'épaisseur de la jante mesurée perpendiculairement à l'axe; mais il n'indique pas cette dernière dimension. On fait volontiers l'épaisseur de la jante égale à cinq centimètres pour les grandes roues de quatre à six mètres, et à deux ou trois centimètres pour les petites roues d'un mètre. Dans tous les cas elle ne sera jamais moindre que l'épaisseur des dents, afin qu'elle soit en rapport avec la puissance qui sollicite la roue.

L'épaisseur de la jante des roues en fonte doit aussi être déterminée par la considération du *retrait* de la fonte lors de la coulée, et être mise en rapport avec les dimensions des bras, lorsque ceux-ci doivent être coulés avec la jante. Il nous semble que les rapports les plus convenables sont ceux qui permettent à la jante et aux bras de se retirer également pendant le refroidissement. Or, il est certain que la couronne et les bras tendent alors à diminuer à la fois dans la proportion de la longueur de ces derniers; de sorte que, si le refroidissement s'opérait suivant la même loi, tant pour les bras que pour la jante, à chaque instant, ou si le retrait était proportionnellement le même, il n'y aurait ni tension ni traction réciproque des jantes sur les rais; tout se retirerait ensemble. A cet effet on remarquera que la chaleur contenue à l'instant de la coulée est proportionnelle au volume de chaque partie, et le calorique qui s'échappe proportionnel à la surface extérieure de refroidissement. Si donc le rapport du volume à la surface est le même pour les rais et pour la jante, la pièce se retirera également dans toutes ses parties. Calculant, par conséquent, le volume et la surface de la jante, puis ceux des rais, on verra si les rapports respectifs du volume à la surface sont les mêmes. On aura soin dans cette recherche de tenir compte de la surface développée des nervures. Cette règle apprend que la largeur moyenne des rais doit être presque égale à la largeur de la jante estimée parallèlement à l'axe, lorsque les épaisseurs des rais sont les mêmes que celles de la couronne.

Quand la roue est grande, ou qu'elle a quatre mètres et au delà, on fait la jante d'une seule pièce, et on y assemble les bras au moyen de clefs et d'é-

triers boulonnés, ainsi qu'on le voit sur la figure 429. Les bras peuvent être en bois ou en fonte. Dans le premier cas, ils se réunissent sur un noyau ou manchon en fonte embrassant l'arbre. Ces bras entrent dans des espèces de *vides*, ou bottes saillantes *mm*, ouvertes du côté extérieur, et y sont maintenus soit par des brides en fer O (fig. 429), soit par un plateau en fonte P (fig. 430).

Lorsque les bras sont en fonte, ils font corps avec le manchon.

Souvent les roues fort larges sont soutenues par plusieurs jantes et par plusieurs systèmes de bras.

Enfin, si la roue tourne fort vite, et si la jante est épaisse et composée de plusieurs morceaux, comme les volants, la force centrifuge fait effort pour détacher la jante. Cette action est égale à $\frac{P}{g} \times \frac{V^2}{r}$; et, dans cette expression, P représente le poids de la jante, V sa vitesse, et r son rayon. Ces morceaux de jante sont réunis entre eux par des liens de fer encastrés et boulonnés, et attachés avec les bras au moyen d'étriers boulonnés.

XII.

ÉQUILIBRE DES FLUIDES.

88. *Surfaces de niveau.* — Après nous être occupés de la mécanique des solides, nous allons passer à celle des fluides. Sans entrer dans le détail des définitions sur les fluides, qui ont été établies dans les *Préliminaires* de notre Cours de la première année, ainsi que dans tous les ouvrages de physique, nous nous bornerons à dire qu'ils se distinguent en deux genres principaux, le genre *liquide* et le genre *gazeux;* que les liquides demeurent en repos sur le fond d'un vase ouvert à sa partie supérieure et que les fluides gazeux s'y étendraient indéfiniment par suite de la répulsion réciproque que le calorique exerce entre leurs molécules. Néanmoins tous les principes que nous allons déduire seront communs aux uns et aux autres. C'est une loi générale de tous les fluides pesants que quand ils sont en équilibre ou en repos, leur surface libre est de niveau ou perpendiculaire dans tous ses points à l'action de la gravité. Si, en effet, cette dernière force n'était pas perpendiculaire à la surface du fluide, on pourrait décomposer cette force pour chaque molécule en deux autres, l'une perpendiculaire à la surface et l'autre située dans le plan tangent à la surface près de la molécule; bien que la première soit détruite par la résistance de la surface, il n'en est pas de même de la seconde composante, car elle produirait le mouvement sur sa molécule d'autant plus facilement que toutes les autres molécules seraient entraînées par

des composantes analognes. On voit, d'après cela, que la surface d'un liqnide en repos on en équilibre doit avoir tous ses éléments perpendiculaires à la direction de la gravité. A la surface de la terre, la mer, les grands lacs sont terminés par des surfaces de niveau à peu près sphériques, dont le centre est celui de la terre; dans une petite étendne, le niveau des liquides (comme, par exemple, pour l'eau contenne dans un vase) est un plan horizontal.

89. *Principe de l'égalité de pression.* — Considérons un flnide pesant contenu dans un vase ABDC (fig. 431), et dont MN est la surface de niveau. Les diverses parties de ce flnide au repos ou en équilibre sont soumises à deux espèces de pressions dont l'une provient de la gravité, et l'autre d'une cause extérienre qui presse sur tous les points de la surface MN. En faisant d'abord abstraction de la gravité, examinons comment, dans l'état d'équilibre du fluide, la pression extérieure se transmet de molécule à molécule jusqu'aux parois du vase. Si cet équilibre subsiste, il est clair qu'il ne sera pas troublé par la supposition qu'une portion *m* quelconque de ce fluide se congèle ou se solidifie. Pour qne cette portion ne puisse prendre aucnn mouvement, il faut qu'elle soit pressée de toutes parts, de façon que la résultante des pressions qu'elle éprouve soit zéro. Parmi toutes les combinaisons qni sont susceptibles de satisfaire à cette condition de l'équilibre, la combinaison spéciale et caractéristique des fluides est celle en vertu de laquelle, toutes les pressions exercées sur les faces qui terminent un fluide sont égales entre elles si ces faces sont égales, ou proportionnelles à ces faces si celles-ci sont inégales.

Voici comment on reconnaît qu'en effet l'équilibre a lieu lorsque les pressions d'nn fluide sont également réparties ou transmises sur ses diverses faces, ou sur celles du vase qui le contient, qnelle que soit la forme de ce dernier. Soit ABC (fig. 432) un triangle plan fluide dont les côtés AB, BC et AC sont pressés également dans tous lenrs points, ou supportent des pressions résultantes proportionnelles à leurs longueurs, pressions qui sont évidemment appliquées à leurs milieux G, F et D, selon les perpendiculaires LO, FO et OH. Je dis qu'un tel triangle est en équilibre. Car d'abord ces trois perpendiculaires concourront en un même point, centre du cercle circonscrit ou triangle. Prenant sur chacnne d'elles les parties OL, OI et OH, proportionnelles aux pressions qu'elles représentent et par suite aux côtés AB, BC et AC, et construisant sur deux de ces pressions OI et OH le parallélogramme OIKH, sa diagonale OK sera égale à la résultante des pressions exercées sur les côtés BC et AC. Le triangle OIK, dont les deux côtés OI et IK sont à la fois perpendiculaires et proportiounels aux deux côtés BC et AC du triangle ABC, est évidemment semblable à ce dernier. Donc son troisième côté OK, c'est-à-dire la résultante des pressions des côtés en question, est aussi à la fois perpendiculaire et proportionnel à AB; c'est-à-dire, en un mot,

qu'elle est égale et directement opposée à la pression que supporte ce troisième côté. Or, il y a équilibre entre trois forces, toutes les fois que la résultante de deux d'entre elles est égale et directement contraire à la troisième force.

Si le fluide est contenu dans un polygone plan quelconque ABCED (fig. 433) dont les côtés sont également pressés dans tous leurs points, l'équilibre se vérifie de la même manière. Car la résultante des pressions sur AB et BC passera par le milieu du côté AC du triangle ABC et lui sera à la fois perpendiculaire et proportionnelle, de sorte que les pressions AB et BC seront remplacées par la pression proportionnelle exercée sur le côté AC. On ferait voir de même que la pression proportionnelle exercée sur le côté DC du triangle DAC pourra être substituée aux pressions sur DA et AC, ou remplacer les pressions proportionnelles qu'éprouvent les trois côtés AB, BC et AD du polygone. Il ne reste donc qu'à voir si l'équilibre a lieu sur le triangle DCE, dont les trois côtés DC. DE et EC sont également pressés sur tous leurs points. Or, il est évident que cet équilibre est justifié d'après la proposition précédente. Ainsi le fluide est en équilibre lorsqu'il est contenu dans un polygone plan dont les côtés sont pressés également dans tous leurs points.

Si le fluide est renfermé dans une pyramide triangulaire, pressée par des forces proportionnelles à ses quatre faces, ces forces perpendiculaires à ces faces iront encore concourir en un même point, et il serait facile de prouver que la résultante de trois d'entre elles serait à la fois perpendiculaire et proportionnelle à la quatrième face, ou qu'elle serait égale et directement contraire à la pression de la quatrième face. De la pyramide triangulaire on passe aux polyèdres, puisqu'ils peuvent se décomposer en pyramides triangulaires ayant une face commune, chacune à chacune. Enfin, on justifie l'équilibre d'un fluide sur une surface courbe quelconque dont tous les points sont également pressés, puisqu'une telle surface peut être regardée comme un polyèdre d'une infinité de faces. D'où nous conclurons que, quelle que soit la forme d'un vase dans lequel un fluide est contenu, ce dernier y sera toujours en équilibre, pourvu que les pressions transmises dans tous les points de ses parois soient égales; et comme un fluide jouit de la propriété exclusive de transmettre également la pression dans tons les sens, l'équilibre sera toujours possible, quelle que soit la forme du vase qui le renferme.

Cette proposition très-importante fait voir qu'un fluide supposé sans pesanteur, qu'on renfermerait dans un vase, ne saurait, en réagissant contre les parois, soit par lui-même, soit en vertu de la pression extérieure d'un piston, produire aucun mouvement sur le vase. Car les pressions qu'il exerce contre les parois du vase étant les mêmes dans tous les points du vase, il y a nécessairement équilibre, quelle que soit la figure de ce dernier. C'est ainsi que quand du vin de Champagne est contenu dans une bouteille, celle-

ci ne tend pas à glisser, et cependant le fluide réagit dans tous les sens.

90. *Définition de la pression, moyens de la multiplier.* — Le principe de l'égalité de pression nous permet de définir la pression exercée par un fluide sur nne surface donnée. Car si tous les poiats de cette dernière sont également pressés, la pression totale qu'elle supportera sera proportionnelle à la grandeur de son aire. Nommant p le nombre de kilogrammes de la pression par unité de surface ou pour un mètre carré, A l'aire en mètres carrés de la surface qu'on considère, on aura $p \times A$ pour la mesure de la pression qui agit sur la surface A. On pent donc multiplier à volonté une pression exercée sur un fluide, puisqu'il suffira d'agrandir la surface contre laquelle réagit ce fluide. C'est ainsi qu'en pratiquant à un vase une petite onverture ou un petit tuyau fermé par nn piston (fig. 434), une pression modérée sur ce dernier se distribue sur toutes les parois du vase, et devient énorme sur les snrfaces de ces dernières qnand elles sont considérables. Si, par exemple, la surface du piston étant des centimètres carrés, sa pression est de 5 kilogrammes, et que la surface intérieure des parois du vase soit de 10 000 centimètres carrés, les parois supporteront une pression totale de $5 \times 10\,000$ ou de 50 000 kilogr. Considérons encore un liquide dont nous faisons toujours abstraction du poids, contenu dans deux vases communiquant entre eux par un canal O (fig. 435) et pressé par un piston A que sollicite une force P. On demande la pression totale que transmettra ce liquide contre la face d'un piston B qui s'oppose à sa sortie. Si je nomme s la surface du piston moteur, p la pression qu'il reçoit pour une unité de surface, on aura évidemment $P = sp$. Or, cette pression unitaire p doit, à cause du principe d'égalité de pression, être transmise intégralement à tous les points du liquide, et par suite à tous les points de la surface du piston résistant B, surface que je désigne par s; en sorte que la pression totale qu'il recevra sera égale à sp. D'où on voit que les pressions totales des pistons A et B sont proportionnelles à lenrs surfaces respectives s et S, ou que celle du piston B sera dix fois, cent fois plus grande que celle du piston A, selon que S sera égale à $10s$, à $100s$. Mais ce n'est point une raison pour que le travail du piston résistant B augmente dans la même proportion ; il ne peut même être qu'au plus égal au travail du piston moteur A. En effet, si je désigne par H la hauteur dont ce dernier descend, le travail dépensé par ce piston est égal à $P \times H$ on à $sp \times H$. Soit h la hauteur de course dont monte le piston résistant pendant que l'autre est descendu de H, le travail de la résistance du piston B aura ponr expression $S \times p \times h$. Mais l'eau n'étant pas sensiblement compressible, ne saurait avoir changé de volume pendant la descente du piston A et pendant la montée simultanée du piston B, de sorte que la diminution apportée à ce volume par la course de A se trouve précisément égale à l'augmentation apportée par la course de B. On aura donc

$$s \times H = S \times h,$$

et, par suite,

$$s \times p \times H = S \times p \times h.$$

Donc, les deux travaux sont égaux, et s'il est possible de produire des pressions énormes, on ne saurait pour cela augmenter le travail.

En admettant, *à priori*, que les deux travaux sont égaux, ainsi que cela résulte du principe de la transmission de travail, on en conclut que les pressions totales des pistons sont proportionnelles à leurs surfaces respectives : car, en appelant P et Q les pressions totales, on a, pour hypothèse,

$$P \times H = Q \times h.$$

D'ailleurs, les hauteurs H et h sont en raison inverse des surfaces, à cause de l'incompressibilité du liquide ; il en est de même à l'égard des pressions : en combinant ces deux proportions on trouvera le principe précédent.

91. *Pression des fluides pesants.* — Jusqu'ici nous n'avons examiné que la transmission opérée de molécule à molécule pour un fluide, de la pression exercée à sa surface ; cette pression, qui se propage intégralement dans tous les sens, peut être désignée sous le terme générique de *pression hydrostatique*, pour la distinguer de celle qui provient uniquement des forces qui, comme la pesanteur, sollicitent toutes les molécules. Car cette dernière pression ne se comporte plus de la même manière ; elle est constante pour tous les points d'une même tranche horizontale, et varie d'une tranche à l'autre, en raison de la charge du fluide supposée au-dessus de chacune d'elles. En un mot, la pression due à la pesanteur ne se propage pas dans le fluide de bas en haut, au lieu que la pression hydrostatique se communique et reste constante dans tous les sens.

Soit donc un fluide pesant reposant dans un vase et dont la surface AB (fig. 436), supérieure et horizontale, est pressée par une certaine pression extérieure. Décomposons ce fluide en tranches horizontales, et considérons de l'une d'elles un cube *abdc*. Si le fluide était sans pesanteur, toutes les faces de ce cube seraient pressées également ; en sorte que les pressions sur les faces horizontales et sur les faces latérales seraient égales non seulement pour deux faces opposées, mais encore pour toutes. Mais le cube *abdc* est pesant aussi bien que le fluide entier ; ce poids altère nécessairement la pression qui provient de l'extérieur et qui s'exerce sur *ab*, c'est-à-dire que la pression exercée sur les cinq autres faces, ou sur la face inférieure *cd* et sur les faces latérales *ac* et *bd*, devient égale à la pression sur *ab* plus le poids du cube *abdc*. Si, d'ailleurs, on suppose une colonne entière ayant *fg* pour base et traversant dans le vase toute la hauteur du fluide, et qu'on décompose cette colonne en tranches horizontales, on verra sans peine que les faces latérales et la base inférieure de la première tranche sont pressées par la pression extérieure sur *fg*, plus le poids dû à la hauteur de cette première tranche ; que dans la deuxième tranche, la pression sur sa face inférieure et sur ses faces latérales équivaut à la pression extérieure sur *fg*, plus le poids des deux premières tranches, ou le poids dû à la hauteur du niveau AB au-

dessus de la base de cette seconde tranche ; en un mot, pour chaque tranche, la pression transmise sur sa base, et latéralement, est mesurée par la somme de la pression extérieure, et du poids de la hauteur de fluide superposé. Enfin, si on prolonge ces tranches jusqu'à ce qu'elles rencontrent les parois du vase, on verra de même que ces parois sont inégalement chargées, et que leur pression en chaque point par unité de surface se mesure de la même manière que celle qui a lieu constamment pour chaque tranche correspondante.

92. *Examen de la pression des fluides pesants dans des vases irréguliers.* — On pourrait croire que dans un vase dont les parois sont inclinées et plus rapprochées au sommet qu'à la base, la pression hydrostatique pour les points de chaque tranche *ab* (fig. 437) est seulement augmentée du poids de la colonne verticale *hi* du fluide comprise entre cette tranche et la paroi inclinée CA. Mais c'est une erreur facile à rectifier, en observant qu'un autre point *m* de cette tranche. situé au-dessous du niveau supérieur AB, reçoit une pression égale à la pression hydrostatique exercée sur ce niveau, augmentée de celle qui est due au poids de la hauteur *nm* de ce niveau au-dessus de la tranche que l'on considère. D'ailleurs, cette tranche transmet horizontalement et perpendiculairement à la paroi AC en *a* cette même pression totale ; de sorte que ce point *a* est pressé et par la pression extérieure et par le poids de la colonne verticale ayant pour hauteur celle du niveau AB au-dessus de la tranche à laquelle le point *a* de la paroi appartient. Quant à la pression unitaire en chaque point, elle se compose de la pression hydrostatique par unité de surface, augmentée du poids d'une colonne fluide ayant cette unité pour base, et pour hauteur celle du niveau au-dessus du point dont il s'agit.

Pour concevoir que la pression naturelle exercée à la surface supérieure AB peut être quelconque, imaginez que cette surface devienne solide et qu'elle soit pressée par un poids quelconque ; on reconnaît ensuite que cette pression se transmettant intégralement d'une tranche à l'autre du fluide pesant à la surface duquel elle agit, s'augmente successivement du poids des diverses tranches qu'elle pénètre, et qu'elle devient d'autant plus considérable que la profondeur des points du fluide est plus grande. Ainsi, par exemple, la surface de la mer est pressée par la pression atmosphérique ; en s'y enfonçant on éprouve des pressions de plus en plus grandes (*cloche du plongeur*).

Quant à la pression atmosphérique, qui presse également sur tous les points de la surface de la mer, il est encore possible de s'en rendre compte. Quoiqu'on ne puisse assigner la cause qui ferait que la hauteur de l'atmosphère fût limitée, toujours est-il qu'en la décomposant en couches successives, la couche la plus élevée n'a rien à supporter, la deuxième supporte la première, la troisième la deuxième, et ainsi de suite ; les pressions vont ainsi en augmentant à mesure qu'on se rapproche de la terre, et elle est la plus grande à

la surface des eaux. Cette pression, qu'on nomme atmosphérique et qui est ordinairement la pression extérieure des liquides, se mesure par le baromètre : elle est de $1^k,033$ par centimètre carré ; et elle équivaut au poids d'une colonne qui, ayant cette même base, aurait pour l'eau une hauteur de $10^m,33$, et pour le mercure $0^m,75$. Ainsi, donc, dans une tranche *ab*, d'un fluide que contient un vase, chaque point d'elle-même, ou de la paroi du vase qui lui correspond, est pressé par la pression atmosphérique et par le poids de la hauteur du niveau du fluide au-dessus de la tranche. On peut se demander comment les parois peuvent résister à une pression si considérable. En y réfléchissant, on aperçoit que si, par l'intermédiaire du fluide, le vase est pressé du dedans au dehors par l'air atmosphérique qui agit sur le niveau supérieur du fluide, d'un autre côté il est pressé du dehors au dedans par l'air libre qui l'environne extérieurement ; de sorte qu'en réalité les parois ne sont pressées que par le poids du fluide renfermé dans le vase.

Le raisonnement précédent, qui prouve que la pression résultante par un fluide pesant contre les parois du vase qui le contient, est égale au poids de la charge au-dessus de ces parois, fait voir que le fond est pressé par un poids plus considérable que celui du fluide qui y est renfermé. Ainsi, dans un vase tel que EFDC, (fig. 438) la pression sur le fond CD équivaut au poids du prisme CDHG, lequel est plus grand que le poids ABDC contenu dans ce vase ; cependant la pression du fond CD contre une table n'est pas plus forte que le poids total du vase et du fluide. On explique ce paradoxe, en recherchant la pression exercée par le fluide en chaque point du vase, au moyen des principes précédents et en décomposant chacune d'elles en deux autres, l'une horizontale et l'autre verticale. Rien n'est plus facile que de faire voir que toutes les pressions horizontales s'entre-détruisent et qu'ainsi le vase ne peut glisser sur le plan horizontal qui le supporte. Mais, parmi les pressions verticales, les unes sont dirigées de bas en haut et les autres de haut en bas. La somme de ces dernières n'est autre chose que la pression totale exercée sur le fond CD, et si on retranche la somme de celles qui s'exercent de bas en haut, leur différence, qui est précisément la pression du fond CD contre la table ou le plan horizontal, se trouve être précisément égale au poids du liquide (1).

(1) Supposons, pour plus de simplicité, un vase *ABDC* (fig. 440), dont la largeur perpendiculaire au plan du dessin soit égale à l'unité de longueur, et considérons l'élément qui a pour largeur cette unité et pour hauteur la petite portion de courbe *MM'* que nous regarderons comme une petite ligne droite. Faisant abstraction de la pression atmosphérique pour laquelle, comme nous le savons, le vase est en équilibre, nous aurons pour la pression due à la pesanteur sur l'élément MM', $\pi \times Mm \times MM'$ (π est le poids de l'unité de volume du liquide). Cette pression, étant perpendiculaire à l'élément, sera dirigée selon la perpendiculaire *PM*. Sa composante verticale *QM*, dirigée de bas en haut, est donnée par la proportion

$$PM : QM :: MM' : MO,$$

93. *Application de la pression des fluides pesants.* — Quelle que soit l'étendue et la forme du vase ABDC (fig. 439), non-seulement chaque tranche ab quelconque horizontale est pressée par un poids de liquide égal à celui d'un prisme qui a cette même tranche pour base et pour hauteur l'abaissement Mh de cette tranche au-dessous du niveau supérieur AB, mais encore chaque point a de la paroi est pressé, sur l'unité de surface, normalement à la paroi en cet endroit par une colonne de fluide ayant pour base l'unité de surface et pour hauteur la hauteur Mh, et cette pression unitaire contre la paroi est mesurée par le poids de ce dernier prisme.

Ce qui précède s'applique aussi aux siphons ou vases recourbés ouverts par les deux bouts (fig. 441) ; les surfaces libres y sont de niveau, et la pression à chaque hauteur se mesure comme ci-dessus. On peut d'ailleurs démontrer encore ces propriétés, en imaginant un tuyau dans un vase rempli d'un fluide en équilibre, l'équilibre n'étant pas troublé par cette hypothèse, il faudra qu'il ait lieu séparément dans le tuyau.

Si, au lieu d'un seul liquide, on en considère plusieurs de densités différentes, renfermés dans un même vase, le plus lourd occupera le fond, le plus léger la surface supérieure, et ceux de densités moyennes s'établiront entre ces deux liquides extrêmes. La surface de séparation entre deux liquides différents sera visiblement de niveau, et cela se démontre comme pour la surface supérieure d'un seul liquide. Enfin, la pression sur le fond est égale à la somme des poids des prismes des divers liquides qui ont pour base commune la surface du fond et pour hauteur respective celle de la tranche qui constitue chaque liquide en particulier. C'est ainsi que les choses se passent dans l'atmosphère. Celle-ci presse du poids de toutes ses couches la surface de la terre.

94. *Détermination de l'épaisseur des vannes, des batardeaux et des digues.* — Il est intéressant de connaître la pression du fluide sur chaque point du vase qui le contient. L'eau, par exemple, est souvent renfermée, en volume considérable, dans des réservoirs que ferme d'un côté un massif en maçonnerie, avec un vide pour laisser échapper, au besoin, l'eau de la *retenue*. La com-

d'où

$$QM = PM \times \frac{MO}{MM'}$$

$$= \pi . Mm \times MM' \times \frac{MO}{MM'} = \pi . Mm \times MO$$

$$= \pi . Mmm'O = \pi Mmm'M'.$$

On verrait de même que la somme des pressions verticales de bas en haut provenant de celles qui sont exercées contre les autres éléments des parois, est représentée par la somme des rectangles analogues à $Mmm'M'$, c'est-à-dire par l'aire de la courbe ACH. Or, la pression de haut en bas sur le fond CD est proportionnelle à BHCD ou à ABDC + ACH. Donc la pression résultante du fond est proportionnelle à ABDC + aire ACH — aire ACH, c'est-à-dire à ABDC. Donc elle équivaut au poids du liquide renfermé dans le vase.

munication de ce vide se trouvant d'ailleurs interceptée par une surface plane qu'on ouvre ou qu'on ferme à volonté, et qui se nomme *vanne*, on voit qu'il est nécessaire de calculer la pression sur cette vanne, afin de lui donner une épaisseur nécessaire pour résister aux effets de cette pression. Soit, par exemple, AB (fig. 442) une vanne fermant un réservoir dans lequel l'eau occupe le niveau MN; nommons l la largeur de l'ouverture de cette vanne dans le sens perpendiculaire au plan du tableau. Décomposons le fluide par tranches horizontales qui coupent la vanne en zones, dont la hauteur, telle que $ab = x$, est très-petite. Soit enfin h la hauteur du niveau MN au-dessus de l'une de ces zones; la pression due au poids du fluide sur la zone ab de la vanne sera égale au poids du prisme d'eau ayant pour base la zone ab et pour hauteur la hauteur h. Si je désigne par π le poids d'un mètre cube d'eau ou 1000 kilogr., et que j'observe que l'aire de la zone en question a pour mesure $l \times x$, la pression cherchée sera représentée par $\pi h \times l \times x$. D'où l'on voit que la pression contre la vanne croît proportionnellement à la profondeur de ses divers points au-dessous du niveau, de sorte que ses épaisseurs devraient croître depuis son sommet jusqu'à la base. Ordinairement on donne à la vanne une épaisseur constante; mais en même temps cette épaisseur doit correspondre à la pression la plus grande parmi celles qui agissent aux divers points de la surface de la vanne. Considérons donc la zone la plus basse Bb, et nommant a cette hauteur fort petite, H la hauteur du niveau MN au-dessus de son milieu; il est évident que la pression sur cette zone aura pour valeur $\pi Hl.a$ appliquée au milieu de cette longueur. Enfin, la zone repose par ses extrémités dans deux encastrements, et nous avons vu, au chapitre X, *de la résistance des matériaux*, que la charge capable d'altérer l'élasticité d'une telle pièce était le quadruple de celle qui produirait un effet analogue à l'extrémité de la même pièce encastrée par l'autre extrémité (3e partie, 77, 82). Si donc j'appelle b l'épaisseur de la vanne, nous aurons l'égalité

$$\frac{\pi Hla}{4} = \frac{Rab^2}{6l}, \quad \text{ou} \quad \frac{\pi Hl}{2} = \frac{Rb^2}{3l};$$

d'où

$$b = l\sqrt{\frac{3\pi H}{2R}}.$$

Telle doit être l'épaisseur à donner à la vanne.

Cet exemple si simple nous conduit naturellement à la question de l'équilibre des batardeaux en maçonnerie destinés à soutenir à une hauteur donnée les eaux d'un réservoir. Nous supposerons, pour plus de simplicité, que ce batardeau soit terminé du côté du fluide par une face verticale. Nous conserverons les mêmes dénominations que tout à l'heure. H est la hauteur du niveau MN au-dessus du plan inférieur de la fondation (fig. 443), h l'enfoncement d'un élément quelconque ab de la face verticale du batardeau; l est

la longueur du batardeau; π est le poids du mètre cube d'eau. Enfin, la pression sur l'élément ab est $\pi lx \times h$. On trouverait pour tout autre élément que sa pression serait $\pi lx'h'$. Faisant la somme de toutes ces pressions qui sont perpendiculaires à la face du batardeau, on aura leur résultante, ainsi que la pression totale dont la valeur sera

$$\pi(lx \cdot h + lx'h + \ldots).$$

Or, lxh n'est autre chose que le moment de l'élément de la face plongée du batardeau par rapport au niveau supérieur, et nous savons qu'une pareille somme est égale à l'aire totale plongée, multipliée par la distance du centre de gravité de cette dernière au niveau supérieur. Donc la pression totale contre une face plane rectangulaire plongée dans un fluide est égale au poids d'un prisme d'eau ayant pour base la partie plongée et pour hauteur celle du niveau au-dessus du centre de gravité de cette partie plongée ; ce résultat est indépendant de l'inclinaison de la face.

Si, comme nous l'avons dit, on suppose verticale la face intérieure du batardeau, toutes les pressions deviennent horizontales et tendent à faire glisser le batardeau sur sa base. Nommant P le poids de ce batardeau, f le coefficient du frottement de la maçonnerie contre le terrain, coefficient qui est environ $\frac{1}{3}$, fP ou $\frac{P}{3}$ sera la résistance que le batardeau oppose à l'effet des pressions horizontales. Si on trouve que $\frac{P}{3}$ est moindre que la résultante de ces dernières, on élargira la base du batardeau des extrémités de laquelle partent les talus qui le terminent, jusqu'à ce que le poids P du batardeau ait été augmenté de manière que $\frac{P}{3}$ soit égal à la résultante des pressions ; et nous parviendrons ainsi à la connaissance des dimensions du batardeau nécessaires pour qu'il résiste au glissement.

Ce batardeau pourrait néanmoins encore tourner autour de l'arête extérieure K de sa base, si le moment de la résultante des pressions n'était rendu égal au moment du poids du batardeau par rapport à cette même arête K. En supposant que le batardeau soit terminé par deux faces verticales, et en appelant E son épaisseur inconnue, π' le poids d'un mètre cube de maçonnerie lequel est d'environ 2000 kilogr., $\pi' H \times E \times l$ sera le poids du batardeau. Son moment, attendu que la verticale de son centre de gravité passe par le milieu de l'épaisseur, aura pour valeur

$$\pi' H \times E \cdot l \cdot \frac{E}{2} = \pi' \frac{HlE^2}{2}$$

$$= 2000 \cdot \frac{HlE^2}{2} = 1000 \cdot HlE^2.$$

Arrivons à la détermination du moment de la pression résultante du fluide ; elle se réduit à trouver le point d'application de cette dernière. Pour obtenir ce point d'application, nous chercherons d'abord le moment de ces pressions

par rapport à un plan quelconque, et nous choisirons pour ce plan le plan de niveau supérieur MN. Il est évident que, dans ce cas, le bras de levier de la pression sur l'élément quelconque *ab* sera *h*, en sorte que le moment de cette pression partielle sera $h \times \pi lxh$, ou $\pi.l.x.h^2$. Un moment analogue s'obtenant pour une autre pression partielle, il ne s'agira plus, pour avoir la somme de ces moments, que de chercher une somme de produits tels que xh^2. Considérez une pyramide régulière dont la base soit un carré qui a pour côté sa hauteur H, il est évident que toutes les sections de cette pyramide parallèles à cette base seront des carrés, et que leur côté est aussi égal à leur distance au sommet (fig. 444). Désignant par *h* une de ces distances, et cherchant le volume intercepté entre deux tranches distantes entre elles d'une quantité très-petite et égale à *x*, le produit xh^2 sera ce volume intercepté, et la somme de tous ces volumes équivaudra au volume total de la pyramide, ou à

$$\frac{H}{3} \times H^2 = \frac{H^3}{3}.$$

Donc, la somme des moments $\pi l\,(xh^2 + x'h'^2 + \ldots.)$ aura pour valeur $\pi \frac{lH^3}{3}$, expression dans laquelle H représente la hauteur totale du niveau MN au-dessus du pied du batardeau. Si nous divisons $\frac{\pi lH^3}{3}$ par la pression totale ou par $\pi lH \times \frac{H}{2}$, le quotient $\frac{2}{3}$ H indique que le point d'application de la pression totale ou le *centre de pression*, est situé aux $\frac{2}{3}$ de la hauteur entière de la face verticale à partir du niveau, ou au tiers de cette même hauteur à partir du point le plus bas K. Donc le moment total de la pression par rapport à ce dernier point sera

$$\frac{\pi lH^2}{2} \times \frac{H}{3}, \text{ ou } \pi \frac{lH^3}{6} = 1000^k.\frac{lH^3}{6}.$$

Égalant enfin ce moment à celui que nous avons obtenu pour le poids du batardeau, nous aurons cette relation,

$$1000\,HlE^2 = 1000\,\frac{lH^3}{6}, \text{ ou } E^2 = \frac{H^2}{6}.$$

ou enfin,

$$E = H\sqrt{\frac{1}{6}} = 0,408.H.$$

L'expérience apprend que les batardeaux doivent avoir au moins 1^m d'épaisseur, pour ne pas laisser l'eau s'y infiltrer. On fera donc toujours $E = 1^m$, tant que la hauteur H du batardeau sera moindre que 2^m. Dans les constructions on se sert d'une règle empirique fort simple pour fixer l'épaisseur des murs de quai qui soutiennent à la fois l'eau et la poussée des terres. Le talus

extérieur de ces murs étant de $\frac{1}{8}$ à $\frac{1}{10}$, on prend à la moitié de la hauteur, l'épaisseur égale au $\frac{1}{3}$ de cette hauteur. Pour les bajoyers d'écluse, cette même épaisseur s'élève à la moitié de la hauteur ; c'est plus que le calcul précédent n'indique.

Si les digues sont en terre, on leur donne 2 mètres d'épaisseur au sommet, et comme elles sont terminées par des talus naturels en amont et en aval, on s'assure seulement qu'elles peuvent résister au glissement.

93. *Épaisseur des chaudières à vapeur, des tuyaux de conduite, etc.* — Nous avons vu que quand un fluide est contenu dans un vase, il exerce en tous ses points deux pressions, dont l'une, dite *hydrostatique*, due soit à une pression extérieure exercée par un piston ou de toute autre manière à sa surface, soit à la tension même du fluide, se distribue uniformément sur tous les points du vase, et dont l'autre, due au poids du fluide, est proportionnelle à l'abaissement de chaque point du vase au-dessous du niveau supérieur. Mais il arrive souvent que la pression hydrostatique est très-considérable par rapport à la charge du fluide, et qu'on peut faire abstraction de la pression due au poids. Cette circonstance est principalement applicable à la vapeur contenue dans une chaudière ou dans des tuyaux de conduite, et rend très-facile le calcul des épaisseurs des vases dans lesquels elle est renfermée.

Considérons donc une chaudière ou tuyau cylindrique (fig. 445) dans lequel la vapeur exerce une pression ou tension représentée par p par unité de surface. Si R est le rayon intérieur du cylindre et l sa longueur parallèle à l'axe, $2\pi R \times l$ sera sa surface intérieure et $2\pi Rl \times p$ la pression totale que cette surface supporte. Si, en vertu de cette pression, le tuyau tend à se dilater, et que son rayon devienne $R + r$, r étant un très-petit accroissement de ce rayon, ce petit accroissement représentera le chemin parcouru par les divers points du vase dans les directions de la pression, en sorte que $2\pi Rlp \times r$ sera le travail dépensé par la pression totale pendant la dilatation r. Mais la circonférence intérieure, de $2\pi R$ qu'était son développement, est devenue $2\pi (R + r)$, et s'est aussi accrue de $2\pi r$.

Cette dernière valeur sera évidemment le chemin parcouru par le point d'application de la résistance des parois à cette véritable traction. Nommons B le coefficient de la résistance à la traction de la substance qui constitue le tuyau, e son épaisseur, $l \times e$ sera l'aire de son profil, et Bl la mesure de la résistance. Par conséquent, le travail de la résistance de la chaudière sera $Ble \times 2\pi r$. Mais, en vertu du principe de sa transmission du travail, le travail de la puissance est égal à celui de la résistance ; d'où

$$2\pi Rlp \times r = Ble \times 2\pi r,$$

ou bien, en supprimant les facteurs communs aux deux termes,

$$R \cdot p = B \cdot e,$$

et, par suite,
$$e = \frac{R \cdot p}{B}.$$

Dans cette formule les longueurs sont rapportées à l'unité de mesure qui est le mètre ; p est la pression de la vapeur par mètre carré. On fera $p = 10330^k, \ldots = 20660^k, \ldots$ selon que la pression de la vapeur sera de 1, 2, ... atmosphères. On se rappellera que la valeur de B est égale à $8.000.000^k$ pour le fer laminé, égale à $4.000.000^k$ pour la tôle de cuivre, égale à 340.000^k pour le plomb, et à 500.000^k pour le verre.

Lorsque dans un cylindre vertical, la charge du fluide cesse d'être négligeable, on décomposera le cylindre en tranches, et on cherchera sur chaque tranche la pression exercée par unité de surface en y comprenant celle qui est due à la charge. La formule précédente donnera pour chaque tranche des épaisseurs différentes et plus considérables à mesure que la tranche se rapproche du fond. Mais, comme en pratique on construit les chaudières ou les tuyaux avec une épaisseur uniforme, on choisira celle qui est trouvée pour le fond.

Jusqu'ici on a supposé au tuyau ou à la chaudière une longueur indéfinie ; et il arrive souvent que l'un ou l'autre est terminé par un fond qui rend le système plus solide. Dans tous les cas on ne doit point compter sur cet excès de solidité. Si ce fond n'était pas appuyé contre un plan inébranlable, il conviendra de lui donner une épaisseur capable de résister à toute la charge du fluide qu'il supporte. Cette question, qui n'a point encore été abordée dans toute sa rigueur, peut être traitée ainsi qu'il suit, avec une approximation suffisante pour la pratique.

Comme ce fond fait corps avec le cylindre, on le supposera réduit à une zone ABDC (fig. 446), symétriquement placée par rapport au centre O et dont la largeur AB soit égale au rayon R. Puis on regardera cette zone comme un corps prismatique encastré à ses deux bouts et chargé à son milieu d'un poids égal à la pression totale du fluide sur le fond. On calculera l'épaisseur de cette pièce comme on l'a fait pour celle de la vanne (3e partie, 94) et il est évident que l'épaisseur obtenue pour la zone ABDC conviendra *à fortiori* pour les autres bandes du fond. Enfin, il est encore une dernière considération qu'on ne doit pas négliger, c'est que le fond ne puisse pas être arraché du cylindre. Or, en cherchant la pression totale sur le fond, qui comprend, bien entendu, la pression hydrostatique et celle qui est due au poids du fluide, on la supposera également répartie sur la surface de l'anneau. Si on détermine la résistance de ce même anneau, laquelle est proportionnelle à sa surface et s'estime facilement, on verra si cette dernière est plus grande que la pression totale.

96. *Équilibre des corps flottants.* — Considérons un liquide en équilibre dans un vase ; il est visible que cet équilibre ne sera pas troublé si on suppose

qu'une masse quelconque O (fig. 447) de ce liquide s'enveloppe d'une croûte très-mince et parfaitement solide. Dès lors cette masse O pourra être regardée comme un fluide renfermé dans un vase, lequel repose sur la tranche PQ qui lui est immédiatement inférieure, comme sur un plan invariable ; et, d'après ce que nous avons vu (3e partie, 92), la pression que la masse O exercera sur cette tranche, ou qui sera détruite par cette tranche, sera égale au poids du volume O du fluide remplaçons maintenant ce volume O de fluide par un corps de même volume et de matière différente; puisque la tranche fluide oppose à ce corps une pression égale au poids du volume fluide dont ce dernier tient la place, on doit en conclure que ce corps ainsi plongé perd de son poids une quantité précisément égale à celui d'un pareil volume du fluide. Ce principe, découvert par Archimède, est employé en physique pour trouver la pesanteur spécifique ou la densité des corps.

Lorsque le corps est moins pesant que le volume du fluide égal au sien, il flotte à la surface de l'eau de manière à y rester en équilibre. Ce qui exige que la résultante des pressions verticales qu'il éprouve de bas en haut de la part du fluide soit égale et directement contraire à la résultante de toutes les forces de pesanteur qui sollicitent ce corps de haut en bas. La première résultante est, comme nous venons de le voir, égale au poids du volume de fluide déplacé par le corps, la seconde est le poids du corps lui-même. Ainsi, pour première condition de l'équilibre du corps flottant, il faut que le poids du volume de fluide déplacé soit égal au poids total du corps. La seconde condition résulte de ce que les résultantes des deux genres de pression sont l'une et l'autre verticales, et qu'ainsi elles doivent se confondre sur la même verticale, et comme l'une passe par le centre de gravité du fluide déplacé et l'autre par le centre de gravité du corps, on reconnaît qu'il faut en outre que ces deux centres de gravité soient situés sur la même verticale. Telles sont les deux conditions relatives à l'équilibre des corps flottants.

Mais la stabilité de cet équilibre est indispensable pour empêcher le corps de chavirer. Soit, par exemple, un bateau en équilibre sur un fluide dont le niveau est AB (fig. 448). Ce dernier plan, qu'on nomme *plan de flottaison*, est tel que, prolongé dans l'intérieur du bateau, il en sépare au-dessous de lui un volume dont le poids en fluide est égal à celui du bateau et de sa charge, et cela quelle que soit la position du bateau. D'où il suit que si, dans l'intérieur de ce dernier, on fait passer une suite de plans séparant de la carène des volumes égaux entre eux et à celui de l'eau déplacée par le bateau, ces plans se confondront tour à tour avec le plan de flottaison toutes les fois que le bateau prendra les positions convenables. Mais ces plans peuvent être regardés comme enveloppant une même surface courbe *abc*, à laquelle ils sont tangents; de sorte que, dans toutes les positions possibles, cette surface demeurera tangente au plan de flottaison AB. Nous pourrons

donc la regarder comme liée invariablement au bateau, et comme forcée de rouler sur le plan AB. Si maintenant on mène à cette surface deux normales infiniment voisines qui se coupent en *o*, ce point sera le centre de rotation autour duquel la surface *acb* tournera en même temps que le bateau et le centre de gravité de ce dernier, pour passer à une position infiniment voisine de l'équilibre voisin. Or, on sait (2ᵉ partie, 51). que l'équilibre sera stable ou non stable, selon que, pour un changement de position très-petit, le centre de gravité du système s'élève ou s'abaisse; ce qui arrive ici selon que, sur la verticale primitive d'équilibre *oc*, le centre de gravité du bateau est au-dessous ou au-dessus de ce point *o*, qu'on nomme *métacentre*. Donc l'équilibre sera stable toutes les fois que le centre de gravité du bateau est au-dessous du métacentre, et que, par conséquent, la stabilité de l'équilibre sera assurée quand le centre de gravité du bateau est plus bas que le centre de gravité du fluide déplacé. Mais il ne s'ensuit pas que cette condition soit indispensable; car cet équilibre aurait encore lieu, lors même que le centre de gravité serait plus haut, pourvu qu'il demeurât inférieur au métacentre. Supposons deux bateaux égaux entre eux et flottant dans un liquide dont le niveau est en MN (fig. 449). A vide ils déplacent un certain volume d'eau dont le poids est égal aux poids des deux bateaux. Si on ajoute dans leur carène une charge de 2000 kilogr., ils s'enfonceront dans l'eau jusqu'à ce que le volume d'eau déplacé se soit augmenté d'un nouveau volume pesant 2000 kilogr.

Imaginez que dans cet état on attache au système des bateaux une corde dont l'extrémité est fixée à un objet qu'on veut enlever au fond de l'eau, et que la corde ait été fortement tendue au moyen de cabestans; on conçoit que si on enlève à ces bateaux la surcharge des 2000 kilogr., la pression du fluide contre les bateaux de bas en haut surpassera de cette même quantité leur poids : ainsi ils agiront sur le fardeau qu'on veut soulever avec cet effort de 2000 kilogr., et l'enlèveront si la résistance de ce fardeau est inférieure à cet effort.

Au lieu d'avoir recours au mode des chargements, on peut, dans les ports de la Manche, profiter de la marée montante; on en a même agi ainsi à Cherbourg pour enlever les débris du batardeau dont on avait fermé le passage de l'avant-port pendant la durée de l'excavation de son bassin.

Si on suppose une masse fluide dans un vase, en communication avec un tube mince vertical, ouvert à sa partie supérieure *a* (fig. 450), il est évident que, dans l'état d'équilibre entre les pressions hydrostatiques qui ont lieu, tant dans le vase que dans le tuyau, le liquide occupe dans l'un et l'autre le même niveau MN. Si on ajoute une surcharge à la surface de l'eau dans le vase, l'eau s'y abaissera, et elle s'élèvera dans le tuyau jusqu'à ce que la hauteur de la colonne en *b* au-dessus du niveau AB dans le vase fasse équilibre à la surcharge. Cette propriété fournit un nouveau moyen de peser les corps;

on peut même établir sur le tube une échelle indicatrice des poids qui, placés sur le piston AB, font élever la colonne d'eau à la hauteur des degrés de cette échelle. Mais les inconvénients de cette méthode consistent dans les frottements du piston AB; il faudrait avoir recours à l'expérience pour en tenir compte et tracer l'échelle. C'est sur ce principe qu'est fondé le système de la balance destinée à peser les voitures sur les routes. Peut-être vaudrait-il mieux faire reposer les voitures sur un grand cylindre flotteur qui, à mesure qu'il s'enfonce, déplace un plus grand volume d'eau, et fait élever le niveau supérieur de l'eau dans le vase même qui le contient. On aurait également un tube indicateur en communication avec le vase, et où l'eau s'élèverait à la même hauteur que dans le vase. De cette manière on éviterait l'inconvénient des frottements dont nous avons parlé à l'égard de la première balance.

XIII.

DES POMPES.

97. *Pompe aspirante.* — Quoique la description des pompes ait été faite dans beaucoup de traités de physique, il est nécessaire d'en donner une idée succincte, afin d'expliquer ensuite leurs propriétés sous le point de vue mécanique. ABCD (fig. 451) est un tuyau cylindrique vertical plongé dans un fluide dont le niveau est LM, et ouvert par les deux bouts; il est évident que le niveau s'établira dans l'intérieur du tuyau à la hauteur de LM, parce que le niveau de cet intérieur et celui de l'extérieur sont chargés d'une même pression, qui est la pression atmosphérique, et qu'il faut que les deux charges sur l'extrémité ouverte BC soient égales. Si, de plus, on y adapte un piston dont le jeu puisse s'exercer dans son intérieur, alternativement de haut en bas et de bas en haut, on aura ce qu'on nomme une pompe aspirante. Car, si le piston est amené sur la surface de l'eau de façon qu'il n'y ait pas d'air interposé entre cette surface et la base inférieure du piston, et qu'on élève ensuite ce piston, il se produira, ou plutôt il tendra à se produire au-dessous du piston, un vide que l'eau remplira aussitôt. Pour concevoir en vertu de quelle pression l'eau s'élève ainsi avec le piston, il faut observer que la pression qui agit sur BC de bas en haut, et qui provient du niveau extérieur, est égale à la pression atmosphérique augmentée de celle qui est due à la charge RB de ce niveau. Quant à la pression antérieure qui résiste de haut en bas contre BC, elle est seulement due au poids de la colonne de fluide remplissant l'espace du tuyau laissé au-dessous du piston ou de la colonne *ab*CB. Donc, la pression résultante, qui pousse le fluide de bas en haut, équivaut à la pression atmosphérique plus le poids d'une colonne de fluide ayant RB

pour hauteur, moins le poids d'une colonne du même fluide de hauteur aB ; en un mot, cette pression équivaut à la pression atmosphérique diminuée de celle qui est due à la charge de la hauteur Ra, c'est-à-dire à la charge de l'eau déjà élevée en arrière du piston au-dessus du niveau LM. Donc, l'eau pourra s'élever jusqu'à une hauteur où le poids de sa charge au-dessus du niveau fera équilibre à la pression atmosphérique, et comme cette dernière pression est celle d'une colonne d'eau ayant $10^m,33$ de hauteur, il faut en conclure que l'eau ne suivra pas le piston au delà de $10^m,33$ au-dessus du niveau LM à l'aide d'une pareille pompe. Quoiqu'en effet la pression barométrique soit telle que nous venons de la définir, plusieurs causes s'opposent à ce que l'eau puisse être élevée à la limite supérieure qu'elle assigne. D'abord l'eau du puits renferme environ cinq pour cent d'air naturel, qui se dégagera immédiatement au-dessous du piston, parce qu'en cet endroit la pression du liquide est nulle, et il en résultera une certaine réaction de bas en haut qui s'ajoutera à la charge du liquide pour contre-balancer l'action extérieure de l'atmosphère sur le niveau LM. Cette réaction se détermine facilement, puisqu'on connaît la quantité d'air à l'état naturel que contient un certain volume d'eau, et que, d'après la loi de Mariotte, sa tension varie en raison inverse de ses divers volumes. A cette réaction se joint encore celle de la vapeur qui se forme dans le vide produit par le piston, et dont la tension relative à la température du lieu est plus forte en été qu'en hiver. Enfin, un piston ne joint jamais hermétiquement les parois du corps de pompe, et donne issue soit à l'air extérieur, soit à l'eau qui se trouve au-dessus de sa surface supérieure: cet effet est même tel que si le piston restait au repos, le dessous finirait par se remplir d'air naturel; mais la levée du piston se fait trop vite pour que la capacité laissée au-dessous du piston ait le temps de se remplir d'air. Quoi qu'il en soit, on voit que le piston, dans les pompes aspirantes, ne peut s'élever au-dessus du niveau LM, que d'une quantité inférieure à la hauteur $10^m,33$, dont le poids d'eau mesure la pression atmosphérique; cette hauteur limitée est au plus de 30 pieds dans les pompes parfaites, et de 28 pieds dans les pompes ordinaires. Si maintenant on conçoit deux soupapes à clapet *m*, *m* (fig. 452) destinées à fermer ou à ouvrir deux ouvertures pratiquées dans l'épaisseur du piston, de manière à faire communiquer, selon les circonstances, l'intérieur du corps de pompe avec le dessus du piston, et qu'en même temps le fond BC soit garni d'une soupape *n* à coquille ou de forme conique qui intercepte ou rétablisse la communication des eaux du puits avec l'intérieur du corps de pompe, vous aurez une idée assez complète de la pompe aspirante. Les soupapes *mm* (fig. 453) sont des lanières de cuir fixées par un bout au piston et chargées d'une rondelle de plomb, de telle sorte qu'elles ne peuvent s'ouvrir que de bas en haut. Quant à la soupape à coquille *n* (fig. 454), c'est un petit tronc conique implanté sur une tige verticale mobile dans des guides et qui tantôt s'applique sur le fond BC et tantôt s'en détache de bas en haut.

Voici maintenant en quoi consiste le jeu de ces soupapes. Supposez que le piston, à partir du fond BC (fig. 452), soit soulevé; le fluide au-dessous de BC va réagir en vertu de la pression atmosphérique extérieure sur le niveau LM, diminuée de celle de la charge du liquide intérieur au-dessus de ce niveau, et il soulèvera la soupape à coquille *n*, qui demeurera ainsi ouverte pendant toute la durée de la montée du piston ou de l'aspiration. Quant aux soupapes *mm*, comme il se forme un vide pendant la durée de l'ascension au-dessous du piston, elles seront tenues fermées par la pression atmosphérique supérieure. Arrivé au haut de sa course, imaginez que le piston vienne ensuite à descendre, le piston va rencontrer le fluide, et ce dernier transmettant la pression imprimée par le moteur au piston, jusqu'à la soupape *n*, celle-ci sera forcément fermée. Mais alors aussi le fluide contenu dans l'intérieur de la pompe, au-dessous du piston, réagit contre les clapets *mm*, et ceux-ci s'ouvrent dès que la pression du liquide, et celle que le moteur imprime au piston, l'emporte sur la pression atmosphérique extérieure. De cette manière tout le fluide compris entre le bas du piston et le fond BC aura passé au-dessus de la surface supérieure du piston, après une descente complète, sauf les portions qui se seront perdues par suite des fuites et qui seront rentrées dans le réservoir commun. Si maintenant on établit un dégorgeoir en *d* ou tuyau au-dessus de la course du piston, l'eau passée au-dessus du piston pendant la descente, s'échappera pendant une nouvelle ascension. Telle est la manière dont le jeu se continue indéfiniment dans la pompe aspirante.

Dans la pratique, on ne peut faire parcourir au piston qu'un espace limité. Cette course est de cinq à six pouces quand la pompe peut être manœuvrée par un seul homme, et de cinq à six pieds pour les machines puissantes. Il convient que la partie du corps de pompe parcourue par le piston soit un cylindre parfaitement alézé dans son intérieur. Le reste de la pompe n'exige pas autant de précision. De ce que l'espace parcouru par le piston est si court, il n'est plus nécessaire que la soupape à clapet, qui laisse passer l'eau du réservoir à l'intérieur du corps de pompe, soit placée à la hauteur du niveau LM; elle peut donc être établie au-dessus.

Les pompes généralement usitées à Metz consistent dans deux cylindres en bois A et B (fig. 453), de deux pouces de diamètre intérieur, et réunis bout à bout par un cylindre de cuivre C, d'un diamètre intérieur un peu plus grand; lequel est destiné à recevoir le piston, et qui, par cette raison, se nomme l'*aspirateur*. La partie au-dessus est le corps de pompe. Quant au cylindre B, il porte au haut la soupape à clapet *n*, et il est terminé au bas par un vase métallique, ou *grenouillère*, percée de trous et qui empêche que les corps flottants ne montent dans la pompe. Ainsi que je l'ai dit, les diamètres intérieurs de A et B sont égaux; le diamètre du piston doit aussi en différer le moins possible, mais il est rendu un peu plus grand, afin que les ouvertures pratiquées dans ce piston donnent à l'eau simultanément une issue au moins égale à l'aire in-

térieure du corps de pompe. Si cette issue, ainsi qu'on le verra, était moindre, les étranglements qui en résulteraient, occasionneraient une perte de force vive ou une diminution dans le travail utile.

Un autre dispositif consiste à faire le tuyau inférieur un peu plus étroit que le corps de pompe dans lequel se meut le piston, à accouder ce tuyau aspirateur, si le réservoir est éloigné de l'espace où le piston doit se mouvoir, et à établir la soupape *n* (fig. 456) qui doit donner passage à l'eau dans le corps de pompe au sommet du tuyau. Mais il peut arriver que, quoique le jeu du piston ait lieu à une hauteur inférieure à la limite où l'eau ne puisse plus monter au-dessous de lui, l'eau s'arrête dès sa première aspiration dans le tuyau aspirateur, et ne parvienne plus dans le corps de pompe après un second coup de piston.

Nous considérerons seulement le cas ou la soupape *dormante n* est placée au bas du tuyau aspirateur. *ab* (fig. 457) est la position la plus basse du piston, et *a'b'* sa position la plus haute. Avant la première aspiration, l'air contenu dans la partie *efhg* est censé à la tension naturelle, et il se dilate, lorsque de la position *ab* le piston passe à la position supérieure *a'b'*; pendant cette ascension, l'eau monte tant que cet air se dilate, et s'arrête en *cd* au moment où le piston est en *a'b'*, et il est évident que la pression de l'air renfermé entre *cd* et *a'b'* est moindre que la pression atmosphérique agissant sur le niveau LM, puisque la pression due an ressort de l'air intérieur, augmentée de la charge *dh*, fait équilibre à la pression extérieure sur le niveau LM. Lorsque le piston descend de *a'b'* la soupape *n* se ferme, et celles du piston ne s'ouvrent pour donner le passage à l'air compris entre sa surface inférieure et le niveau *cd*, qu'autant que cet air intercepté a acquis une pression supérieure à la pression atmosphérique qui agit au-dessus du piston. Par conséquent, lorsque le piston est parvenu à sa position la plus basse *ab*, l'air compris dans l'espace *efdc* est à la tension de l'air extérieur. Appelons H la hauteur $10^m,33$ de la colonne d'eau qui mesure cette tension, *h'* la hauteur d'eau contenue dans le tuyau aspirateur au-dessus du niveau LM. On voit que, pour une seconde ascension du piston, l'air compris dans l'espace *efdc* occupe l'espace *abb'a'* + *efdc*, si la colonne d'eau ne change pas sa hauteur *h'*. Or, en vertu du principe de Mariotte, la tension sera alors mesurée par une hauteur d'eau égale à $\frac{H \cdot efdc}{ab \cdot b'a' + efdc}$, puisque les pressions varient en raison inverse des volumes, et il est évident que l'eau ne montera pas dans le tuyau aspirateur toutes les fois que $h' + \frac{H \cdot efdc}{ab \cdot b'a' + efdc}$, qui mesure la pression de haut en bas sur *gh*, est égale à H, ou plus grand que H, hauteur qui représente la pression exercée de bas en haut contre *gh* par la pression atmosphérique sur le niveau LM. Cette dernière condition peut être satisfaite, quoique la hauteur *a'b'* au-dessus de LM soit inférieure à celle qui correspond à la pression

atmosphérique. Le calcul apprend que cet accident n'est pas à craindre tant que la hauteur du corps de pompe au-dessus du niveau du réservoir est moindre que vingt-huit pieds.

98. *Pompe aspirante et foulante, et pompe simplement foulante.* — Dans la pompe aspirante et foulante, le piston ne porte plus de soupapes à sa surface et refoule l'eau dans sa descente. Il y a toujours une soupape dormante *n* (fig. 458) au sommet du tuyau aspirateur comme dans la pompe précédente. Le piston aspire l'eau pendant sa montée ; puis en descendant ce piston la presse fortement au-dessous de lui, et s'en échappe par un tuyau latéral pour s'élever à la hauteur voulue, qui ici peut être quelconque, selon la pression que le moteur exerce contre le piston. On place à l'entrée de ce tuyau une soupape S, qui s'ouvre du dedans au dehors du corps de pompe, et qui, en retombant par son propre poids pendant l'aspiration, empêche l'eau du tuyau latéral de descendre.

Dans les pompes foulantes le corps de pompe est coudé ; le piston joue dans la partie inférieure plongée du corps de pompe au moyen d'un système de manœuvres dont le plan est perpendiculaire au tableau et qui embrasse le corps de pompe sans le remonter. Au-dessus de la course du piston qui, comme nous l'avons dit, s'effectue au-dessous du niveau LM (fig. 459), est un diaphragme percé d'une ouverture que ferme une soupape E, capable de s'ouvrir de bas en haut. Une semblable soupape F est adaptée à la surface supérieure du piston, et couvre les ouvertures dont il est percé de part en part. Pendant la descente du piston, la soupape E est fermée et la soupape F est ouverte. Pendant la montée, le contraire arrive : la soupape F du piston reste fermée ; l'eau refoulée de bas en haut par le piston force la soupape E à s'ouvrir et s'élève dans le corps de pompe. La hauteur à laquelle elle montera ne dépendra ici que de la force du moteur qui fait mouvoir le piston.

Nous renverrons pour plus de détails sur la pompe aspirante, sur la pompe aspirante et foulante, et sur la pompe simplement foulante, au 3e volume du *Cours de Géométrie et de Mécanique industrielles*, de M. Dupin, 10e leçon, pages 311 et suivantes.

99. *Travail des pompes.* — La disposition des pompes varie à l'infini, mais il existe deux principes communs à toutes les espèces :

1° Le volume de l'eau élevé à chaque coup de piston est un peu moindre que celui de la course cylindrique du piston, et c'est ce qu'il est aisé de voir d'après les descriptions précédentes ; je dis un peu moindre, à cause des fuites que permet le vide qui subsiste toujours entre le corps de pompe et le pourtour du piston ;

2° Le travail développé sur la tige du piston est égal au travail des frottements et résistances, plus au travail équivalent au produit du poids d'eau élevé à chaque oscillation et multiplié par la hauteur comprise depuis le

niveau LM inférieur jusqu'au dégorgeoir de la pompe. Ce dernier travail représente évidemment, d'après nos théorèmes, l'effet utile; on peut cependant encore le démontrer pour chaque cas individuel.

Dans les pompes foulantes le piston en descendant ne produit aucun travail utile. Mais en montant il a à vaincre la pression d'une colonne de fluide dont la base est celle du piston et dont la hauteur est celle du dégorgeoir au-dessus de la tête du piston. Nommant H la hauteur du dégorgeoir au-dessus du niveau LM du réservoir, y la hauteur variable de ce dernier au-dessus de la tête du piston, $H + y$, sera la hauteur totale de la colonne d'eau qui presse le piston de haut en bas. Mais ce même piston est pressé de bas en haut par le niveau LM avec une force égale au poids d'une colonne d'eau ayant y pour hauteur; ainsi le piston résiste de haut en bas avec une pression mesurée par la différence $H + y - y$, ou H. Si je nomme π le poids d'un mètre cube d'eau, A la base du piston, $\pi . A . H$ sera la pression *utile* que doit vaincre le moteur pendant la montée, et si j'appelle B la course du piston, $\pi . A . H . B$ sera le travail utile. Or,

$$\pi . A . H . B = \pi . A . B \times H;$$

$\pi A . B$ est le poids du volume d'eau égal à la course du piston, c'est-à-dire le poids de l'eau monté à chaque coup; donc le travail utile dans la pompe foulante équivaut effectivement au produit du poids de l'eau élevée à chaque coup et de la hauteur du dégorgeoir au-dessus du niveau inférieur.

Dans la pompe aspirante et foulante, lorsque le piston monte, sa surface supérieure est pressée de haut en bas par l'atmosphère, et sa surface inférieure de bas en haut par une pression atmosphérique moins la hauteur y du point de sa course où il se trouve au-dessus du niveau LM; c'est comme s'il était pressé de haut en bas par une colonne de liquide ayant en hauteur l'élévation y du piston au-dessus de ce niveau : son travail instantané utile est donc égal à $\pi . Ay . b$, b étant l'espace très-petit que le piston parcourt pendant un temps élémentaire. Or, Aby est le moment du volume élémentaire de course par rapport au niveau LM, la somme de tous ces moments multipliée par π représentant le travail utile pendant une ascension, on voit que si on nomme y_1 la hauteur du centre de gravité du volume de la course totale dont B est l'amplitude, le travail total pour une course ascendante du piston sera πABy_1. Pendant la descente, le piston est seulement chargé du poids du fluide contenu dans le tuyau latéral, et si on nomme z_1 la hauteur du dégorgeoir au-dessus du centre de gravité de la course du piston, le travail utile que le piston aura à vaincre pendant sa descente sera πABz_1. Ainsi, pendant une oscillation complète, le travail utile sera $\pi AB(z_1 + y_1)$. Or, la somme $z_1 + y_1$ n'est autre chose que la hauteur H du dégorgeoir au-dessus du niveau LM : donc, le travail utile pendant une oscillation complète sera $\pi . A . B . H$, et conduit à une conclusion analogue. On raisonnerait de la même manière pour la pompe simplement aspirante. A cette définition de

l'effet utile produit dans les pompes, nous devons ajouter que quand l'eau doit s'écouler du dégorgeoir avec une grande vitesse, la quantité de force vive imprimée à l'eau à sa sortie, correspond à un travail qu'il faut considérer comme faisant partie de l'effet utile; il est au contraire perdu quand cette vitesse est inutile.

On peut encore juger dans laquelle de ces trois pompes le travail est le plus inégal. S'il s'agit d'une pompe foulante, le piston en montant est pressé par le poids de toute la colonne d'eau comprise entre le dégorgeoir et le niveau LM; le moteur a en outre le poids du piston à soulever. Dans la descente, ce dernier poids favorise le moteur qui n'a d'ailleurs à vaincre alors que les frottements; d'où il suit que le travail du moteur est fort inégal dans ce genre de pompe. Dans la pompe aspirante et foulante, le travail de la montée est égal à celui de la descente, lorsque $y_1 = z_1$, ou lorsque $2y_1 = H$, ou lorsque $y_1 = \frac{H}{2}$: ce qui indique que si la course moyenne du piston répond au milieu de la charge entière on de la hauteur du dégorgeoir au-dessus du niveau du réservoir, le travail devient très-régulier. Enfin, dans la pompe simplement aspirante, la pression du moteur en descendant est nulle, ou égale aux résistances du frottement, et en montant la pression à vaincre équivaut au poids de la colonne dont la hauteur est celle du dégorgeoir au-dessus du niveau LM : ainsi l'action est fort irrégulière, et ce n'est que pendant la montée que s'effectue le travail utile, lequel est toujours égal au poids d'un volume d'eau égal à celui d'une course multipliée par la hauteur de la charge entière.

On régularise l'action des pompes aspirantes et des pompes foulantes de deux manières. Tantôt on arme les balanciers de contrepoids dont le poids est la moitié de la résistance moyenne que le piston doit vaincre en montant (3[e] partie, 51), et qui descendent ou montent en même temps que le piston s'élève ou descend. Tantôt, pour les pompes aspirantes et foulantes, on se sert des réservoirs à air. L'eau, au lieu de s'élever immédiatement dans le tuyau d'ascension, entre dans la capacité C (fig. 460), remplie d'air, et prend un niveau *ln*, tel que l'air pressé entre ce niveau et le sommet supérieur du vase fait ressort pour repousser cette eau dans le tuyau latéral *ad*. Une soupape en o empêche le liquide arrivé dans le réservoir C d'en descendre. Quand le piston monte et ne refoule pas l'eau dans le réservoir C, le ressort de l'air comprimé fait que l'écoulement de l'eau par le tuyau *ad* est continu, au lieu qu'il serait intermittent sans ce réservoir. La pompe à incendie est établie d'après ce dernier système. Elle consiste en deux pompes aspirantes et foulantes (fig. 461), qui refoulent leur eau dans un réservoir commun à air, d'où elle sort ensuite d'un jet continu, par un tuyau destiné à la conduire sur les points jugés convenables.

D'après ce qui précède, on voit que les pompes peuvent être placées loin

du réservoir d'eau au moyen de tuyaux de communication, parce que la pression se transmet à toutes les distances. En général, les clapets doivent être placés aux endroits convenables pour empêcher l'eau de descendre. Enfin, dans les meilleures pompes, le travail utile est les $\frac{2}{3}$ au plus du travail moteur à cause des fuites et résistances du piston, ouvertures des clapets, et à cause de l'inertie du liquide qu'il faut vaincre. Il faut, d'ailleurs, éviter d'élever l'eau plus haut qu'il n'est nécessaire et de lui donner une trop grande vitesse, d'où résulte une perte de force vive. Les étranglements des soupapes produisent aussi des chocs nuisibles, ainsi qu'on le fera voir quand on traitera de l'hydraulique.

100. *Presse hydraulique et siphon.* — La presse hydraulique consiste en un piston A (fig. 462) très-gros, mû dans un corps de pompe, et portant à sa partie supérieure un plateau servant à presser des substances. On fait arriver l'eau sous ce piston par un tuyau B, au moyen d'une pompe foulante et aspirante, semblable à celles qui ont été décrites ci-dessus; mais son piston *a* est d'un diamètre fort petit. Quand la pression exercée sur le piston *a* fait équilibre à celle de A, les pressions totales sont en raison inverse des aires $\pi . R^2$ et $\pi . r^2$ des surfaces de ces pistons. On est donc le maître de donner à volonté la pression *maximum*. On remarquera qu'ici le travail dépensé par le moteur est égal au travail utile plus au travail des frottements, et que ce dernier est très-considérable.

Quoique le siphon appartienne moins aux phénomènes de l'équilibre, qu'à ceux du mouvement, sa description se trouvera ici à sa place, à cause de son analogie avec les pompes. Supposez un tube recourbé composé de deux branches verticales, plongeant chacune dans deux liquides dont les niveaux soient LM et L′M′ (fig. 463). On conçoit que le liquide se mettra de niveau dans l'intérieur de chaque branche avec le liquide dans lequel elles sont plongées respectivement ou qu'il s'élèvera en *ab* du côté LM et en *gh* du côté L′M′. Imaginez que dans ce tube recourbé on fasse le vide, non par le moyen d'un piston, mais en aspirant par l'extrémité *i* de la branche qui plonge dans le niveau le plus bas. Si la hauteur du sommet C au-dessus de LM est plus petite que celle de la pression atmosphérique, laquelle est de $10^m,33$ quand la colonne qui la mesure est de l'eau, ou de $0^m,75$ quand cette colonne est du mercure, le liquide dont le niveau est LM s'élèvera jusqu'en C, puis il retombera dans la branche descendante du côté du niveau inférieur, et l'écoulement continuera sans cesse. Afin d'expliquer ce fait qui, au premier aspect, paraît paradoxal par suite de l'ascension qu'est forcé de prendre le liquide de *ab* en C, voyons ce qui se passe en ce dernier point. La pression qui presse le liquide en ce point et qui le presse de gauche à droite, est due à la pression atmosphérique qui agit sur le niveau LM, diminuée de la charge du liquide depuis C jusqu'à ce niveau. Nommant H la hauteur d'eau qui représente la pression atmosphérique et h' la hauteur du sommet C au-dessus

du niveau LM, $H - h'$ sera évidemment proportionnel à la pression qui pousse le fluide parvenu en C de gauche à droite. Mais de droite à gauche il est refoulé par la pression atmosphérique qui s'exerce sur le niveau inférieur L'M', et l'effet de celle-ci est diminué de la charge du liquide mesuré par la hauteur de C au-dessus de ce niveau, hauteur que je nomme h. Ainsi, le fluide est poussé en C de droite à gauche par une pression proportionnelle à $H - h$. Donc, enfin, la pression résultante qui tend à faire descendre de gauche à droite le liquide arrivé en C, sera égale à la différence des pressions $H - h$ et $H - h'$, c'est-à-dire à $h - h'$. Si donc h est $>$ que h', c'est-à-dire si le niveau L'M' est inférieur au niveau LM, l'écoulement aura lieu. Il n'y aura pas de mouvement si les deux niveaux LM et L'M' étaient à même hauteur, parce qu'en effet les pressions contraires s'entre-détruiraient. L'écoulement sera également impossible si le sommet C s'élève au-dessus du niveau supérieur LM d'une quantité plus grande que la hauteur du liquide de même espèce qui mesure la pression atmosphérique.

Dans la pratique, au lieu d'opérer le vide par l'aspiration ou la *succion*, on bouche les extrémités du siphon, et on remplit les deux branches d'eau, au moyen d'une ouverture qu'on débouche en C et par laquelle l'air intérieur se dégage. Lorsque le tube est rempli, on bouche l'ouverture C et on débouche celles des extrémités; l'écoulement se produit avec une vitesse que nous verrons plus loin être égale à $\sqrt{2g(h' - h)}$. Le siphon ainsi manœuvré est employé avec succès dans les travaux d'épuisement.

XIV.

MOUVEMENT DES FLUIDES CONTENUS DANS DES VASES, CANAUX, RIVIÈRES.

101. *Phénomène de l'écoulement de l'eau hors d'un vase.* — L'objet de ce chapitre est de rechercher les lois du mouvement des fluides; nous nous occuperons d'abord de celles qui sont relatives au mouvement de l'eau et des liquides en général. ABDC (fig. 464) est un vase ou réservoir où l'eau occupe un niveau supérieur AB, et dont le fond est horizontal. Si on fait une petite ouverture en *ab* sur une des parois verticales, la pression intérieure poussera le fluide au dehors du vase; cette pression étant d'autant plus forte que l'orifice *ab* est pratiqué plus bas, il s'écoulera d'autant plus vite et en quantité d'autant plus grande que cette ouverture se rapprochera du fond. La quantité d'eau écoulée dans l'unité de temps, dans une seconde, est ce qu'on nomme la *dépense*. L'eau en sortant forme une gerbe continue qu'on appelle *veine fluide*, *filet* ou *jet*; ce jet affecte la forme de la courbe que décrirait un corps lancé perpendiculairement à la paroi, et avec la vitesse que

possède le liquide à l'orifice. C'est une parabole dont le sommet est ab. Dans tous les points de cette parabole la pesanteur tend continuellement à augmenter la vitesse des molécules ; mais en ab elle dépend seulement de ce qui se passe dans l'intérieur du réservoir.

Si l'orifice est pratiqué en $a'b'$ au fond du vase ABDC, le jet est vertical. Si l'orifice est pratiqué en $a''b''$ (fig. 465) contre une paroi horizontale pressée de bas en haut par le liquide, le jet s'élève verticalement, et l'expérience démontre qu'il s'élève à la hauteur du niveau supérieur de l'eau dans le réservoir ; ce qui suppose (1re partie, 64) que les molécules en $a''b''$ ont une vitesse due à la hautenr de la charge d'eau correspondante, on à la hauteur du niveau snpérieur au-dessus du centre de l'orifice. Mais on peut démontrer la chose spécialement par le principe du travail.

102. *Vitesse de l'eau sortant librement par un petit orifice mince.* — Avant qu'on ne débouche l'orifice ab (fig. 466), la pression intérieure exercée sur lui est dne à la charge h du niveau supérieur AB au-dessus du centre de cet orifice. A la rigueur elle devrait être augmentée de la pression atmosphérique qui agit sur ce niveau, mais, comme celle-ci a également lieu au dehors de la paroi snr laquelle l'ouverture ab est pratiquée, la pression n'est en réalité due qu'à la charge h du liquide. Donc, au moment où l'ouverture est débouchée, le fluide, en vertu de cette pression, est poussé au dehors et se dirige de toutes parts en décrivant des courbes qui convergent vers cet orifice : ce mouvement se propage ainsi de proche en proche. Quant à la vitesse réelle de sortie, elle augmente sans cesse et rapidement jusqu'à ce que le mouvement se soit étendu dans tout le vase et soit devenu uniforme en chaque point. C'est à cet instant que nous considérons le mouvement du fluide, en supposant d'ailleurs, comme c'est le cas ordinaire des applications, qu'il arrive par la surface supérieure du réservoir, dans le vase, précisément autant d'eau qu'il en sort à chaque instant. Cela posé, le mouvement étant ainsi devenu permanent, il sera facile de voir que chaque molécule dont le poids est p, en descendant de h aura reçu, quelle que soit la courbe qu'elle décrive, de la gravité un travail $p.h$ (2e partie, 12). Si on appelle v la vitesse de cette molécule à son entrée sur la surface supérieure du réservoir et V sa vitesse à la sortie de l'orifice, $\frac{p}{g}(V^2 - v^2)$ reprśentera l'accroissement de force vive qu'aura reçu la molécule qu'on considère pendant qu'elle a parcouru la hauteur h. La même chose pouvant se dire de toutes les autres molécules qui doivent arriver en même temps dans l'orifice et qui s'écoulent dans un temps donné, pendant une seconde, par exemple, on reconnaît sans peine que, si P est le poids de l'eau qui s'écoule dans une seconde, $\frac{P}{g}(V^2 - v^2)$ sera l'accroissement de force vive imprimée à ce poids d'eau, pendant qu'il aura parcouru la hauteur h, ou qu'il aura reçu de la gravité le travail $P.h$. On aura donc, en vertu du principe des forces vives,

$$\frac{P}{g}(V^2 - v^2) = 2Ph,$$

ou

$$V^2 - v^2 = 2gh.$$

Si la vitesse v du fluide en entrant dans le vase est très-petite, ou si $v = 0$, il reste $V^2 = 2gh$; d'où

$$V = \sqrt{2gh},$$

formule due à Torricelli, disciple de Galilée, laquelle indique que la vitesse du fluide, en s'échappant par l'orifice, est due à la hauteur du niveau supérieur au-dessus du centre de l'orifice. Cette hauteur s'appelle *charge génératrice*. On voit encore que cette vitesse est celle qu'acquerrait un corps libre en tombant d'une hauteur égale à cette charge. On se rappellera enfin que g, ou la vitesse imprimée par la gravité au bout de la première seconde, est égale à $9^m,809$. Il existe des tables à l'aide desquelles on trouve la vitesse due à une hauteur donnée, ou une hauteur due à une vitesse donnée. Ce résultat suppose que la vitesse v est fort petite ; nous verrons plus loin ce qu'il convient de faire (3e partie, 103) quand cette vitesse n'est pas négligeable.

103. *Même écoulement sous des pressions quelconques.*—On a supposé jusqu'ici que la pression exercée sur la surface supérieure du réservoir, et qui se transmet de haut en bas jusqu'à la surface de l'orifice, était la pression atmosphérique, et qu'elle était détruite par celle qui agit extérieurement à cet orifice contre la veine. Mais si ces deux pressions devenaient différentes, la vitesse de sortie serait évidemment altérée en conséquence. Que, par exemple, l'orifice plonge dans un autre bassin extérieur rempli d'eau et dont le niveau au-dessus du centre de cet orifice soit h' (fig. 467), les molécules, à leur sortie, seront refoulées vers le réservoir supérieur avec une force due à h', et la charge génératrice de la vitesse ne sera plus que $h—h'$. On peut, en effet, admettre que les molécules ne descendent plus que la différence de hauteur comprise entre les deux niveaux. Si cette différence était nulle, il n'y aurait plus d'écoulement ; et, en général, on peut démontrer que la vitesse d'écoulement est toujours relative à la différence des pressions extérieures et intérieures de l'orifice.

Soit, en effet, un liquide quelconque ABDC (fig. 468) enfermé dans un vase et pressé à sa partie supérieure d'une manière quelconque, ou par un piston AB avec un effort égal à p sur l'unité de surface ; cherchons dans cette circonstance avec quelle vitesse le liquide s'échappera par l'orifice ab. La pression sur cet orifice, rapportée à l'unité de surface et qui favorise le mouvement, sera p, augmenté de la pression atmosphérique supérieure et de celle qui est due à la charge h du liquide au-dessus de cet orifice. Si le fluide s'écoule au dehors à l'air libre, la pression qui s'oppose à son mouvement et qui est contraire à la précédente, sera égale à la pression atmosphérique. Donc, la pression résultante ou génératrice, ou la différence des deux genres de pressions précédents, équivaut à p augmenté du poids de la charge h, et si je nomme

π le poids de l'unité de volume du liquide, $p+\pi h$ sera la pression génératrice par unité de surface. Pour évaluer cette pression totale en charge du même liquide, il faut observer que la pression unitaire p du piston peut être remplacée par une colonne de liquide agissant au-dessus de ce piston, et qui aurait l'unité de surface pour base. Soit h' la hauteur d'une telle colonne, elle devra être telle qu'on ait $\pi h' = p$; d'où

$$h' = \frac{p}{\pi},$$

ce qui est facile à calculer. Ainsi, l'écoulement actuel revient au cas où la charge au-dessus de l'orifice est $h + h'$, en sorte que la vitesse de sortie sera

$$\sqrt{2g\,(h+h')}, \quad \text{ou} \quad \sqrt{2g\left(h+\frac{p}{\pi}\right)},$$

pourvu que la vitesse en AB soit très-petite.

Nous pouvons vérifier la chose directement. Supposons que le piston, se mouvant parallèlement à lui-même, ou avec une vitesse constante pour tous les points de sa surface, descende en BB′ en un très-petit temps, et qu'il s'écoule le volume $abb'a'$ pendant le même temps. Il est évident que si le liquide est incompressible, les deux volumes ABDC et A′B′DC$abb'a'$ seront égaux, et qu'en retranchant de chacun leur partie commune A′B′DC, on aura ABB′A′ $= abb'a'$. De ce que le mouvement du piston s'opère parallèlement, le volume ABB′A′ sera exprimé, en nommant A la surface du piston, par le produit de A et du chemin AA′ parcouru par ses divers points. De même, si on admet que vers l'orifice ab, le mouvement s'opère parallèlement à lui-même, le volume $abb'a'$ sera un prisme et aura pour valeur le produit de a et du chemin aa', a représentant l'aire de la section ab. Ainsi, tant que le mouvement du liquide s'effectuera par tranches parallèles dans la section AB et dans la section ab, et quel que soit d'ailleurs le mouvement opéré dans les sections intermédiaires, on aura

$$A \times \overline{AA'} = a \times \overline{aa'}.$$

D'ailleurs, les chemins AA′ et aa', parcourus simultanément dans un temps très-petit par le piston et par le fluide sur la section ab, seront proportionnels aux vitesses v et V qui ont lieu à la section AB et à la section ab : d'où l'on tire

$$A \,.\, v = a \,.\, V.$$

Maintenant on doit faire attention que l'accroissement de la force vive de toute la masse du liquide, comprise entre les sections AB et ab pendant un temps très-petit, doit équivaloir au double du travail produit par le piston et de celui de la pesanteur de toute la masse pendant le même petit temps. Nous allons chercher ces trois valeurs successivement.

L'accroissement de la force vive de tout le fluide compris entre les sections AB et ab est facile à obtenir. En effet, quand le piston était en AB, la force

vive était celle que possède ABB'A' plus celle de A'B'DC. Le mouvement restant permanent, la force vive de cette dernière partie demeure la même lorsque le piston passe en A'B', et dans cette position la force vive totale est égale à la force vive de A'B'DC plus celle de *abb'a'*. Donc, l'accroissement de force vive acquis par toute la masse fluide pendant le petit temps qu'on considère, est égal à la différence des forces vives de *abb'a'* et de ABB'A'. Ces deux masses étant égales, si nous nommons q leurs poids, leurs forces vives seront $\frac{q}{g}$ V^2 et $\frac{q}{g}v^2$. Ainsi, l'accroissement cherché sera

$$\frac{q}{g}(V^2 - v^2).$$

Le travail du piston pendant le même petit temps est égal à $A \times p \times \overline{AA'}$. Quant au travail de la pesanteur de la masse fluide totale, si G est son centre de gravité, quand elle occupe la position ABDC, et G' son centre de gravité quand elle occupe la position A'B'DC*abb'a'*, le travail produit pendant l'intervalle de ces deux positions équivaut au produit du poids total par GG', ou à la différence du moment de A'B'DC*abb'a'* pris par rapport à AB et du moment de ABDC pris aussi par rapport à ce plan supérieur. Or, le premier moment est égal au moment de la partie commune A'B'DC, plus le produit de la tranche *abb'a'* et de sa distance au plan AB. De même, le moment de ABDC se compose du moment de la partie commune A'B'DC, augmenté du produit de la tranche ABB'A', multiplié par sa distance au plan AB. Donc, enfin, le travail cherché de la pesanteur est égal au produit du poids q de la tranche ABB'A', ou *abb'a'*, multiplié par la distance h qui sépare ces deux tranches. Ce travail sera donc qh. On aura ainsi, en appliquant le principe des forces vives,

$$\frac{q}{g}(V^2 - v^2) = 2A \cdot p \times \overline{AA'} + 2q \cdot h,$$

ou

$$V^2 - v^2 = 2g\left(\frac{p}{q} \cdot A \times \overline{AA'} + h\right).$$

Or, on a, en représentant par π la densité du liquide sous le piston, ou le poids de l'unité de volume; on a, dis-je,

$$q = \pi \times A \times \overline{AA'},$$

et, par suite,

$$\frac{P \times A \times \overline{AA'}}{q} = \frac{p}{\pi}.$$

Faisant cette substitution dans l'égalité précédente, on trouvera

$$V^2 - v^2 = 2g\left(\frac{p}{\pi} + h\right);$$

et si v, vitesse du piston, est assez petite pour être négligée, on retombe sur l'égalité précédente

$$V=\sqrt{2g\left(\frac{p}{\pi}+h\right)}.$$

Si, outre la pression atmosphérique, l'extérieur de la section ab avait été pressé en sens contraire du mouvement par une pression p' pour l'unité de surface, il faudrait diminuer h de $\frac{p'}{\pi}$ ou p de p'. On peut s'en rendre compte par un raisonnement simple, en observant que la pression extérieure qui agit sur la section ab, contrairement au mouvement, est $p' \times a$; que son travail pendant le petit temps dans lequel ab s'est rendu en $a'b'$ est égal à $p' \times a \times \overline{aa'}$. Mais comme le poids de $abb'a'$ est égal à q, ainsi que celui de ABB'A', et que ce poids est aussi égal à $\pi \times a \times \overline{aa'}$, on trouve . . . . $a \times \overline{aa'} = \frac{q}{\pi}$. Donc, le travail de cette pression contraire est $\frac{q}{\pi} \times p'$. Il faudra, dans l'égalité ci-dessus, le diviser par q, ce qui donnera $\frac{p'}{\pi}$ à retrancher de $\frac{p}{\pi}$; de sorte que, dans ce dernier cas, la vitesse de sortie devient

$$V=\sqrt{2g\left(\frac{p-p'}{\pi}+h\right)}.$$

On doit maintenant bien concevoir comment on agirait dans tous les cas semblables, et nos raisonnements resteraient d'ailleurs les mêmes si le piston se mouvait horizontalement. h sera alors la charge verticale du fluide depuis le point supérieur jusqu'au centre de l'orifice d'écoulement. Si la vitesse v du piston était appréciable, il faudrait s'y prendre autrement pour avoir la vitesse de sortie V.

Nous avons vu ci-dessus qu'on avait $Av = aV$; donc

$$v=a\frac{V}{A}, \quad \text{et} \quad v^2=\frac{a^2}{A^2}V^2;$$

d'où

$$V^2-v^2=V^2-\frac{a^2}{A^2}V^2=V^2\cdot\frac{1-a^2}{A^2}=2g\left(\frac{p}{\pi}+h\right).$$

Soit posé $1-\frac{a^2}{A^2}=K$, on aura

$$KV^2=2g\left(\frac{p}{\pi}+h\right), \text{ ou } V=\frac{\sqrt{2g\left(\frac{p}{\pi}+h\right)}}{\sqrt{K}}.$$

C'est la valeur précédente de V, mais divisée par $\sqrt{K}$; cette nouvelle valeur sera donc plus grande. Lorsque $a=\frac{1}{20}A$, $1-\frac{a^2}{A^2}$ ou K ne diffère de l'unité que de $\frac{1}{400}$, et on prendra V comme ci-dessus. Nous terminerons ce paragraphe en observant que l'effort du piston peut être remplacé par

une pression quelconque agissant sur la surface AB du niveau supérieur, et que pendant que ce dernier descend en A'B', le vide ABB'A' est une masse d'eau affluente égale à celle qui s'écoule, de telle sorte que la charge du fluide h est toujours constante.

104. *Écoulement des gaz ou vapeur, dans le cas où la pression intérieure ne surpasse que de peu la pression extérieure.* — Ce qui précède suppose 1° que le volume du fluide écoulé par l'orifice égale celui qui passe par la tranche supérieure; 2° que la densité reste la même dans tous les points du réservoir. Cela est très-sensiblement vrai pour les liquides peu compressibles, tels que l'eau, mais non plus pour les gaz. La pression étant plus forte dans le réservoir près du piston que près de l'orifice où elle se réduit à celle de l'atmosphère, le fluide est aussi plus dense, c'est-à-dire qu'à poids égal il occupe un plus petit volume auprès du piston qu'auprès de l'orifice. Néanmoins, quand la pression intérieure ou la pression totale supérieure que le fluide éprouve à la fois de la part de l'atmosphère et du piston ne surpasse pas la pression extérieure de $\frac{1}{10}$ ou de $0^k,10$ par centimètre carré, ce qui est le cas de beaucoup d'applications pratiques, on peut négliger la différence des densités, ou la différence qui existe entre les volumes ABB'A' et $abb'a'$, et admettre que le fluide s'écoule sous la densité qu'il a dans l'intérieur du réservoir; on aura donc encore pour la vitesse de sortie en désignant par p la pression intérieure par unité de surface, par p' la pression extérieure qui s'oppose au mouvement, par π la densité du fluide dans le réservoir, et par h la hauteur de sa charge,

$$V=\sqrt{2g\left(\frac{p-p'}{\pi}+h\right)}.$$

On suppose, d'ailleurs, que la vitesse v de la tranche supérieure ou du piston est fort petite; la dépense est égale encore à aV; son volume est supposé donné sous la pression p intérieure du réservoir; et si on nomme h' la hauteur en centimètres d'une colonne de mercure représentant la pression intérieure du réservoir, n le nombre de degrés centigrades de sa température; la densité π, ou le poids du mètre cube du fluide dont aV est le volume, sera donnée (Cours de la 1[re] année, § 211) (1) par la relation $\pi=\frac{0,0171 \cdot h'}{1+0,00375 \cdot n}$.

Lorsque le fluide est de la vapeur, on suppose qu'il n'y a point de condensation. Enfin, le poids du volume du fluide écoulé par seconde sera $a\text{V} \cdot \pi$. Si le poids du fluide est très-petit, ou si h est négligeable par rapport à

(1) Le *Cours de la 1re année*, auquel l'auteur renvoie ses lecteurs dans ce chapitre et dans les chapitres subséquents, a été publié sous le titre de *Mécanique Industrielle, exposant les différentes méthodes pour déterminer et mesurer les forces motrices*; Bruxelles, 1839; un volume in-8°.

$\frac{p-p'}{\pi}$, on prendra . . . .

$V=\sqrt{2g\left(\frac{p-p'}{\pi}\right)}$; c'est la règle proposée par Daniel Bernouilli, mais elle est fautive lorsque p surpasse p' de plus de $\frac{1}{10}$ de p'.

105. *Écoulement des gaz quand la pression intérieure est sensiblement plus grande que la pression extérieure.* — Pour trouver la formule vraie dans le cas où la pression intérieure dans le réservoir surpasse sensiblement celle qui s'oppose à la sortie du fluide, on négligera *à fortiori* la charge h toujours très-petite, ou l'action de la gravité, ainsi que la vitesse v de la tranche supérieure, en sorte que la force vive acquise pendant le très-petit temps de l'écoulement du volume ABB'A, (fig. 469) se reduira à $\frac{q}{g}V^2$; q représente encore le poids de ABB'A', ou est égal à π. ABB'A'. Quant au volume sorti $abb'a'$, il ne peut plus être égal au volume ABB'A'; mais il doit être avec ce dernier, d'après la loi de Mariotte, dans le rapport inverse des pressions extérieure et intérieure p' et p. On aura donc

$$\text{volume ABB'A'} : \text{volume } abb'a' :: p' : p;$$

d'où

$$\text{volume } abb'a' = \text{ABB'A'} \times \frac{p}{p'}.$$

Ainsi, pendant le petit temps où la force vive $\frac{q}{g}V^2$ s'acquiert, il faut, outre les quantités de travail produites par chaque pression intérieure et extérieure p et p', considérer le travail favorable au mouvement du fluide et restitué par la dilatation du volume ABB'A' qui devient $abb'a'$.

La quantité de travail de la pression p sur la tranche AB est

$$p \times A \times AA' = p \times \text{volume ABB'A'}.$$

Quant à celle de p' sur l'orifice $ab = a$, laquelle s'oppose au mouvement, elle sera

$$p' \times a \times \overline{aa'} = p' \times abb'a'.$$

La différence de ces quantités de travail étant évidemment nulle à cause de

$$p \times \text{ABB'A'} = p' \times abb'a',$$

la force vive $+\frac{q}{g}V^2$ est donc uniquement due au travail communiqué par la dilatation du volume ABB'A' du gaz qui passe de la pression p à la pression p'. Ce travail est évidemment proportionnel au volume primitif du gaz; car il sera double, triple, etc., selon que le volume primitif sera lui-même double ou triple. Si donc je nomme T le travail dû à la dilatation du même gaz en tant que son volume primitif soit un mètre cube, le travaille dû à la dilatation du volume primitif ABB'A' qui s'écoulera pendant le petit temps

qu'on considère, sera représenté par ABB'A' $\times$ T. Mais puisqu'on a $q = \pi$. ABB'A', on tire ABB'A' $= \frac{q}{\pi}$, et, par suite, $\frac{q}{\pi}$. T pour la quantité de travail produite par la dilatation du gaz. D'où nous conclurons, en vertu du principe des forces vives,

$$\frac{q}{g} V^2 = \frac{2qT}{\pi},$$

ou

$$V = \sqrt{\frac{2gT}{\pi}}.$$

Reste enfin à trouver T. Pour plus de simplicité, nous supposerons que le gaz dont le volume primitif est l'unité, est renfermé dans un tuyau dont la section aurait pour aire l'unité de surface, de manière qu'à l'état primitif ou sous la pression p, sa hauteur serait aussi égale à l'unité de longueur. Lorsque la pression est réduite à p', le volume est dilaté; et comme les volumes ou les hauteurs, parce que ces volumes sont censés avoir toujours la même base, sont en raison inverse des pressions, la hauteur du volume dilaté est devenue $\frac{p}{p'}$. Donc le chemin total parcouru en vertu de la dilatation est la différence des deux hauteurs extrêmes, c'est-à-dire $\frac{p}{p'} - 1$ ou $\frac{p - p'}{p'}$. Partageons maintenant cet intervalle en deux parties égales; il est évident qu'au milieu de l'intervalle dont il s'agit, la longueur du fluide sera $1 + \frac{p - p'}{2p'}$, ou $\frac{p + p'}{2p'}$; et qu'en nommant y la pression correspondante, on aura la proportion

$$1 : \frac{p + p'}{2p'} :: y : p, \quad \text{ou} \quad y = \frac{2pp'}{p + p'};$$

si maintenant on observe que les trois pressions consécutives sont p, $\frac{2pp'}{p+p'}$ et p', et que le chemin constant parcouru dans l'intervalle qui sépare les instants où elles ont lieu successivement est $\frac{p - p'}{2p'}$, on voit que l'estimation du travail total T est facile au moyen du théorème de Thomas Simpson, et qu'il est égal à

$$\frac{1}{3} \cdot \frac{p - p'}{2p'} \left(p + 4 \cdot \frac{2pp'}{p + p'} + p'\right) = \frac{p - p'}{6p'} \left(p + \frac{8pp'}{p + p'} + p'\right).$$

Par conséquent, nous aurons ici, pour la vitesse de sortie,

$$V = \sqrt{\frac{2g}{\pi} T} = \sqrt{\frac{g\,(p - p')}{3p'\pi} \left(p + \frac{8pp' + p'}{p + p'}\right)}.$$

On remarquera, d'ailleurs, que la densité π qui entre sous le radical est celle qui a lieu sous la pression p dans l'intérieur du réservoir, et que celle

du gaz au moment où il sort est celle qui correspond à la pression extérieure p'.

Cette dernière densité sera visiblement $\pi \cdot \frac{p'}{p}$. Par conséquent, le poids de gaz écoulé dans une seconde aura pour expression $a \cdot V\pi \cdot \frac{p'}{p}$, sauf les corrections dues à la contraction dont il sera parlé plus loin.

106. *Applications numériques à l'écoulement par un orifice très-petit pratiqué dans une paroi mince.* — Nous allons offrir trois exemples numériques sur la recherche de la vitesse de sortie par un orifice très-petit pratiqué à paroi mince, soit que le fluide soit un liquide ou qu'il soit un gaz.

1° Supposons que de l'eau à sa surface supérieure soit pressée par un piston ou de toute autre manière indépendamment de la pression atmosphérique, avec une pression de $0^k,20$ par centimètre carré de surface ; que la hauteur du niveau supérieur de l'eau au-dessus du centre de l'orifice soit de 4^m ; il s'agit de trouver la vitesse V à l'orifice ; et on aura recours à la formule du n° 103,

$$V = \sqrt{2g\left(\frac{p-p'}{\pi} + h\right)}.$$

Si la pression du piston est de $0^k,20$ par centimètre carré, la pression totale au-dessus du niveau de l'eau p sera égale à la pression atmosphérique augmentée de $0^k,20$. Mais la pression de p' qui s'oppose à la sortie du liquide est aussi une pression atmosphérique. Ainsi, la prsesion résultante sera de $0^k,20$ par centimètre carré ou de 2000^k pour un mètre carré de surface, ou 10 000 centimètres carrés. On fera donc $p - p' = 2000_k$. Quant à la densité π, elle est de 1000^k, poids du mètre cube d'eau. D'où $\frac{p - p'}{\pi} = \frac{2000^k}{1000} = 2^m$. Nous avons dit que la hauteur h du niveau au-dessus du centre de l'orifice était de 4^m ; d'où $h = 4^m$, et $g = 9^m,809$. Faisant ces substitutions, on trouve

$$V = \sqrt{2g\,(2^m + 4^m)} = \sqrt{2g \cdot 6^m}.$$

On voit que la vitesse de sortie est due à 6 mètres de hauteur. Pour avoir cette vitesse que les tables donneraient immédiatement, on remplacera, sous le radical, g par $9^m,809$; puis, extrayant la racine carrée du produit, on aura

$$V = \sqrt{2 \times 9{,}809 \times 6} = 10^m,84\,;$$

telle sera la vitesse de sortie.

2° Supposons que l'air soit chassé par un piston qui le presse avec une force mesurée par la pression de $\frac{1}{11}$ d'atmosphère. Ici nous ne parlons plus de la hauteur de la charge du gaz, parce qu'on doit en faire abstraction, comme nous l'avons dit. La formule se réduit alors à

$$V = \sqrt{2g\frac{p-p'}{\pi}}.$$

Pour trouver la densité ϖ, nous imaginerons que la température soit de 10 degrés centigrades. Si la pression du piston est de $\frac{1}{11}$ d'atmosphère, la pression totale p de l'air dans l'intérieur du réservoir, qui se compose de la précédente et de la pression atmosphérique supérieure, sera égale à $\frac{12}{11}$ d'atmosphère. La hauteur en centimètres d'une colonne de mercure qui représente la pression atmosphérique, est de 76; donc la colonne qui représente celle de $\frac{12}{11}$ d'atmosphère $= 76 + \frac{76}{11} = 83$ centimètres. Faisant, dans la relation $\varpi = \frac{0,0171 \,.\, h'}{1 + 0,00375 \,.\, n}$, $h' = 83$, et $n = 10°$, on aura, pour le poids du mètre cube de l'air dans l'intérieur du réservoir,

$$\varpi = \frac{0,0171 \times 83}{1 + 0,00375 \,.\, 10} = \frac{1,4193}{1,0375} = 1^{k},37 \text{ environ.}$$

D'ailleurs, p étant $\frac{12}{11}$ d'atmosphère, et la pression p' contraire au mouvement étant celle d'une atmosphère, $p - p'$ sera de $\frac{1}{11}$ d'atmosphère. Une pression atmosphérique se mesure par $1^{k},033$ pour un centimètre carré de surface ou par $10\,330^{k}$ pour un mètre carré. Le onzième de cette quantité ou $\frac{10\,330}{11} = 939^{k},10$. Nous ferons donc, dans la formule, $p - p' = 939^{k},10$, et $\varpi = 1,37$. On aura, par conséquent,

$$V = \sqrt{2g \,.\, \frac{939,10}{1,37}} = \sqrt{2g \,.\, 685^{m},45} = 117^{m} \text{ environ.}$$

3° Si la pression intérieure excède la pression extérieure de plus de $\frac{1}{10}$ et que ce soit de $\frac{1}{5}$ d'atmosphère, on verra que la densité ϖ est de $1_{k},50$ en supposant toujours la température de 10°. On aura alors recours à la formule

$$V = \sqrt{g \frac{p - p'}{3p'\varpi} \left(p + \frac{3pp'}{p + p'} + p'\right)},$$

dans laquelle on fera $\varpi = 1,50$, $p = \frac{6}{5} \times 10\,330 = 12\,396_{k}$, $p' = 10\,330$, et $g = 9,81$; ce qui donne

$$V = \sqrt{g \,.\, 3013} = \sqrt{9,81 \,.\, 3013} = 171^{m},90.$$

Il est bon de remarquer que l'excès de pression intérieure p sur la pression extérieure p' s'obtient tout d'un coup par un manomètre à siphon *efg* (fig. 470), contenant de l'eau ou du mercure, et ouvert à ses extrémités *e* et *g*.

La différence de hauteur du liquide dans les deux branches de h sur i est la colonne de pression résultante, de laquelle on déduit facilement $p - p'$, et, par suite, p et p', en observant que la pression d'une colonne d'eau, sur le mètre carré de surface, ayant un mètre de hauteur, est de 1000 kilogr., et que celle d'une pareille colonne de mercure est de 13 598 kilogr.

107. *Dépense hypothétique par une paroi mince, et dépense effective.* — La détermination de la vitesse de sortie par l'orifice d'un réservoir conduit à la solution d'une question intéressante ; c'est celle qui a pour objet de trouver le volume ou le poids du fluide écoulé dans un temps donné, dans 1″, par exemple ; c'est ce qu'on nomme la dépense. Ce calcul serait facile si on connaissait la longueur AA′ (fig. 471) parcourue par la tranche supérieure AB pendant le temps qu'on considère, c'est-à-dire le volume ABB′ A′. Mais on ne peut pas toujours mesurer cette longueur. Or, nous pouvons trouver ce volume par la vitesse du liquide V à sa sortie à l'orifice ab; car, cette vitesse étant supposée constante ou uniforme, les molécules de fluide qui sont en ab au commencement du temps pendant lequel on veut évaluer la dépense, seront en $a'b'$ au bout d'une seconde, et à une distance $bb' = \mathrm{V}$, si on fait, comme on le doit, abstraction de la gravité. Donc, le volume de fluide $abb'\,a'$, écoulé pendant l'unité de temps, est celui d'un prisme qui a pour mesure le produit de V multiplié par la surface de la section ab de l'orifice, et si je nomme a l'aire de cet orifice, nous aurons $\mathrm{D} = a \times \mathrm{V}$. Cette dépense ainsi estimée, qu'on nomme dépense hypothétique, est-elle d'accord avec celle qu'on obtient par l'expérience et qu'on nomme dépense effective ? on peut prévoir déjà que ces deux dépenses doivent différer entre elles en examinant les hypothèses sur lesquelles reposent nos calculs. Dans ces calculs, on suppose :

1° Que l'orifice ab est très-petit par rapport aux sections AB d'arrivée du fluide dans le vase, sans quoi les vitesses ne seraient pas les mêmes aux divers points de la veine à la sortie de ab, surtout lorsque cet orifice est pratiqué dans une paroi verticale, et la vitesse d'arrivée v ne serait pas négligeable;

2° Qu'il n'y a dans le vase et au dehors ni obstacles, ni rétrécissement qui gênent l'écoulement, de façon que le mouvement est continu partout ;

3° Qu'il n'y a aucun frottement de l'eau contre les parois du vase; à la vérité, il est toujours très-faible, comme on le verra plus bas, quand la vitesse dans le vase n'est pas très-grande ;

4° Enfin, que le fluide arrive à la surface du vase par filets parallèles amenés d'une même vitesse v, et que les filets sont également animés d'une même vitesse parallèle V à l'orifice.

On remarquera que la dépense effective s'obtient par expérience en recueillant dans un vase l'eau qui s'écoule dans une ou trois minutes, et en divisant cette quantité par le nombre de secondes contenues dans le temps

de l'observation. Mais il est impossible de mesurer directement la vitesse de sortie, parce qu'on ne distingue pas les molécules et qu'elles marchent trop vite. Toutefois, si le vase est uni, s'il n'a pas de rétrécissements ou d'étranglements, s'il est très-grand par rapport à l'aire de l'orifice pratiqué soit au fond soit aux parois verticales, si la paroi de l'orifice a peu d'épaisseur, si le fluide tombe librement dans l'air, alors le fluide ne sera gêné nulle part, et la plupart des conditions précédentes seront remplies. Si donc on prend, dans ces circonstances, pour h, ou pour charge du fluide, la hauteur du niveau supérieur au-dessus du centre de l'orifice, on devra trouver, pour vitesse moyenne V de sortie, la même que celle qui a été trouvée ci-dessus.

108. *Phénomène de la contraction.* — L'expérience prouve néanmoins que les filets fluides ne sortent pas parallèlement de l'orifice; la section de la veine n'est pas partout la même, et elle diminue à partir de l'orifice jusqu'à la distance $a'b'$ comprise entre une demi-fois et une fois sa largeur la plus grande; c'est là ce qu'on nomme *contraction* de la veine. Cette contraction est visiblement due à ce que les filets s'infléchissent ou changent de direction pour arriver de toutes parts de l'intérieur du réservoir à l'orifice; ce qui montre qu'elle ne sera pas la même dans toutes les circonstances. Elle sera moindre si l'intérieur du vase est disposé tellement que la déviation des filets soit faible par rapport à l'axe LM (fig. 472), perpendiculaire à l'orifice. Ainsi, elle devra diminuer si l'orifice ab se rapproche soit de AD soit de BC, ou si les deux faces AD et BC se rapprochent entre elles.

Dans le cas où l'orifice est vertical (fig. 473), la contraction est moins sensible à mesure que le niveau supérieur AB s'approchera de l'orifice, ou que ce dernier ab se rapprochera du fond CD. Elle sera également plus faible, si la paroi de l'orifice, au lieu d'être plane, est convexe au dehors (fig. 474), puisqu'il y aura moins de molécules divisées latéralement; et elle deviendra, au contraire, plus forte, quand la paroi de l'orifice est convexe vers le dedans (fig. 475).

La contraction est rendue la plus forte possible, lorsque l'orifice est reporté vers l'intérieur du vase (fig. 476) par une sorte de tuyau EFGD, parallèle à l'axe de l'orifice et dont la section diffère peu de l'orifice.

Borda, célèbre académicien, a trouvé qu'alors la contraction réduisait la section des filets à moitié de celle de l'orifice; et comme cette section des filets ne peut surpasser l'aire de l'orifice, la valeur du rapport entre ces deux sections est évidemment comprise entre 1 et $\frac{1}{2}$. Prenant grossièrement la moyenne, ou 0,75, cette valeur donnerait, à un huitième près, le rapport de la section contractée à celle de l'orifice.

109. *Multiplicateurs de la dépense à paroi mince.* — L'expérience prouve encore que pour les orifices circulaires, la veine fluide conservera sensiblement la même section à partir de la section contractée; que, si on prolonge l'orifice par un bout de tuyau (fig. 477) ayant la forme de *toute la partie* qui

se contracte ou se rétrécit, et qu'on pousse l'orifice à la dernière section du tuyau, la dépense donnée par le calcul pour ce nouveau vase, égale à très-peu de chose près celle qu'on obtient directement par le jaugeage et qu'on nomme effective. D'où il résulte qu'il suffirait généralement de remplacer l'orifice véritable par l'orifice contracté, ou de multiplier l'aire a du premier par le nombre qui indique la contraction de cette aire et qu'on appelle le *coefficient de la contraction*. D'ailleurs, l'observation des jets d'eau indique que ceux-ci s'élèvent aussi haut et décrivent la même courbe qu'un corps qui s'échapperait de l'orifice avec la vitesse V, due à la pression du réservoir ; on a donc pu admettre que la vitesse dans la section contractée était effectivement celle que donne le calcul. Mais cette conséquence varie dans quelques cas, et ne se soutient pas toujours, parce qu'elle suppose qu'il n'y ait point de force vive ou de travail perdu dans le mouvement du fluide, ou que la vitesse V ne serait jamais susceptible de s'altérer. C'est pourquoi il ne conviendrait pas toujours de multiplier la dépense théorique aV par le rapport ci-dessus, de l'aire contractée à l'aire de l'orifice, et nous appellerons le véritable rapport de la dépense effective à la dépense du calcul aV, *multiplicateur* de cette dépense. Nous le désignerons par la lettre grecque α, de sorte que la véritable dépense sera, en définitive, αaV. Reste à voir quelle est la valeur de α suivant les cas.

A cet égard il a été reconnu, par expérience, que le multiplicateur α reste le même à circonstances semblables, d'ailleurs, soit que l'orifice soit carré, rectangulaire, ou circulaire, ce qui comprend tous les cas de la pratique, pourvu qu'en comparant des orifices rectangulaires à des orifices circulaires, on compare leur plus petite ouverture à celle du diamètre de ceux-ci. α dépend donc principalement de cette plus petite ouverture des orifices rectangulaires, et des diamètres des orifices circulaires, à circonstances égales. Mais, si ces circonstances changent, si notamment la charge du fluide est plus forte ou plus faible, α varie, et il varie aussi selon que l'orifice est plus près ou plus loin des côtés du réservoir ou du fond (3[e] partie, 108).

Cela posé, voici les valeurs de α, ou du multiplicateur de la dépense hypothétique aV, suivant les cas.

TABLEAU des valeurs de α pour les orifices en mince paroi et isolés complètement des faces du réservoir.

CHARGE du fluide sur le centre de la section.	VALEUR DE α RÉPONDANT AUX DIAMÈTRES OU PLUS PETITES OUVERTURES DES ORIFICES CIRCULAIRES.						OBSERVATIONS.
	$0^m,20$	$0^m,10$	$0^m,05$	$0^m,03$	$0^m,02$	$0^m,01$	
m.							Pour les gaz, la charge génératrice est toujours supérieure à 2^m, et on prendra le multiplicateur 0,6, ou 0,61 dans tous les cas. Pour des orifices au-dessus de $0^m,20$ d'ouverture, on prendra la valeur de α comme pour $0^m,20$. Pour les orifices au-dessous de $0^m,01$, on agira comme pour ceux de $0^m,01$. Enfin pour les orifices intermédiaires entre ceux de la table, on prendra des moyennes relatives aux ouvertures et charges voisines immédiatement au-dessus et au-dessous.
0,015						0,700	
0,02				0,627	0,660	0,696	
0,04			0,618	0,632	0,657	0,685	
0,06		0,592	0,620	0,640	0,656	0,677	
0,08		0,602	0,625	0,638	0,655	0,672	
0,10	0,593	0,608	0,630	0,637	0,655	0,667	
0,20	0,596	0,613	0,631	0,634	0,654	0,655	
0,30	0,601	0,617	0,630	0,632	0,644	0.650	
0,50	0,602	0,617	0,628	0,630	0,640	0,644	
1,00	0,605	0,615	0,626	0,628	0,633	0,632	
1,50	0,603	0,612	0,620	0,620	0,621	0,618	
2,00	0,602	0,610	0,615	0,615	0,610	0,610	
10,00	0,600	0,600	0,600	0,600	0,600	0,600	

Ce tableau est déduit des résultats des expériences de M. le capitaine du génie Lesbros, et il s'accorde avec le résultat des expériences faites antérieurement par Bossut, Michelotti et d'autres physiciens habiles; il n'y a de douteux que les résultats qui concernent les très-petits orifices et les très-fortes charges; mais l'incertitude n'est que de 0,001 sur les dernières décimales, et ce cas n'est pas celui de la pratique.

Il arrive souvent que l'orifice est près d'une face du réservoir; la contraction devient alors nulle sur ce côté, et le multiplicateur est rendu un peu plus grand que ne l'indique le tableau. S'il est près de deux faces du réservoir, la contraction est nulle sur deux côtés de l'orifice, et le coefficient augmente encore. Voici comme on tiendra compte de ces circonstances :

Si la contraction est nulle sur un côté seulement, on prendra, au lieu de α donné par la table, ... 1,03α

Si elle est uulle sur deux côtés 1,06α

Si elle est nulle sur trois côtés 1,12α

Il n'arrive point dans la pratique que la contraction soit nulle, surtout le pourtour de l'orifice; ces derniers résultats sont déduits de ceux de M. Bidone; mais ils ont besoin d'être vérifiés en grand.

Enfin, nous terminerons ce paragraphe par une dernière observation :

c'est que tout ce qui précède est seulement applicable toutes les fois que le fluide sort librement du réservoir sans toucher le pourtour des parois ou des bords de cet orifice; car il n'y a pas plus d'obstacles que si la paroi était mince.

110. Ce qui précède est seulement applicable au cas où l'orifice est fermé de toutes parts (fig. 478), et il arrive dans la pratique que quelques orifices rectangulaires n'ont pas de bords supérieurs. L'orifice se nomme alors *épanchoir*, *déversoir*, *réservoir*; il est placé vers le niveau supérieur AB (fig. 479) de l'eau du réservoir. On peut encore ici calculer la dépense, comme dans ce qui précède, pourvu qu'on change le multiplicateur de la formule, selon ce qu'apprend l'expérience pour les cas divers. Soit l la largeur horizontale de cet orifice, et supposons ce dernier rempli jusqu'en B, prolongement du niveau dans le réservoir; nous aurons toujours h comme représentant la hauteur de AB sur le centre ou milieu I de BC; mais H représentera la hauteur totale de B ou A au-dessus du seuil C, de sorte que $h = \frac{1}{2}\text{H}$. La vitesse moyenne étant V, on aura

$$\text{V}^2 = 2gh = 2g\,\frac{\text{H}}{2} = \frac{1}{2}\,(2g\text{H}),$$

et, par suite, $\text{V} = 0{,}707 \,.\, \sqrt{2g\text{H}}.$

La dépense théorique ou hypothétique sera

$$l \times \text{H} \times \text{V} = 0{,}71 \,.\, l \,.\, \text{H} \,.\, \sqrt{2g\text{H}}.$$

Quant à $\sqrt{2g\text{H}}$, on en trouvera à l'ordinaire les valeurs dans les tables. Mais la dépense ainsi obtenue est trop forte, et il conviendra de la multiplier par un coefficient qui est environ 0,57 pour les cas ordinaires de la pratique, c'est-à-dire que la véritable dépense est donnée par la formule

$$0{,}405 \,.\, l \,.\, \text{H} \,.\, \sqrt{2g\text{H}};$$

H étant la charge totale au-dessus du seuil.

Les expériences connues de Dubuat, Bidone, Eytelwein, et celles de M. Lesbros, ont appris que la valeur du coefficient 0,405 doit être réduite à 0,39 environ pour H plus grand ou égal à $0^{m},20$, et qu'elle s'élève à 0,415 pour H très-petit ou de 1 à 2 centimètres, mais qu'elle demeure sensiblement la même, quelle que soit la contraction totale ou la position de l'orifice par rapport aux côtés verticaux du réservoir, pourvu qu'on mesure la hauteur H du niveau dans le réservoir au-dessus de la base ou du seuil C de l'orifice, en un point A assez éloigné de B ou C pour que le fluide y ait peu de vitesse ; cette distance est environ une à deux fois la largeur de l'orifice, lorsque cette largeur est très-petite par rapport à celle du réservoir, et deux à trois fois si elle lui est égale.

Quand le fond C est au niveau du fond du réservoir, la vitesse est partout sensible, et la formule ci-dessus donnerait trop peu ; peut-être que, dans ce

cas, la valeur du coefficient s'élèverait à 0,45. Elle donnera, au contraire, trop, quand l'orifice sera prolongé par un bout de canal ou coursier qui aurait peu de pente et où il occasionnerait des remous par suite de la résistance du canal. Ces cas se présentent trop rarement dans la pratique, pour nous en occuper.

Nos raisonnements ci-dessus supposent que l'orifice est plein jusqu'au niveau général dans le réservoir. Le fait est que l'eau se déprime un peu en arrière de l'orifice à partir de B (fig. 480), et que sa surface suit une courbe dans le genre de la trajectoire parabolique. Ainsi, l'orifice n'est pas rempli sur toute la hauteur H. L'expérience prouve que le rapport de H à l'épaisseur moyenne CK de la tranche à l'orifice demeure compris entre 1 et 1,40 (1 étant relatif aux fortes valeurs de H, et 1,40 aux petites valeurs de 1 à 2 centimètres), de sorte que, moyennement,

$$H = 1{,}25 . CK, \quad \text{ou} \quad CK = 0.80 . H = \frac{4}{5} H.$$

Néanmoins, on prendra toujours H en amont de l'orifice dans la formule ci-dessus, parce que le coefficient 0,405 corrige l'erreur commise en supposant l'orifice plein jusqu'en AB prolongé.

Si on considère CK comme véritable orifice et qu'on prenne pour charge de vitesse la hauteur de H au-dessus du centre de CK, la dépense théorique sera

$$l . CK . \sqrt{2g \left(H - \frac{1}{2} CK\right)};$$

mais il faudrait multiplier par 0,58 pour $H = 20$ à 30 centimètres, par 0,60 pour $H = 10$ cent., par 0,63 pour $H = 5$ cent., et par 0,70 pour $H = 1$ centimètre (ce qui est à peu près conforme au tableau du n° 109. Cependant la règle qui a été donnée au préalable est plus facile à retenir.

111. *Dépense par une paroi épaisse, ou par un tuyau de très-petite longueur.* — Toute la théorie exposée jusqu'ici est seulement relative au cas où l'orifice par lequel le fluide s'échappe est mince, ou à celui où le fluide sort librement, sans toucher les parois de l'orifice; en un mot il faut que la paroi ait une épaisseur qui ne dépasse pas une fois à une fois et demie la plus petite dimension de l'ouverture. Voyons maintenant ce qui arrive quand l'orifice est pratiqué en parois planes très-épaisses, ou qu'il est prolongé par un bout de tuyau prismatique ou cylindrique (fig. 481) d'une longueur égale à deux ou trois fois cette plus petite dimension de l'ouverture. Les circonstances seront d'ailleurs supposées les mêmes, si ce n'est que l'eau est censée toucher exactement les bords ou côtés du conduit dans tout son pourtour intérieur; c'est ce qu'on nomme *écoulement à gueule bée*. Les filets extérieurs suivent ici une marche parallèle. Les expériences n'ont été faites que pour les orifices de 1 à 20 centimètres sous de très-fortes charges; elles

ont donné, moyennement, pour multiplicateur de la dépense, 0,815, pour des circonstances identiques à celles où, l'orifice étant en minces parois, on obtient $\alpha = 0,619$. Nous verrons plus loin (3e partie, 115) comment on peut trouver la valeur du multiplicateur pour les cas où α serait différent.

Supposons que le tuyau soit une *buse* ou tuyau additionnel conique ou pyramidal. Si $a'b'$ (fig. 482) est semblable à l'orifice ab, que ses côtés soient les 0,8 ou les $\frac{4}{5}$ de ceux de ab, et que ces deux sections soient distantes entre elles d'une à deux fois la largeur ab, on prend $a'b'$ pour orifice dans le calcul de la dépense, et le multiplicateur 0,82, qui s'applique entièrement à la vitesse dans le cas des tuyaux cylindriques, s'élève ici à 0,95. Quand la forme de la buse diffère plus de la précédente, laquelle est à peu près celle de la veine contractée, le multiplicateur devient 0,90.

Le phénomène de l'écoulement à plein tuyau (fig. 483) est dû à ce que le fluide, après s'être contracté, se dilate, et rencontre les parois. On explique l'augmentation de la dépense en ce que les filets sortent parallèlement aux parois du tuyau, ou remplissent sa section. Mais la vitesse est réellement moindre que la vitesse théorique V; elle en est les 0,812 dans le cas ci-dessus des tuyaux ou buses cylindriques, et les 0,9 pour les buses coniques. La force vive acquise par l'eau à sa sortie du tuyau est simplement proportionnelle à $(0,812)^2V^2$ ou à $\frac{2}{3}V^2$ pour les uns, et à $(0,9)^2V^2$ ou à $0,81 \cdot V^2$ pour les autres. La perte de la force vive ou du travail de la gravité, ou le déchet dans la chute h, est par conséquent d'un tiers pour les tuyaux cylindriques et d'un cinquième pour les tuyaux coniques. De telles dispositions sont évidemment vicieuses, puisque la force vive est rendue moindre que celle qui est due à la chute ou que deux fois le produit de la dépense multipliée par h. Ce résultat, en apparence contraire aux principes ci-devant, est justifié en ce que la résistance le long du tuyau additionnel, et le choc des molécules qui affluent du réservoir contre l'eau en avant de la section contractée font perdre une partie du travail moteur. Nous montrerons plus loin (3e partie, 115) comment on peut mesurer ces pertes. La même raison fait qu'à mesure que le tuyau s'allonge, la vitesse de sortie V diminue; car les résistances de ce tuyau augmentent.

112. *Dépense par un canal découvert de très-petite longueur.* — Souvent il arrive que l'ouverture d'un orifice est prolongée du côté d'aval par des canaux additionnels découverts, nommés *coursiers*. L'orifice rectangulaire par lequel l'eau se rend dans un tel canal, est fermé ou ouvert au moyen d'une vanne dont l'épaisseur est toujours fort petite. Ici la contraction s'opère complétement comme pour un orifice en mince paroi, l'eau est libre à sa surface supérieure quand elle est sortie. Le calcul s'établit comme si le canal n'existait pas ou était enlevé, et que le fluide tombât librement dans l'air (fig. 484), pourvu cependant que la pente du canal soit assez forte pour

laisser échapper librement le fluide à mesure qu'il s'écoule, ou que ce canal soit très-court.

Quand des obstacles s'opposent an libre éconlement dans le coursier, l'eau gonfle en avant de l'orifice, ou forme ce qu'on appelle un *remous* (fig. 485), qui souvent s'étend jusque près de l'orifice et couvre la veine contractée. La contraction n'est plus alors apparente, et il s'établit une pression extérieure contre l'orifice. La vitesse et la dépense sont à la fois altérées. Conformément à ce qui a été dit plus hant, il faudra dans le calcnl de V diminuer h de la charge moyenne immédiatement en avant de l'orifice, c'est-à-dire prendre

$$V = \sqrt{2g\,(h - h')}.$$

h' est la hauteur du remous au-dessus du centre de l'orifice de la vanne qni laisse passer l'eau dans le coursier; $h - h'$ est la différence du niveau supérieur au-dessus de la surface d'eau qui couvre la veine; pnis on corrigera la dépense calculée en la mnltipliant par le coefficient pris dans la table du nº 109.

Dans tous les cas, la veine venant choqner le fluide au delà de la section contractée, c'est-à-dire à deux ou trois fois la largeur horizontale de l'orifice, la vitesse est altérée à l'endroit où elle choque le canal, et, comme pour les tuyaux fermés, elle est réduite à environ 0,82 de ce qn'indique le calcul. On l'obtient directement en chaque endroit, en prenant le profil de la surface du fluide par des ordonnées rapportées à une horizontale supérieure, en calculant l'aire de la section d'eau, et en divisant par cette aire la dépense calculée : ce dernier quotient donnera précisément la vitesse moyenne de l'eau en cet endroit.

XV.

ÉCOULEMENT DES FLUIDES PAR DES TUYAUX DE CONDUITE ET CANAUX DÉCOUVERTS.

113. *Perte de force vive d'un fluide tombant dans un vase en repos ou qui marche dans la direction du mouvement du fluide.* — Jusqu'ici nous avons principalement étudié le cas où le fluide s'écoule sans obstacle par un orifice pratiqué à la paroi mince d'un vase, ou dont l'épaisseur n'est pas telle que le fluide rejoigne ou rencontre les parois de manière à être forcé de couler à plein tuyau ou à gueule bée. Nous avons aussi indiqué ce qni arrive quand le contraire a lieu et que le tuyau est fort court : la vitesse au sortir du tuyau a diminué par les chocs et par les frottements; cette dernière cause, peu influente pour une petite longueur de tnyau, amène une modification d'autant plus sensible que le tuyau est plus long.

On a cherché à évaluer ces influences et à en tenir compte ; voici à quoi on est parvenu pour estimer les pertes de travail ou de force vive occasionnées par le choc et par les résistances qu'éprouve le fluide :

Soit ABDC (fig. 486) un vase rempli de liquide jusqu'en AB. Imaginez qu'un filet fluide KL, animé d'une vitesse V en L ou en AB, parvienne dans ce vase supposé au repos. Le fluide, ne pouvant s'échapper du vase, tourbillonne dans son intérieur, et, en vertu du frottement et du choc des molécules, il sera lui-même, comme le vase, bientôt réduit au repos. Si $M = \frac{Q}{g}$ est la masse du fluide qui arrive dans un certain temps, dans l'unité de temps, par exemple, MV^2 exprimera la force vive que le filet aura perdue pendant ce temps.

Supposons maintenant que le vase, au lieu d'être immobile, fuie devant la gerbe d'eau avec une vitesse V' et dans la direction de V, la gerbe affluente atteindra le vase avec une vitesse relative $V - V'$, c'est-à-dire que ses molécules y entreront avec la vitesse $V - V'$, et perdront cet excès de leur vitesse par les tourbillonnements et les chocs ; par conséquent, la force vive $M(V - V')^2$ sera perdue dans l'unité de temps et employée tout entière à vaincre les résistances α.

On suppose ici que le vase chemine dans la direction des filets ; c'est le cas pratique de presque toutes les applications. Cependant, on aurait pu le déduire immédiatement de ce qui a été dit, dans le Cours de la 1re année (161 et suivants), sur le choc de deux masses m et m' animées de vitesses dirigées dans le même sens est égale à V et V' ; on a vu que la perte de force vive résultant du choc était égale à $\frac{mm'}{m + m'}(V - V')^2$. Seulement ici la masse choquante m de fluide, qui tombe dans chaque petit temps sur la masse totale m' du fluide contenu dans le vase, est très-petite par rapport à m' ; de sorte que l'expression précédente, qui peut se mettre sous cette autre forme $m \frac{(V - V')^2}{1 + \frac{m}{m'}}$, se réduit, en définitive, à $m(V - V')^2$, et, par suite, à $M(V - V')^2$ pour la perte pendant l'unité de temps.

114. *Perte de force vive due aux étranglements.* — On concevra actuellement sans peine comment il est possible d'avoir égard à des pertes analogues dans le mouvement général des fluides. Supposons que ABCD (fig. 487) soit un vase renfermant un liquide dont AB est le niveau, *ab* l'orifice de sortie, et que ce vase soit en outre traversé en A'B' par une paroi solide ou diaphragme, percé aussi d'un orifice *a'b'* dont l'aire est *a'*, celle de *ab* étant *a*. Le fluide, obligé de passer par *a'b'*, se contracte ; puis il vient choquer les molécules en avant et perd de sa force vive une portion mesurée par l'excès de sa vitesse sur celle que reprennent les molécules un peu plus

loin. Si ab est assez distant de $a'b'$ pour que les tonrbillonnements soient éteints en A″B″, par exemple, on pour que les filets marchent parallèlement et avec la même vitesse en A″B″, comme cela a lieu en AB et aux sections contractées de ab et de $a'b'$, il sera facile de calculer les vitesses en ces différents endroits au moyen de l'une d'entre elles. Nous négligerons d'ailleurs encore la force vive du fluide en AB.

Soit V la vitesse inconnue du fluide à la section contractée de l'orifice ab, V′ celle qui correspond à la section contractée de $a'b'$, et V″ la vitesse du fluide à la section A″ B″ du vase, m la valeur du multiplicateur de la dépense en ab, m' le multiplicateur de la dépense en $a'b'$, multiplicateurs qui sont donnés par la table du nº 109; la dépense en ab sera égale à maV. Mais il doit passer la même quantité de fluide par la tranche A″B″ et par la section contractée de $a'b'$. Le fluide qui passe en A″B″ sera mesuré par

$$\text{surf. } A''B'' \times V'' = AV''.$$

La dépense en $a'b'$ vaudra $m'a'V'$. Donc, on anra

$$maV = AV'', \text{ et, par suite, } V'' = \frac{maV}{A}.$$

De même,
$$maV = m'a'V', \text{ou } V' = \frac{ma}{m'a'} V.$$

La vitesse relative avec laquelle le fluide qui sort de $a'b'$ vient choquer celui de A″B″ est donc

$$V' - V'' = \frac{maV}{A} - \frac{maV}{m'a'} = ma\left(\frac{1}{A} - \frac{1}{m'a'}\right)V.$$

La perte de force vive qui se fait au delà de a' est donc la masse $\frac{q}{g}$ du fluide écoulé dans le petit instant que l'on considère multiplié par $(V' - V'')^2$, ou par $m^2a^2\left(\frac{1}{A} - \frac{1}{m'a'}\right)^2 V^2$. Si on nomme K la quantité $m^2a^2\left(\frac{1}{A} - \frac{1}{m'a'}\right)^2$, facile à calculer, la perte de force vive en question sera $\frac{q}{g}.K.V^2$, qui correspond à un travail perdu représenté par $\frac{1}{2}\frac{q}{g}.K.V^2$. Le travail de la gravité qh, produit pendant la durée du petit temps, est donc diminué de cette dernière quantité de travail. Mais la force vive acquise pendant ce même petit temps est $\frac{q}{g}V^2$. On aura, par conséquent,

$$\frac{q}{g}V^2 = 2qh - 2.\frac{1}{2}.\frac{q}{g}.K.V^2.$$

Divisant par q et multipliant par g tous les termes de cette égalité, et réunissant dans nn même membre tous les termes qui contiennent V^2, on tronve

$$V^2(1+K) = 2gh, \quad \text{ou} \quad V = \sqrt{\frac{2gh}{1+K}}.$$

On voit que la vitesse est ici moindre qne $\sqrt{2gh}$, ou que celle qui est due

à la charge, et qu'ainsi elle est diminuée par l'étranglement intérieur $a'b'$.

115. *Perte de force vive dans les tuyaux de petite longueur.* — Appliquons ce calcul aux tuyaux additionnels coulant à gueule bée. Ici l'étranglement provient de la contraction intérieure dans le tuyau, s'il n'y a pas d'obstacles dans le réservoir, comme on le suppose. Le fluide, après s'être contracté en m (fig. 488), se dilate en $a'b'$. Soit V la vitesse moyenne effective en $a'b'$, dont l'aire est égale à a. Les filets sortant parallèles par l'orifice extérieur a, la dépense est

$$V \times a'b' = aV.$$

Quant à la vitesse V' dans la section contractée m, elle peut se trouver, en observant que si a' est l'aire de l'orifice intérieur ab, et m le coefficient de contraction relatif à cet orifice, la dépense est encore $ma'V'$. D'où

$$aV = ma'V', \quad \text{ou} \quad V' = \frac{a}{ma'}V.$$

La perte de force vive est

$$\frac{q}{g}(V'-V)^2, \quad \text{ou} \quad \frac{q}{g}V^2\left(\frac{a}{ma'}-1\right)^2.$$

Telle serait la manière de procéder si les orifices ab et $a'b'$ étaient réellement inégaux; mais, dans le cas d'un tuyau additionnel cylindrique, on a $a = a'$, de sorte que la perte de force vive devient $\frac{q}{g}\left(\frac{1}{m}-1\right)^2 V^2$. Faisant $K = \left(\frac{1}{m}-1\right)^2$, on arrive encore à la formule

$$V = \sqrt{\frac{2gh}{1+K}}.$$

Ordinairement, lorsque la contraction est complète en m et pour des charges un peu fortes de 1 à 2 mètres, on a $m = 0,62$; d'où

$$\frac{1}{m} - 1 = 1,3757. \quad \frac{1}{\sqrt{1+K}} = 0,85,$$

et

$$V = 0,85.\sqrt{2gh}.$$

L'expérience a donné dans le fait le multiplicateur 0,82; mais cela peut tenir à ce que nous n'avons pas tenu compte du frottement du fluide le long du tuyau, lequel diminue encore le travail qh de la gravité.

Avec la formule ci-dessus, on pourra donc calculer la vitesse dans les petits tuyaux, puis la dépense.

Si le réservoir portait un diaphragme comme ci-dessus, percé d'un orifice mince, on agirait en outre comme plus haut. Enfin, si le diaphragme était très-épais, de manière à former un tuyau d'une longueur d'une à deux fois le diamètre, il faudrait calculer en conséquence la vitesse au sortir de ce tuyau, qui serait moindre que dans le cas ci-dessus.

116. *Dépenses des liquides ou fluides qui s'écoulent par un tuyau d'une longueur quelconque.* — Les résistances du frottement sont nuisibles quand la vitesse dans le tuyau est forte et quand la surface mouillée par le liquide l'est aussi. Soit donc *aba'b'* (fig. 489) un tuyau de grosseur uniforme, joignant deux vases remplis de liquide jusqu'en A'B' et AB, H la différence totale entre ces niveaux, ou la charge génératrice, *a* l'aire du tuyau, ou des orifices, L la longueur développée du tuyau, C le contour ou périmètre de la section uniforme du tuyau, V la vitesse constante dans ce dernier. Les expériences connues, et les calculs de Coulomb, de Mest, Girard, Prony, Eytelwein et Navier, ont appris que la perte de travail occasionnée par le frottement ou la résistance d'un tuyau est proportionnelle dans le très-petit temps pendant lequel s'écoule le poids *q* du liquide, à

$$\frac{q}{g} \times \frac{L \times C \times V^2}{a};$$

ce travail est une certaine fraction *n* de ce produit; en un mot, il est représenté par

$$n \cdot \frac{q}{g} \cdot \frac{L \times C \times V^2}{a}.$$

Si donc il n'y a pas d'étranglements, de coudes brusques qui occasionnent des chocs, les résistances se réduiront à celle dont il s'agit et à la perte de force vive qui a lieu après la contraction en *ab*. On aura donc, en considérant *a'b'* comme orifice de sortie,

$$\frac{q}{g} V^2 = 2qH - 2\frac{q}{g} \cdot K \cdot \frac{V^2}{2} - 2n \cdot \frac{q}{g} \cdot \frac{L \cdot C \cdot V^2}{a},$$

ou

$$V^2 = 2gH - K \cdot V^2 - \frac{2nLC \cdot V^2}{a},$$

ou

$$V^2 \left(1 + K + \frac{2nLC}{a}\right) = 2gH.$$

De là on tire aisément V, puis la dépense *a*V, quand on connaîtra *n* et la valeur 1+K, qui, calculée comme précédemment, est environ 1,515. Quant à *n*, les expériences apprennent qu'il est 0,0035 pour l'eau, et 0,00324 pour l'air et les gaz. On remarquera que s'il s'agit de l'écoulement de ces derniers, on doit remplacer (3[e] partie, 105 et 106) la charge génératrice H par $\frac{p - p'}{\pi}$, lorsque les pressions extérieure et intérieure ne diffèrent pas entre elles d'un dixième, ou par $\frac{T}{\pi}$ si cette différence est plus grande (T est le travail de la dilatation du gaz sous l'unité de volume primitif en passant de la pression *p* à la pression *p'*.)

Soit D le diamètre du tuyau π D sera le contour C de la section transversale, et $\frac{\pi D^2}{4}$ son aire *a*; en sorte que

$$\frac{C}{a}=\frac{4\pi D}{\pi D^2}=\frac{4}{D}.$$

Si maintenant, dans la valeur de V, on fait ces diverses substitutions, on trouvera,

pour l'eau, $$V=26{,}44.\sqrt{\frac{DH}{L+54.D}},$$

et, pour l'air, $$V=27{,}48.\sqrt{\frac{DH}{L+58{,}3.D}}.$$

On pourra même adopter la première formule pour l'air et les gaz, parce que n est très-peu différent, pourvu toutefois qu'à l'égard de ces derniers on remplace H comme on vient de le dire.

Enfin, si l'orifice de sortie $a'b'$ (fig. 490) est plus petit que la section a du tuyau, V étant la vitesse intérieure de ce tuyau, aV n'en serait pas moins la dépense. Si on appelle V′ la vitesse de sortie, a' l'aire de $a'b'$ et m' son coefficient de contraction, on aura

$$aV=m'a'V', \quad \text{ou} \quad V'=\frac{aV}{m'a'}.$$

La force vive acquise par le fluide serait donc

$$\frac{q}{g}.V'^2=\frac{q}{g}.\frac{a^2}{m'^2a'^2}\times V^2,$$

au lieu de $\frac{q}{g}\times V^2$. Il faudra donc, dans l'égalité précédente, remplacer l'unité par $\frac{a^2}{m'^2a'^2}$, et elle deviendrait

$$V^2\left(\frac{a^2}{m'^2a'^2}+K+\frac{2nLC}{a}\right)=2gH.$$

Lorsque a' est très-petit par rapport à a, on fera $m'=0{,}60$. Si cet orifice est peu différent de a, ou si a est terminé par une buse ou tuyau additionnel (fig. 491), le coefficient m' variera de 0,82 à 0,96, comme il a été dit (3e partie, 111).

Application. — Les eaux qui arrivent de Scy à Metz, pour alimenter les fontaines de cette ville, sont conduites par des tuyaux de 3000 mètres environ de longueur et de 0m,08 de diamètre; la hauteur du niveau du réservoir supérieur au-dessus du bassin de distribution dans la ville est supposée de 20 mètres. Cherchons la quantité d'eau fournie dans vingt-quatre heures. A cet effet, dans la formule

$$V=26{,}44.\sqrt{\frac{DH}{L+54.D}},$$

nous poserons $H=20^m$, $L=3000^m$, $D=0{,}08$; ce qui donne

$$V=26{,}44.\sqrt{\frac{0{,}08.20}{3000+54.0{,}08}}=26{,}44.\sqrt{\frac{1{,}60}{3004{,}32}}$$

$= 26,44 . \sqrt{0,000532} = 26,44 \times 0,023 = 0^{m},608.$

Telle est la vitesse de l'eau dans le tuyau de conduite. L'aire de la section de ce dernier est déterminée par

$$\frac{\pi . (0,08)^2}{4} = \frac{3,14 . (0,08)^2}{4} = 0^{m car},005024.$$

Le volume de la dépense par seconde sera, par conséquent, 0,608 . 0,005 $= 0^{m cub},00,304$. Dans vingt-quatre heures il y a 86400″; ainsi la quantité d'eau fournie en vingt-quatre heures sera environ $0^{m cub},00304 \times 86400$, ou $262^{m cub},656$.

XVI.

PRESSION EXERCÉE PAR LES FLUIDES EN MOUVEMENT CONTRE LES PAROIS DES VASES QUI LES CONTIENNENT.

117. *Mesure de la pression pour un vase de forme quelconque.* — Nous avons jusqu'ici uniquement recherché la vitesse d'écoulement et la dépense d'un fluide à la sortie des réservoirs ou des tuyaux de conduite. Il n'est pas moins intéressant, dans certains cas, de savoir déterminer la pression que les fluides exercent aux différents points d'un vase, afin de proportionner l'épaisseur des parois qui les contiennent à cette pression. Or, ce calcul est très-facile, comme on va le voir, pour toutes les sections où il est permis d'admettre que le fluide se meut par filets parallèles et avec la même vitesse dans tous les points de la section.

Soit ABEFGHCD (fig. 492) un vase de forme quelconque, contenant un fluide en mouvement qui s'écoule par un orifice inférieur *ab*, après avoir circulé dans le tuyau EHGF. Nous avons vu précédemment comment on pouvait calculer la vitesse et la dépense qui se fait en *ab* par chaque seconde. Nous nommerons V cette vitesse dans la section contractée de *ab*, donnée par les formules, *a* l'aire de l'orifice de sortie, *m* le coefficient de la dépense, relatif à la contraction à la sortie, de sorte que la dépense véritable sera $m . a . V$. Cela posé, soit *cd* une section plane quelconque du vase, mais dans laquelle on suppose que les filets fluides se meuvent parallèlement entre eux et à la paroi de l'enveloppe, laquelle sera à peu près cylindrique sur une certaine étendue. Appelons *b* l'aire de cette section quelconque *cd*, et *v* la vitesse moyenne du fluide qui y passe, et commune à tous les filets. Le produit $b . v$ sera aussi égal à la dépense maV, de sorte que $v = \frac{m . a . V}{b}$. Soit également *p* la pression moyenne sur l'unité de surface de la section *cd*, et remarquons que la pression effective sur le

contour de cd sera un peu plus petite pour la position supérieure c, un peu plus grande pour la position inférieure d, si la section cd n'est pas horizontale, attendu que la charge totale du fluide au-dessus de d, comptée du niveau supérieur AB du réservoir, est un peu plus forte pour d que pour c; mais nous négligerons la différence de niveau entre ces points dans la supposition qu'elle est très-petite par rapport à la charge totale qui leur correspond. Nous nommerons pareillement p' la pression pour l'unité de surface, exercée extérieurement et en sens contraire sur les tranches ab qui sortent par l'orifice. Enfin, nous désignerons par h' la hauteur du centre de gravité de la tranche infiniment mince $cdc'd'$ au-dessus du centre de l'orifice ab, ou, plus exactement, au-dessus de sa section contractée, et, pour abréger, nous désignerons par q le poids de fluide écoulé à la fois par ab et par cd dans le petit instant où les molécules de cd arrivent en $c'd'$, et celles de ab en $a'b'$.

π étant la densité ou le poids de l'unité de volume du fluide dans l'intérieur du réservoir, $\frac{q}{g}$ sera la masse correspondante, et on aura

$$q = \pi \times \text{volume } cdc'd' = \pi \times b \times \overline{cc'};$$

d'où

$$b \cdot \overline{cc'} = \frac{q}{\pi}.$$

Raisonnant d'ailleurs comme au n° 103, et considérant ce qui se passe dans l'intervalle de fluide compris entre cd et ab, on trouvera que la force vive acquise par cette portion de fluide est $\frac{q}{g}V^2 - \frac{q}{g}v^2$; que le travail développé dans le sens du mouvement sur cd ou b par la pression bp est

$$b . p \times \overline{cc'} = p \times \frac{q}{\pi};$$

que celui qui est développé en sens contraire par la pression extérieure ap' sera

$$p' . a \times \overline{bb'} = p' \times \frac{q}{\pi},$$

et qu'enfin le travail développé par la gravité sur tout le fluide compris entre cd et ab sera $q \cdot h'$. On aura ainsi, par le principe des forces vives, l'égalité

$$\frac{q}{g}V^2 - \frac{q}{g}v^2 = 2p \times \frac{q}{\pi} - 2p' \times \frac{q}{\pi} + 2qh',$$

et divisant par $2q$,

$$\frac{V^2}{2g} - \frac{v^2}{2g} = \frac{p}{\pi} - \frac{p'}{\pi} + h'.$$

Donc

$$\frac{p}{\pi} = \frac{V^2}{2g} - \frac{v^2}{2g} + \frac{p'}{\pi} + h'.$$

Remarquez maintenant que $\frac{V^2}{2g}$ est la hauteur due à la vitesse de sortie de l'orifice *ab*, qui est censée avoir été calculée par nos formules précédentes; $\frac{v^2}{2g}$ est la hauteur due à la vitesse dans la section considérée *cd* du vase, et qu'on sait aussi calculer, puisqu'on a $v = \frac{m.a.V}{b}$. Enfin $\frac{p}{\pi}$ et $\frac{p'}{\pi}$, d'après les principes d'hydrostatique, représentent les hauteurs de colonnes verticales du fluide sous la densité intérieure π, qui produiraient par leurs poids les pressions p et p' sur l'unité de surface, ou, si l'on veut, ce sont les hauteurs de pression correspondantes. La dernière égalité signifie, par conséquent, que « *la hauteur moyenne de pression du fluide sur la section* cd, « *que l'on considère, est égale à la hauteur due à la vitesse de sortie, plus la* « *hauteur de pression exercée à l'extérieur de l'orifice, diminuée de la hauteur* « *due à la vitesse dans cette même section* cd *et de la hauteur de son centre de* « *gravité au-dessus du centre de l'orifice.* »

Telle serait aussi la charge génératrice en vertu de laquelle le fluide s'écoulerait par un très-petit orifice pratiqué en *cd*. Mais il faut que cet orifice soit très-petit, pour que la dépense et la vitesse par l'autre orifice *ab* ne soient pas sensiblement altérées. S'il en était autrement, on aurait recours au principe des forces vives pour évaluer chacun des écoulements simultanés et chaque vitesse de sortie en particulier.

118. *Mesure de la pression quand le vase est très-grand par rapport à l'orifice.* — Lorsque le fluide, avant d'arriver à l'orifice *ab* (fig. 493), n'éprouve aucune résistance quelconque, aucun choc, et que de plus la section supérieure et d'arrivée AB du fluide dans le vase est très-grande relativement à l'orifice *ab* ou *a*, nous savons que la vitesse V de sortie est due à la charge totale H de fluide sur *ab*, de sorte que $\frac{V^2}{2g} = H$. Par conséquent, on aura, pour la pression autour de la section *cd*,

$$\frac{p}{\pi} = H - h' + \frac{p'}{\pi} - \frac{v^2}{2g}.$$

$H - h'$ étant ici la charge de fluide au-dessus de la section *cd*, on en conclut que « *la hauteur de pression sur une section* cd *d'un pareil vase* » *est mesurée par la charge du fluide au-dessus de cette section, plus la hau-* » *teur de pression exercée à l'extérieur de l'orifice de sortie, diminuée de la hau-* » *teur due à la vitesse qui a lieu dans cette section.* »

119. *Diversité des pressions dans un tuyau.* — Soit *cd* (fig. 494) une section transversale quelconque d'un tuyau par lequel s'écoule un fluide. Imaginez qu'en cet endroit on insère la branche recourbée *yt'* d'un tube vertical *tu*, ouvert par les deux bouts, et que la pression exercée sur le

sommet ouvert u soit égale à p' qui sera la pression atmosphérique, comme cela a lieu contre l'orifice de sortie du tuyau d'écoulement. Le fluide s'élèvera dans le tube vertical tu à une hauteur tz, telle que $\frac{p'}{\pi}+tz$ sera égal à la hauteur de pression intérieure correspondante à la section cd ou à $\frac{p}{\pi}$. Donc, on aura

$$tz=\frac{p}{\pi}-\frac{p'}{\pi}=\frac{V^2}{2g}-\frac{v^2}{2g}-h'.$$

S'il se trouvait que l'aire de la section cd ou b fût telle que $\frac{V^2}{2g}$ soit simplement égal à $\frac{v^2}{2g}+h'$, la hauteur tz du liquide dans le tube serait nulle. Mais si l'aire de la même section était telle que $\frac{V^2}{2g}$ fut moindre que $\frac{v^2}{2g}+h'$, alors le fluide extérieur tendrait à remonter dans le vase, la hauteur de la pression intérieure $\frac{p}{\pi}$ serait inférieure à celle de la pression extérieure $\frac{p'}{\pi}$. Par conséquent, si on établissait le tube vertical dans la position $y'z't'$, l'extrémité en bas et plongée dans un fluide MN de même densité π, ce dernier remontera dans ce tube au-dessus de son niveau en z', tellement que la hauteur de la pression intérieure $\frac{p}{\pi}$, augmentée de $t'z'$, ferait équilibre à celle de la pression extérieure $\frac{p'}{\pi}$, ou qu'on aurait

$$t'z'=\frac{p'}{\pi}-\frac{p}{\pi}=\frac{v^2}{2g}+h'-\frac{V^2}{2g}.$$

Si, d'ailleurs, la hauteur $t'z'$ était plus grande que la hauteur de x' au-dessus du niveau mn du vase inférieur, le fluide de ce dernier serait en quelque sorte aspiré, et monterait continuellement avec une vitesse due à la différence $t'z'-t'x'$. Cette dernière conséquence n'est, au reste, qu'approximative; car elle suppose que la section cd du tuyau puisse recevoir cet excès de fluide sans augmenter de vitesse, et nécessairement il faut que sa vitesse v et celle de l'orifice V s'augmentent; modifications qui influeront elles-mêmes sur la pression $\frac{p}{\pi}$ et par suite sur la hauteur $t'z'$.

120. *Pression dans les tuyaux cylindriques additionnels.* — Toutes ces circonstances se présentent dans le tuyau cylindrique additionnel horizontal (fig. 495). Ici h' est nul; d'où

$$\frac{p}{\pi}-\frac{p'}{\pi}=\frac{V^2}{2g}-\frac{v^2}{2g}.$$

Supposons qu'il s'agisse de la section contractée, et que vers cet endroit on insère le tube vertical $x't'$ plongé dans un fluide inférieur. Je dis que ce fluide est susceptible d'être élevé ou aspiré par la veine, ou que la hauteur de pression intérieure $\frac{p}{\pi}$ est moindre que la hauteur de pression extérieure $\frac{p'}{\pi}$. Car V étant la vitesse dans le tuyau cylindrique plein, et a étant sa section, et m' le coefficient de la contraction ; $m'a$ sera la section contractée, et si v est la vitesse de cette dernière section, on aura

$$m'av = a\text{V}, \text{ ou } v = \frac{\text{V}}{m'}.$$

Mais, comme m' est fractionnaire, on voit que v est plus grand que V, et, par suite, $\frac{v^2}{2g} > \frac{\text{V}^2}{2g}$. Ainsi $\frac{p'}{\pi}$ l'emporte sur $\frac{p}{\pi}$. Cette théorie, donnée par M. Navier, est confirmée par les expériences de Venturi. Si nous considérons une section cd au delà de la section contractée, on a $b = a$, $v = \text{V}$, $h' = 0$, et, par conséquent, $\frac{p}{\pi} = \frac{p'}{\pi}$. Ainsi, le fluide inférieur ne montera plus quand le tube vertical xt' sera inséré à la section cd.

121. *Pression dans les canaux découverts.* — Si dans un tuyau fermé où la section est constante ainsi que la vitesse, la pression est la même partout et égale à la pression atmosphérique, on conçoit qu'il doit en être de même dans un canal découvert où le mouvement est uniforme. La pression serait égale partout à la pression atmosphérique; mais, comme dans ce qui précède, nous avons fait abstraction de la hauteur du fluide dans chaque section, on voit que dans un canal découvert *à régime réglé*, la hauteur de pression en chaque point se mesure par la pression atmosphérique augmentée de la charge de fluide correspondante, ou de la distance verticale du centre de gravité de cette section au point le plus élevé de cette même section.

122. *Observation générale sur les pressions d'un fluide.* — Tous les principes exposés sur les pressions sont applicables aux fluides élastiques comme aux liquides, si la pression intérieure surpasse peu la pression extérieure ou d'un deuxième environ. Lorsque cet excès sera devenu plus grand, on raisonnera sur la portion de fluide élastique comprise entre l'orifice et la section pour laquelle on cherche la pression, absolument de la même manière qu'on en a agi au n° 105.

XVII.

ÉCOULEMENT DE L'EAU PAR LES CANAUX DÉCOUVERTS.

123. *Mouvement de l'eau dans les canaux découverts, à pente uniforme et de grande longueur.* — Les canaux découverts par lesquels les eaux sont conduites, ont un profil en forme de trapèze ou de rectangle (fig. 496); et leur fond, horizontal dans le sens de la largeur, a, dans le sens de la longueur, une pente qu'on rend autant que possible uniforme. Il faut distinguer deux cas: tantôt un canal a une très-grande longueur et peu de pente; la vitesse y devient uniforme, de façon que les sections d'eau sont les mêmes dans tous les points du canal; c'est ce qu'on nomme *régime réglé*. Tantôt le canal a une faible longueur, comme il arrive dans les coursiers des usines; le régime varie alors d'un point à l'autre; des chocs, des pertes de force vive, des tourbillonnements se manifestent, et il devient difficile de soumettre le mouvement du liquide au calcul. Il faut donc ne pas confondre la circonstance où le canal a une longueur de dix à trente fois sa largeur, avec celle où cette longueur est cent fois la largeur; car, dans cette dernière, le régime est constant, et la vitesse se calcule ainsi qu'il suit:

Soit V la vitesse moyenne et constante dans chaque section, C le contour de la partie mouillée du profil, a l'aire du profil transversal de l'eau, n la fraction qui multiplie la valeur du travail dû à la résistance des bords et du fond, L (fig. 497) la longueur du canal pour une hauteur de pente H, longueur qui se confond sensiblement avec la base, parce que la pente $\frac{1}{10}$ est déjà excessive; enfin $\frac{H}{L}$ est la pente pour un mètre de longueur. Pour une tranche quelconque, l'accroissement de force vive pendant son passage d'une section à l'autre est évidemment nul, puisque la vitesse V reste la même. La quantité de travail qH, imprimée par la gravité, sera, par conséquent, détruite par le travail de la résistance du canal sur la longueur L qui correspond à la hauteur H, et on aura, n° 116,

$$qH = \frac{nq}{g} \cdot \frac{L \times C \times V^2}{a};$$

d'où

$$V = \sqrt{\frac{gHa}{ncL}}.$$

Si on remplace n par sa valeur 0,0035, et g par $9_m,809$, on trouve

$$V = 53,58 \cdot \sqrt{\frac{aH}{LC}}.$$

$\frac{H}{L}$ étant la pente du canal, on voit que cette formule donnera la vitesse

quand la pente est donnée. Réciproquement, si on veut trouver la pente pour une vitesse donnée, on se servira de la formule

$$\frac{H}{L}=\frac{CV^2}{(53,58)^2 a}=0,000348.\ \frac{CV^2}{a}.$$

Il ne faut pas croire que la vitesse soit cependant arbitraire. On connaît évidemment le volume d'eau que ce canal doit conduire par seconde, et si on l'appelle Q, on aura $Q=aV$. De plus, cette vitesse ne saurait dépasser trente centimètres sans corroder le fond et les berges du canal; si, d'ailleurs, elle est réduite à $0^m,20$, l'eau ne serait plus susceptible d'emporter les limons qui surviennent dans les temps de crues, et le canal finirait par s'engorger. La vitesse doit donc être comprise entre 20 et 30 centimètres.

Enfin, une autre raison s'oppose à ce que la vitesse V soit rendue trop grande, c'est que la hauteur H croît avec la vitesse, et comme celle-ci demeure la même en aval comme en amont, la hauteur de chute H, due à la pente du canal, est perdue pour l'usine où les eaux sont amenées. V étant donc ainsi déterminé, on conclut $a=\frac{Q}{V}$, et, par suite, C; donc, enfin, la pente $\frac{H}{L}$ est également arrêtée. Quoiqu'on vienne de dire que, connaissant a, le contour mouillé soit déterminé, cela suppose qu'on se soit donné la largeur du fond et les talus des bermes. Or, le calcul apprend que le rapport le plus favorable est celui pour lequel la largeur moyenne de la section mouillée est double de la profondeur d'eau; cependant, pour ne pas trop approfondir le canal, la largeur s'étend jusqu'à quatre fois.

124. *Moyen de mesurer la vitesse moyenne dans un canal. Jaugeage des eaux courantes.* — Pour mesurer la vitesse moyenne dans un canal, on se sert d'un flotteur ou d'un moulinet. Le flotteur n'est employé que quand la section et la largeur du canal sont constantes sur une grande longueur. Les flotteurs sont des disques de chêne d'un pouce environ, et dont la densité, très-approchante de celle de l'eau, ne les met point en prise aux courants d'air. Après avoir jeté à la surface de l'eau un de ces flotteurs, un peu en amont du point de départ, pour que l'uniformité de sa marche s'établisse, on compte, avec un pendule ou avec une montre à secondes, le temps qu'il emploie à parcourir une longueur déterminée, et on divise cette dernière par le nombre de secondes qu'a duré l'observation.

Si la vitesse n'est pas la même dans tous les points de la longueur du canal, on se sert du moulinet ou d'une roue très-légère en fer-blanc dont les palettes trempent faiblement dans l'eau. En multipliant le nombre des tours par la circonférence qui correspond au milieu de la partie plongée des palettes, et en divisant ce résultat par le nombre des secondes contenues dans le temps de l'observation, on obtient une vitesse un peu plus

faible que celle de la surface de l'eau, mais qui en diffère d'une quantité à peine appréciable.

Mais une telle vitesse n'est que celle qui a lieu à la surface de l'eau, et doit être distinguée de la vitesse moyenne du canal ou de celle qui, multipliée par l'aire du profil, donne la dépense. D'après Dubuat, si on nomme V cette vitesse moyenne, V′ la vitesse à la surface de l'eau d'un canal et V″ celle qui a lieu au fond, on a

$$V = \frac{V' + V''}{2}.$$

Dans les cas ordinaires où la vitesse est comprise entre $0^m,30$ et $1^m,30$, V $\frac{4}{5}$V′. M. de Prony a donné cette autre règle,

$$V = V' \frac{V' \cdot \frac{4}{5} \cdot 2^m,732}{V' + 3,153},$$

où la vitesse moyenne V et la vitesse à la surface V′ sont exprimées en mètres, et de laquelle résulte le tableau suivant.

TABLEAU pour mesurer la vitesse moyenne de l'eau dans un canal, par la règle de M. de Prony.

VALEURS DE *V′*.	VALEURS DE $\frac{V}{V'}$.
m.	
0,00	0,725
0,50	0,786
1,00	0,812
1,50	0,832
2,00	0,848
2,50	0,862
3,00	0,873

Il est convenable de faire remarquer que la vitesse moyenne ne répond pas au milieu de la profondeur; la vitesse la plus grande est un peu au-dessous de la surface; c'est par cette raison que les roues plongent un peu. La vitesse est aussi plus faible vers les rives qu'au milieu de la largeur; aussi convient-il de jeter les flotteurs au milieu du canal, ou de faire en cet endroit les observations relatives au moulinet.

On a souvent besoin de jauger un cours d'eau. Si le canal est uniforme,

on mesure la section à chaque extrémité; puis on prend pour section la moyenne entre ces sections.

Enfin, la vitesse se mesure soit par le flotteur, soit par le moulinet, puis on déduit de cette vitesse à la surface, comme ci-dessus, la vitesse moyenne, laquelle, multipliée par l'aire de la section moyenne, donne le volume d'eau que le canal débite par seconde.

Mais, lorsque le canal n'est pas régulier et qu'on ne peut trouver une longueur suffisante en ligne droite, il faut établir un barrage; et, lorsque la dépense en aval de ce dernier est telle que le niveau d'amont demeure de niveau, c'est une preuve que cette dépense est égale à celle qui alimente le canal. On en agira de même pour une rivière; on observera près d'une usine établie, si le niveau reste constant pour une certaine ouverture de vanne; la quantité d'eau que la vanne laissera alors échapper sera égale à celle que la rivière débite.

125. *Mouvement de l'eau dans les canaux découverts de petite longueur.* — Revenons aux canaux de petite longueur ou d'une longueur comprise entre trente et cent fois leur largeur. En général, la dépense s'obtient en considérant ce qui se passe près de l'orifice, et ne dépend pas de la longueur du canal. La dépense étant connue et déterminée selon que l'eau couvre ou non la veine contractée, si on voit que la section d'eau reste la même partout, on trouvera la vitesse moyenne en divisant la dépense par la section, parce qu'effectivement la marche des filets est alors parallèle. Si le mouvement n'est pas uniforme et que le canal soit abordable, on opérerait de la même manière, c'est-à-dire que, pour trouver la vitesse altérée en chaque point, on diviserait la dépense par la section correspondante. Mais si le canal n'est pas abordable, ou qu'il ne soit pas établi, on supposera qu'un peu au delà de la section contractée de la vanne, la vitesse est réduite à 0,82. $V = v$. Soit h la pente du canal sur toute sa longueur, q le poids d'eau qui s'échappe dans un très-petit temps ou même pendant une seconde, V' la vitesse à l'extrémité du canal, on aura, si on ne tient pas compte du travail de la résistance de ce dernier,

$$\frac{q}{g}(V'^2 - v^2) = 2qh, \quad \text{ou} \quad V' = \sqrt{2gh + v^2}.$$

Mais la véritable vitesse à cette extrémité doit être évidemment plus faible. Pour l'obtenir, on suppose que le mouvement a lieu dans le canal avec la vitesse $\frac{v + V'}{2}$, moyenne entre la vitesse d'arrivée v et celle de sortie V'; d'où on conclura la section moyenne. On pourra donc calculer (3[e] partie, 123) la pente qui correspond à cette uniformité hypothétique; cette pente serait la diminution à apporter à h dans la valeur de V', de sorte que cette dernière s'obtiendrait ensuite d'une manière plus rapprochée. De

fait, on dispose ordinairement les coursiers de telle sorte que la vitesse n'y varie pas. S'ils sont inclinés à 45°, le canal est court, et la règle

$$V' = \sqrt{2gh + v^2}$$

donne assez bien la vitesse pour le point du canal le plus éloigné de la vanne.

126. *Établissement des coursiers dans les machines.* — Pour éviter les pertes de travail ou de force vive occasionnées par le frottement de l'eau le long des coursiers qui versent l'eau sur les machines, et par les chocs et les tourbillonnements qui résultent de la contraction produite à la sortie de l'orifice, il faudra 1° faire ces coursiers les plus courts possible; on mettra le récepteur de la machine tout contre le réservoir (fig. 498), et dans cette vue on incline quelquefois la paroi du réservoir en avant pour reporter l'orifice sous une roue hydraulique. 2° Il faudra éviter les contractions latérales et sur le fond de l'orifice; le moyen est tout simple : d'abord on mettra le fond de l'orifice et du coursier dans le prolongement exact de celui du réservoir; ensuite on donnera aux côtés du coursier près l'orifice la forme rétrécie que prend la veine fluide (fig. 499), comme cela a été expliqué (3e partie, 108). Mais on aura soin que le surplus du canal soit le prolongement exact de la partie rétrécie et soit bien raccordé avec elle; autrement il y aurait toujours choc et perte de force vive. Comme on ne connaît pas rigoureusement la forme de la veine fluide, cette disposition donnera toujours lieu à des pertes de travail appréciables, et la moindre erreur de disposition aura de l'influence si la charge du fluide dans le réservoir est un peu forte.

Il vaudra mieux mettre les joues latérales du coursier dans le prolongement des faces du réservoir, ainsi qu'il est représenté (fig. 500) au plan et à la coupe pris par l'axe, et placer l'orifice ou vanne en aval de CA, face intérieure du réservoir, à une distance CD égale à une fois ou une demi fois sa largeur horizontale *ab*; on fera

$$ef = \frac{ab}{0,8} = \frac{5}{4}ab.$$

Puis on tracera des arcs *fb* et *ae*, tangents en *a* et *b* aux joues *bn* et *am* du coursier. Si *bn* se trouvait juste dans le prolongement d'une grande face du réservoir, on laisserait les choses dans cet état, et on tracerait l'arc *ae* comme ci-dessus. Le dessus de *aefb* doit être libre. Par là on évite les contractions intérieures et extérieures. Comme la vitesse en *ef* sera toujours très-petite par rapport à celle en *ab*, la perte de force vive résultant d'une erreur dans la disposition *abfe* sera insensible.

Si la paroi de l'orifice est en charpente mince, on construira l'ouverture de la même manière; cela formera un petit réservoir à part.

Enfin, si la vanne est inclinée (fig. 501), *abfe* se trouvera couvert par le

talus de la paroi, et formera une sorte de buse saillante sur la face générale AB du réservoir.

Ces constructions sont faciles à saisir; on réduira la feuillure de la vanne le plus possible, et à cet effet, on la rendra mince si on la fait en fonte ou en fer et en calculant son épaisseur comme celle d'une barre, appuyée à ses deux bouts et chargée de la pression du fluide dans tous ses points. On évitera de même toute saillie et on fera des arrondissements à tous les angles. On aura d'ailleurs le soin de ne pas oublier que l'ouverture de l'orifice, dans le calcul de la dépense, doit être mesurée perpendiculairement au fond du coursier suivant IK (fig. 502).

A l'aide de toutes ces précautions la vitesse sera due ici à la charge H sur le centre de l'orifice, ou égale à $\sqrt{2gH}$; la contraction n'aura plus lieu que sur le sommet de l'orifice; rien ne ralentissant la vitesse en aval de l'orifice, il n'y aura plus de choc.

Le coefficient de la dépense sera plus grand que ne le donne la table du nº 109 à charge égale. Pour des charges de $0^m,80$ à 2^m et 3^m, on le supposera de $0^m,70$ si la vanne a sa paroi verticale, de $0^m,75$ si elle est inclinée à 1 de base sur 2 de hauteur, et de $0^m,80$ pour 1 de base sur 1 de hauteur.

Pour éviter, dans le cas des vannes inclinées, que la feuillure ne tombe dans l'arrondissement intérieur, on prolongera les joues du coursier vers l'intérieur (fig. 503); on fera les raccordements $a'e$, $b'f$ plus loin et plus courts, selon que le demandera l'inclinaison. La contraction sera toujours peu sensible.

XVIII.

RÉCEPTEURS HYDRAULIQUES.

127. *Hauteur due à la vitesse d'arrivée du fluide sur le récepteur; vitesse de régime de ce dernier.* — Il existe un grand nombre de récepteurs hydrauliques, ou mis en mouvement par l'eau; nous ne considérerons que les récepteurs le plus en usage et les plus avantageux; en un mot ce sont les roues hydrauliques. Mais une même théorie leur est applicable, et nous commencerons par en donner un exposé succinct. La première chose qu'on doit connaître, c'est la vitesse V avec laquelle le fluide arrive sur le récepteur. Or, comme la hauteur h, due à cette dernière vitesse, diffère souvent beaucoup de la hauteur du niveau supérieur du réservoir au dessus du point d'entrée sur le récepteur, la hauteur due à cette vitesse V sera ce qu'on nomme *hauteur disponible* ou *effective* d'entrée. Si Q est le poids de fluide dépensé par seconde, $Q . h$, ou $Q . \frac{V}{2g}$, sera le travail disponible à l'arrivée sur la machine.

Au premier instant la machine étant au repos, sa vitesse, d'abord zéro, augmente par l'action du fluide jusqu'à un certain terme où l'équilibre s'établit entre la puissance du moteur et les résistances de toute espèce; la vitesse que la machine a acquise est dite *de régime*, ou *permanente*, ou *de stabilité*. Lorsque la machine se compose uniquement de rouages et que la résistance est constante, la vitesse demeure uniforme, ou constante à chaque instant. Si, au contraire, le mouvement ou la résistance des pièces est variable, la vitesse du récepteur ne fait qu'osciller entre des limites peu étendues, de sorte qu'on en peut considérer la valeur moyenne comme la véritable vitesse uniforme.

128. *Effet utile des récepteurs.* — C'est donc à compter de l'instant où la vitesse de régime s'établit, et qui a lieu au bout de quelques minutes, que nous considérons le mouvement du récepteur censé uniforme. Le travail d'inertie employé à faire sortir le récepteur du repos est tout à fait négligeable, et, puisque sa force vive reste constante, l'accroissement de celle-ci entre deux temps donnés est zéro. Nous ne considérerons que le récepteur et la résistance utile P qu'il a à vaincre; nous supposerons que v est la vitesse dirigée suivant la direction de P, de sorte que Pv est le travail utile pendant une seconde, et Pvt le travail utile pendant le très-petit temps t.

129. *Relation de l'effet utile avec les forces vives du fluide à l'entrée et à la sortie du récepteur.* — Nous nommerons $\frac{q}{g} = m$ la masse de fluide qui arrive sur le récepteur, ou qui en sort dans chaque élément du temps t, w la vitesse absolue que conserve le fluide en sortant du récepteur; la force vive du fluide en entrant sera mV^2, et en sortant mw^2. Lorsqu'il entre, le fluide peut choquer le récepteur si sa vitesse diffère de celle de ce dernier; il en résulte une perte de force vive, exprimée (3e partie, 113) par le produit de m et du carré de la vitesse relative que nous nommerons u, en sorte que la perte de force vive sera mu^2. Si le fluide ne quitte pas immédiatement le récepteur, qu'il reste dessus et descende avec lui de la hauteur h', la gravité développera sur le récepteur un travail égal à $q \cdot h'$, ou à $m \cdot gh'$. Cela posé, le principe des forces vives sera encore applicable comme pour l'écoulement des fluides, c'est-à-dire que la force vive mV^2 d'entrée, plus deux fois le travail mgh', ajouté par la gravité pendant la descente de m sur la machine, sera égale à deux fois le travail utile Pvt, plus la force vive mw^2 de sortie, plus la force vive perdue mu_2. On aura donc

$$mV^2 + 2mgh' = mw_2 + 2Pvt + mu^2.$$

Cette égalité devant avoir lieu pour chaque petit temps t, on voit qu'au bout d'une seconde, $m \cdot V^2$ devient V^2 multiplié par la somme des masses m successives écoulées au bout d'une seconde, ou par M, et qu'il en est de même pour les autres termes. D'où il suit que, M étant la masse d'eau qui arrive ou qui sort par seconde, on aura cette relation,

$$MV^2 + 2Mgh' = Mw^2 + 2Pv + Mu^2.$$

130. *Valeur de l'effet utile.* — Nous avons appris, dans ce qui précède, à calculer le volume d'eau, en mètres cubes, écoulé pendant une seconde par un orifice, ou la dépense, que nous nommerons D. Son poids Q sera donc $1000^k \times D = Q$, et sa masse $M = \frac{Q}{g} = \frac{1000^k}{g}$. D. Ainsi on aura M aisément, et on pourra calculer tous les termes de l'égalité ci-dessus, sauf Pv, si nous connaissons V, h', w et u. Nous trouverons ensuite

$$Pv = \frac{1}{2}MV^2 + Mgh' - \frac{Mw^2}{2} - \frac{Mu^2}{2}.$$

131. *Causes qui augmentent ou diminuent l'effet utile.* — On voit que l'effet utile Pv sera le plus grand possible quand

$$\frac{Mw^2}{2} + \frac{Mu^2}{2}, \text{ ou } \frac{1}{2}M\,(w^2 + u^2) = 0,$$

c'est-à-dire quand $w = 0$ et $u = 0$. La condition $u = 0$ indique qu'il ne doit point y avoir de chocs à l'entrée, et la condition $w = 0$ que le fluide ne doit pas posséder de vitesse à sa sortie du récepteur. Il faut de plus que le fluide dans l'intérieur du récepteur ne tourbillonne pas non plus, et qu'en se mouvant sur la pièce il perde le moins possible de son travail par les frottements. L'effet Pv comprend en outre les résistances passives des pièces matérielles du récepteur, et cela occasionne un déchet de travail dont il faudra tenir compte dans certaines circonstances. Si, par exemple, le récepteur est un piston sur lequel le fluide vient tomber, comme dans les machines à colonne d'eau, le frottement de ce piston est considérable. En appelant F la résistance de ce frottement, son travail sera $F \cdot v$, et on devra le retrancher de $\frac{1}{2}\,MV^2 + Mgh'$. Mais, comme nous n'avons en ce moment en vue que les roues hydrauliques dont les résistances se réduisent à celles de l'air et du frottement des tourillons, nous ne ferons pas d'abord entrer le terme Fv dans la relation précédente; toutefois on ne doit pas oublier qu'il existe et qu'il est à défalquer du travail disponible livré effectivement par le récepteur au reste de la machine.

132. *Maximum absolu de l'effet utile.* — Si donc w et u étaient nuls, on aurait

$$Pv = \frac{1}{2}MV^2 + Mg.h'.$$

Nous avons d'ailleurs supposé $V^2 = 2gh$, h étant la chute disponible à l'entrée du récepteur. Ainsi,

$$Pv = Mgh + Mgh' = Mg\,(h + h') = Q\,(h + h').$$

Q est le poids de l'eau versé sur le récepteur par seconde; h' est la chute depuis l'entrée sur le récepteur jusqu'à la sortie. Si h était égale à la hauteur

du réservoir sur le point d'entrée, $h+h'$ serait la chute totale ou H, et Q $(h+h')$ représentera le travail *absolu* ou totalement disponible, imprimé par la gravité à l'eau. C'est ce qu'on nomme le *maximum absolu* du travail d'une chute d'eau. Mais jamais $h+h'$ n'est égale à H : on est toujours, comme on l'a vu, soit par la contraction, soit par les pertes de force vive et par les résistances du fluide amené par un tuyau ou canal sur le récepteur ; on est, dis-je, toujours contraint à perdre quelque chose de la chute génératrice de V. Le récepteur sera donc considéré comme produisant le *maximum* d'effet quand il rend le travail $Mg\,(h+h')$, bien que h soit déjà affaibli. Quant à h', ou à la hauteur du point d'entrée du fluide sur le récepteur au dessus du point de sortie, en la supposant entièrement parcourue par le fluide, c'est supposer que ce dernier quitte le récepteur au point le plus bas possible, ou au niveau du canal inférieur, sans quoi $h+h'$ serait encore plus au dessous de la chute disponible. On voit, d'après cela, qu'il est nécessaire de disposer les canaux de fuite et d'arrivée de l'eau, de façon à éviter toute cause de perte de force vive, telle qu'une trop grande pente, les coudes, rétrécissements, etc.

Quand la machine exige pour son travail régulier plus d'ean que n'en fournit le courant sur lequel elle est établie, la charge sur l'orifice diminuerait continnellement, si on ne pratiquait en avant de l'usine un grand réservoir qui sert de régulateur pendant cinq ou six heures au moins dans les grandes sécheresses ; après quoi l'eau ayant baissé sensiblement, on interrompt le travail, jusqu'à ce que le bassin soit rempli. On conçoit que l'abaissement du niveau est lui-même une gran de cause de perte de travail.

133. *Moyens d'obtenir le maximum absolu d'effet utile.* — Puisque, pour que le récepteur rende tout le travail disponible $Mg(h+h')$, il suffit des denx conditions $u=0$ et $w=0$, voyons comment on pourra rendre ces vitesses nulles on les plus petites possibles.

u, la vitesse relative ou perdue, sera nulle si le mouvement du fluide est dirigé dans le sens du mouvement du point du récepteur qu'il tend à choquer, et si le fluide possède la même vitesse que ce point. Quand la vitesse du fluide est plus grande, il y a choc de la part du fluide contre le récepteur. Si elle est plus faible, c'est le récepteur au contraire qui choque le fluide. Mais u étant la différence des deux vitesses, Mu^2 n'en est pas moins une perte de force vive occasionnée par ce choc pendant une seconde ; nous y reviendrons plus loin.

La vitesse absolue w, conservée par l'eau à la sortie du récepteur, dépend de la vitesse avec laquelle elle coule sur le récepteur et de la vitesse de ce dernier. Si la première est nulle, ou que le fluide fasse partie de la machine, ou soit au repos relatif sur elle, le fluide en la quittant possédera la vitesse v' du point par lequel il la quitte : ainsi $v'=w$. Or w ou v' sera alors nul ou très-petit, soit quand la machine se meut lentement, ou quand le point de

sortie du fluide est très-près de l'axe de relation. Si, au contraire, le fluide se ment dans l'intérieur du récepteur avec une vitesse u', il en sortira avec une vitesse composée de u' et de la vitesse dn point de sortie a (fig. 504), que nous nommerons encore v', c'est-à-dire avec la vitesse résultante w des vitesses u' et v', résultante qu'on trouvera par le parallélogramme des vitesses (2e partie, 4). Supposons que l'eau coule dans l'intérieur de canal ab entraînée avec le récepteur, et que la vitesse du point a de sortie soit av'. L'eau a d'abord cette vitesse ; de plus elle coule le long de ab, avec une vitesse relative qui est au' en a ; sa vitesse *absolue* en sortant sera, par conséquent, la résultante aw de av' et de au'. Cette vitesse absolue peut être zéro dans deux suppositions : 1° Si u' et v' sont nuls à la fois, c'est le cas déjà spécifié ci-dessus ; 2° Si la courbe ab est tangente à av' et dirigée en sens contraire, et si de plus $u'=v'$.

134. *Moyens d'approcher du maximum absolu. Maximum relatif de l'effet utile.*— Il n'arrive en aucun cas qu'il soit possible de satisfaire exactement à ces conditions ; il faut au moins tâcher d'en approcher autant qu'il soit possible.

Ordinairement la tangente extrême en a du canal ab fait avec la direction av' du mouvement du récepteur un angle de 30° au moins. Si v' diffère peu de u', w devient très-petit, ainsi que Mw^2.

Enfin, il y a des récepteurs dans la pratique, qui ne permettent ni d'éviter le choc à l'entrée, ni d'annuler la vitesse w à la sortie. On est alors réduit à combiner les choses de façon que $M(u^2+w^2)$ soit seulement le plus petit possible, et l'effet utile Pv le plus grand, d'après les données ou dispositions qu'on peut faire varier ou changer, telles que, par exemple, la vitesse v du récepteur ou la vitesse V du fluide à l'arrivée. On obtient alors ce qu'on appelle le *maximum d'effet relatif*.

Cette question se présente, entre autres, sur des récepteurs déjà établis et dont il est seulement loisible de modifier la vitesse.

135. *Roues verticales à palettes planes mues par dessous.*—Nous allons actuellement appliquer ces principes aux roues hydrauliques, en commençant par la roue à palettes planes, mues par dessous dans un coursier rectiligne (fig. 505). C'est la roue le plus en usage pour les petites chutes au dessous de deux à trois mètres, parce qu'elle prend une grande vitesse. Elle se compose de deux jantes égales et parallèles, dont chacune se trouve réunie à l'arbre tournant, par quatre ou six bras. Ces derniers sont saillants en dehors de la circonférence extérieure des jantes pour recevoir des palettes planes. Dans les intervalles de ces bras, les palettes sont fixées à des chevilles intermédiaires qu'on nomme *bracons*. Les palettes sont éloignées entre elles d'environ un pied à quinze pouces. Leur hauteur varie aussi selon le rayon de la roue, d'un pied à quinze pouces. Leur largeur est relative à la force qu'on veut obtenir et à la quantité de fluide dont la profondeur, dans le coursier,

indépendamment de la roue, ne doit pas excéder le tiers ou le quart de la hauteur des palettes ; mais il arrive souvent qu'on fait cette profondeur plus grande, par rapport aux palettes. Le coursier doit bien emboiter les ailettes; un jeu de deux centimètres suffit ; ce jeu est, par la maladresse des charpentiers, élevé à cinq ou six centimètres. Les coursiers sont inclinés d'un dixième à un quinzième ; quant à la vanne, elle est placée le plus près possible de la roue.

136. *Effet utile maximum de ces roues.* — Nous appellerons P l'effort exercé sur la roue par le fluide suivant la circonférence qui répond au milieu des ailettes, v la vitesse de cette circonférence, $P \cdot v$ sera le travail transmis ou effet utile par seconde. On peut se représenter P comme un poids soulevé par la roue au moyen d'une corde flexible passant sur une poulie supérieure et sur la circonférence moyenne ci-dessus ; v est la hauteur de l'élévation de ce poids pendant une seconde.

Le mouvement de la roue étant censé uniforme, l'eau se gonflera entre les palettes ou aubes, et fera un remous ou *matelas* qui se mouvra avec la vitesse v de la roue. L'eau qui affluera avec la vitesse V viendra choquer, non les palettes, mais le matelas ou remous qui se trouve en avant, avec une vitesse relative $u' = V - v$. Elle sortira d'ailleurs hors de la roue avec la vitesse de cette dernière ; ce qui donne $w = v$. Enfin, comme le coursier est sensiblement horizontal, on a $h' = 0$ à très-peu près. Faisant ces substitutions, $u = V - v$, $w = v$, et $h' = 0$, dans la relation de l'effet utile établie au n° 130, nous aurons ici

$$Pv = \frac{1}{2}MV^2 - \frac{Mv^2}{2} - \frac{1}{2}M(V-v)^2 = \frac{1}{2}M\left\{V^2 - v^2 - (V-v)^2\right\}.$$

On voit que Pv est *égal à la moitié de la force vive en entrant, diminuée de la moitié de celle qui est conservée à la sortie et de la moitié de celle qui est détruite par le choc.*

La masse M s'obtient en observant que si D est le volume d'eau en mètres cubes par seconde, son poids $Q = 1000^k \times D$, et que

$$M = \frac{1000^k \times D}{g} = \frac{1000}{9,809} \cdot D.$$

Le calcul de Pv est donc facile en toute circonstance ; toutefois on remarque que Pv varie avec v vitesse de la roue, et qu'il est nul soit que $v = 0$ ou que $v = V$. Il y a donc une valeur de cette vitesse, v valeur comprise entre 0 et V, qui doit rendre Pv un *maximum* relatif; c'est celle pour laquelle le terme $v^2 + (V-v)^2$, qui entre négativement dans l'expression de Pv devient le plus petit possible.

A cet effet, construisons cette quantité géométriquement. Sur une droite quelconque (fig. 506) nous prendrons $AV = V$, et $Av = v$, de sorte que sur cette droite la partie vV représentera $V - v$. Élevons vV' perpendiculaire à AV et égale à vV, ou à $V - v$; tirons AV'. Le carré de AV', d'après la pro-

position de Pythagore relative au triangle rectangle $AV'v$, sera tel qu'on aura

$$\overline{AV'}^2 = \overline{Av}^2 + \overline{V'v}^2, \text{ ou } \overline{AV'}^2 = v^2 + (V-v)^2.$$

Au lieu d'employer cette construction géométrique on pourra remarquer que $v^2 + (V-v)^2 = v^2 + V^2 + v^2 - 2Vv$. Cette quantité doit être un minimnm donc $2Vv$, un maximum. Il faut donc que $2V = v$ on bien $2v = V$, mais comme nous supposons V78 nous prendrons $2vV =$ d'où $V\,v = \frac{1}{2}$ V. Si pour v on prend sur la même droite une autre grandenr Av' et qu'on élève à son extrémité v' une perpendiculaire $v'V''$ égale à $v'V$, on aura un autre point V'', lequel, avec le point V' et tous les points analogues, déterminera une droite VV', inclinée à 45° sur AV. Or, de toutes les distances AV, AV'' du point A à la droitc VV'', la plus courte est la perpendiculaire AV'' à cette dernière droite. Ainsi, l'angle $VV''A = 90°$, et $V''AV = 45°$. Le triangle $AV''V$ est donc isocèle, et Av' ou v est la moitié de la base AV, ou est $\frac{1}{2}$ V ; ce qui indique que le *minimum* de $v^2 + (V-v)^2$, ou le *maximum* de Pv, correspond à une vitesse de roue moitié de celle avec laquelle l'eau arrive. Si nous faisons $v = \frac{1}{2}$ V dans la valenr $v^2 + (V-v)^2$, celle-ci devient

$$\overline{Av'}^2 + \overline{v'V}^2, \text{ ou } \frac{V^2}{4} + \frac{V^2}{4} = \frac{1}{2}V^2;$$

d'où
$$Pv = \frac{1}{2}M\left(V^2 - \frac{1}{2}V^2\right) = \frac{1}{4}MV^2.$$

Maintenant on remarquera que si la roue transmettait tout le travail disponible de l'eau, elle donnerait $\frac{1}{2}MV^2$; ce qui prouve qu'au *maximum* elle ne fournit que la moitié de ce travail ; le reste est perdu par les chocs et par la fuite de l'ean avec la vitesse de la roue.

Dans la réalité, et d'après les expériences de Bossut et de Smeaton, cette roue ne donne que $\frac{3}{10}$ ou 0,30 du travail possédé, c'est-à-dire les $\frac{6}{10}$ de l'effet donné par le calcul ; ce qui est dû au jeu indispensable et à ce que l'eau, en vertu de la charge du remous, s'écoule avec nne vitesse plus grande que la vitesse v de la roue. L'expérience apprend aussi que la vitesse qui correspond au *maximum* est un peu au-dessous de $\frac{1}{2}$ V, et égale environ à $\frac{2}{5}$ V = 0,4. V; ce qui est dû sans doute à ce que le remous est plus grand en amont, et que l'eau agit un peu par son poids sur les aubes, ce qui augmente d'autant plus l'effet que v est plus petit.

Telles sont les conditions du meilleur établissement de cette roue en la supposant exactement emboîtée dans le conrsier.

137. *Diminution de l'effet utile par le jeu du coursier.* — Lorsqu'on laisse

du jeu entre les palettes et le coursier, l'effet diminue rapidement. Une partie de la masse d'eau M s'échappe par le jeu. Connaissant l'épaisseur ab de la tranche fluide dans le coursier, on diminuera M dans la valeur de Pv, d'après le rapport de la section $a'b'c'd'$ (fig. 507), interceptée dans le fluide par la palette, à la surface $abcd$ de la section d'eau. Cette dernière section est égale à $\frac{D}{V}$. De là on conclura ab, en divisant le quotient $\frac{D}{V}$ par la largeur totale du coursier. V est la vitesse de l'eau à son arrivée sur la roue, et $\frac{D}{V}$ la section d'eau dans le coursier supposé libre. Il paraît que quand le jeu est très-grand, il faut prendre pour Pv les 0,75 de sa valeur théorique, c'est-à-dire qu'on a

$$Pv = 0{,}75 . M . \frac{a'b'c'd'}{abcd} . \frac{V^2}{4}.$$

Quant aux roues à palettes qui se meuvent dans un courant indéfini ou très-large, nous y reviendrons plus loin.

138. *Effet utile pour une vitesse quelconque de la roue.* — Souvent quand la vitesse de la roue est mal réglée, v diffère beaucoup de $\frac{1}{2}$ V ou de $\frac{2}{5}$ V. Alors, pour avoir Pv, il faut calculer sa valeur générale $\frac{1}{2} M \left\{ V^2 - v^2 - (V-v)^2 \right\}$, et en prendre encore les 0,60. On simplifie ces calculs, en observant que si sur $AV = V$ comme diamètre (fig. 508), on décrit la demi-circonférence AzV; elle coupera l'ordonnée vV' dont l'abscisse $Av = v$, en un point z, tel que le carré de zv sera $\frac{V^2 - v^2 - (V-v)^2}{2}$. En effet, le triangle AzV rectangle en z, donne $\overline{AV}^2$, ou $V^2 = \overline{Az}^2 + \overline{zV}^2$. Par le triangle rectangle Azv, on a $\overline{Az}^2 = \overline{Av}^2 + \overline{zv}^2 = v^2 + \overline{zv}^2$; et par le triangle rectangle zVv, $\overline{zV}^2 = \overline{zv}^2 + \overline{vV}^2 = \overline{zv}^2 + (V-v)^2$. Substituant ces valeurs de $\overline{Az}^2$ et de $\overline{zV}$ dans celle de V^2, on trouve

$$V^2 = \overline{2zv}^2 + v^2 + (V-v)^2,$$

et, par suite,
$$\overline{zv}^2 = \frac{V^2 - v^2 - (V-v)^2}{2}.$$

Or, zv est moyen proportionnel à Av et vV, ou à v et $V - v$. D'où $\overline{zv}^2 = v(V-v)$. Égalant entre elles ces mêmes valeurs de $\overline{zv}^2$, on aura, enfin,

$$V^2 - v^2 - (V-v)^2 = 2v(V-v).$$

Cette construction géométrique est inutile; on voit de suite que $V^2 - v^2 - (V-v)^2 = V^2 + v^2 - (V^2 - 2Vv + v^2) = -2v^2 + 2Vv = 2v(V-v)$.

Si nous faisons cette nouvelle substitution dans l'expression de Pv, nous aurons

$$Pv = \frac{1}{2} M . 2v (V - v) = Mv (V - v)^{k.m};$$

d'où on tire $P = M (V - v)k.$

On prendra les 0,60 du travail Pv et de l'effort P de la roue, calculés ainsi théoriquement, pour avoir ceux qui correspondent à la pratique.

139. *Rapport de l'effet maximum utile à l'effet absolu de l'eau.* — On fera attention que V, ou la vitesse d'arrivée de l'eau sur la roue, diffère essentiellement de celle qui est due à la chute au-dessus du centre de l'orifice par lequel se fait l'écoulement; et que, par l'addition d'un petit tuyau (3e partie, 111), la première peut être réduite aux 0.82 de la deuxième, en sorte que la force vive restante ou disponible sur la roue est les 0,82, ou les 0,67, ou les $\frac{2}{3}$ de la force vive absolue : c'est le cas de presque toutes les roues de moulin, parce que la roue est placée au delà de la section contractée. Or, la roue la mieux établie ne rend que les $\frac{3}{10}$, de l'effet de la chute disponible, et celle-ci n'est que les $\frac{2}{3}$ de l'effet absolu. Le travail *maximum* de la roue est, par conséquent, réduit à 0,20 ou au cinquième de la hauteur absolue de chute au-dessus du point de sortie sur la roue; souvent encore ce travail n'en est que le dixième, comme dans les anciens moulins de la ville de Metz qui sont mus par des roues à palettes verticales.

140. *Roue verticale à aubes cylindriques mues par dessous.* — La roue verticale à aubes cylindriques (fig. 509) diffère principalement de la précédente en ce que les palettes droites y sont remplacées par des aubes cylindriques qui se raccordent presque tangentiellement à la circonférence extérieure de la roue pour éviter le choc de l'eau à l'entrée, et qui, au lieu d'être isolées et soutenues par de petits bras ou bracons, sont solidement emboîtées dans deux couronnes planes concentriques à la roue. L'auteur a d'ailleurs eu soin de réunir dans les divers accessoires tous les genres de perfectionnements indiqués par la théorie et par l'expérience.

141. 1° *Vanne et pertuis.* — La vanne, le pertuis et la retenue sont disposés comme il a été dit (3e partie, 126), de façon à éviter les contractions latérales et intérieures, ainsi que toutes les résistances susceptibles de diminuer la vitesse.

2° *Fond du coursier antérieur.* — Le fond AT du coursier en amont de la roue est dirigé tangentiellement aux couronnes, et il est plan jusqu'au point de contact T, déterminé par la perpendiculaire CT, abaissée du centre C de la roue sur ce fond. Sa pente est de $\frac{1}{15}$, ou de $\frac{1}{10}$ au plus.

3° *Fond du coursier sous la roue.* — A partir de T, le fond est cylindrique, de façon à emboîter exactement la roue avec le jeu strictement nécessaire,

qui est de 1 centimètre pour une roue en fer ou en fonte, et de 2 centimètres pour une roue en bois, qui n'est jamais d'une exécution parfaite et qui peut fléchir ou se fausser ; la portion circulaire TB est prolongée jusqu'en un point B, tel que l'intervalle TB surpasse de cinq à six centimètres celui qui existe entre deux aubes voisines, de façon qu'il y ait toujours une aube au moins emboîtée et que le fluide ne puisse librement s'en échapper.

4° *Ressaut en arrière*; *canal de fuite*. — Le coursier est brusquement interrompu en B par une marche ou ressaut BD, qui permet à l'eau de sortir librement de la roue ; l'arête B de ce ressaut doit être placée au niveau MN du fluide dans le canal qui sert à évacuer les eaux de l'usine en temps ordinaire, c'est-à-dire quand il n'y a pas sécheresse ou surabondance d'eau. A partir de ce ressaut, le canal d'évacuation doit recevoir immédiatement en largeur et en profondeur les dimensions propres à faciliter l'écoulement sans exiger une trop grande pente, conformément à ce qui a été dit (3e partie, 123), pente qui est toujours une perte de la chute totale disponible sur une certaine étendue du cours d'eau.

5° *Largeur du coursier en amont et de l'orifice*. — On donne à la largeur *aa'* horizontale de l'orifice (fig. 510) et de la partie *a*TT'*a'* antérieure du coursier un peu moins que la largeur des aubes de la roue ou de l'intervalle des couronnes, afin que l'eau n'aille pas rencontrer l'épaisseur de ces dernières; cet excès de largeur doit être d'environ trois centimètres de chaque côté pour les roues bien construites.

6° *Logement des couronnes dans les joues du coursier*. — Pour donner aux couronnes la liberté de se mouvoir, on pratique des entailles cylindriques *ce*T, *c'e'*T' dans les joues latérales du coursier, avec un jeu suffisant de 2 à 3 centimètres sous l'épaisseur des couronnes.

7° *Tracé des aubes cylindriques*. — Comme l'eau se dégagerait mal des aubes à la sortie, si elles étaient exactement tangentes à la circonférence extérienre de la roue, et qu'elle choquerait le fluide en amont, on donnera à ces aubes une légère inclinaison relative à l'épaisseur de la lame d'eau que le coursier doit recevoir. *mn* (fig. 511) étant la nappe supérieure de cette lame, on élèvera, en un point de rencontre de cette nappe avec la circonférence extérieure des couronnes, la perpendiculaire *no* sur le fond du coursier, laquelle ira rencontrer la circonférence intérieure en *o*; du point *o* comme centre on décrira l'arc de cercle *np*, tangent à *mn*; ce sera le profil des aubes. Si les couronnes étaient très-larges, , on prendrait *o* au-dessous de la circonférence intérieure; si elles l'étaient peu, on le prendrait au-dessus, afin de n'avoir pas des courbes *np* trop étendues. La seule attention à avoir, c'est que l'arc du cercle *np* occupe perpendiculairement la couronne intérieure, afin que si l'eau jaillissait au-dessus de l'aube, ce fût verticalement, et qu'elle y retombât immédiatement. D'après cette construction, l'angle *int*, formé par les aubes avec la circonférence extérieure de la roue, sera

d'environ 30° sexagésimaux pour une hauteur d'ouverture de l'orifice de 30 centimètres, et de 20° à 25° pour une hauteur de 10 à 15 centimètres.

8° *Nombre et construction des aubes.* — Le nombre et l'espacement des aubes dépend aussi du volume d'eau admis sur la roue et du rayon de cette dernière. Pour les roues de 3 à 4 mètres de diamètre, on ne donnera pas moins de trente-six aubes à la roue; on en donnera quarante-huit, au moins, pour celles de 6 à 7 mètres de diamètre.

9° *Largeur des couronnes.* — Nous nous bornerons à dire que l'intervalle entre leur circonférence extérieure et leur circonférence intérieure égale, au moins, $0^m,40$ à $0^m,35$ pour les charges de fluide dans le réservoir de 0^m80 de hauteur seulement, et qu'il est de $0^m,60$, au moins, pour les charges approchantes de 2 mètres. Cette largeur est motivée sur ce que l'eau ne doit pas pouvoir s'élever au-dessus des couronnes en suivant les aubes.

142. *Effet maximum utile des roues à aubes cylindriques.* — Occupons-nous maintenant des effets mécaniques de cette roue. Nous admettrons que l'eau, en arrivant dans la direction propre du mouvement des aubes et de la roue, et presque tangentiellement au premier élément de ces aubes, ne donne lieu à aucun choc à l'entrée. Cela posé, et conservant les dénominations du n° 136, on observera que, puisque l'eau arrive avec la vitesse V, tandis que les aubes fuient devant elle avec une vitesse v, cette eau entrera sur les aubes avec une vitesse $V - v$, en vertu de laquelle elle s'y élèvera contre l'action de la gravité et de la force centrifuge, à une certaine hauteur que nous ne calculerons pas, mais que l'expérience et le raisonnement s'accordent à ne pas supposer au-dessus de la hauteur due à $V - v$, ou de $\frac{(V-v)^2}{2g}$. L'eau, après être arrivée à ce point le plus élevé, tout en étant emportée par la roue, redescend par l'action de la gravité et de la force centrifuge qui lui rendent en sens contraire la vitesse $V - v$ qu'elle possédait au moment de monter; elle tendra donc à sortir des aubes avec cette vitesse. Mais, comme elle est emportée avec la vitesse v de la roue, elle sortira avec la vitesse absolue et tangentielle $(V - v) - v$, ou $V - 2v$. Telle sera la vitesse résultante de sortie, et si elle est nulle, ou si $v = \frac{V}{2}$ l'eau n'éprouvera pas de perte de force vive en sortant; mais comme elle ne choque pas non plus en entrant, il s'ensuit que la roue produira le *maximum* d'effet absolu, ou que l'effet utile Pv sera égal à $\frac{1}{2}MV^2$, ou à la quantité de travail renfermé dans l'eau à son arrivée sur la roue. Nommant H la hauteur due à V, Q le poids d'eau écoulé dans une seconde, M sa masse ou $\frac{Q}{g}$, on a

$$V^2 = 2gH,$$

et

$$\frac{1}{2}MV^2 = \frac{1}{2}\frac{Q}{g} \times 2gH = Q \cdot H;$$

d'où $$Pv = Q.H.$$

143. *Effet utile pour une vitesse de roue différente de celle qui correspond au maximum.* — Pour trouver l'effet utile relatif à une vitesse v de la roue différente de $\frac{V}{2}$, on répétera le raisonnement, fait aux n°s 129 et 130, de la théorie générale des récepteurs hydrauliques, et on aura évidemment

$$Pv = \frac{1}{2}MV^2 - \frac{1}{2}M(V-2v)^2 = \frac{1}{2}M\left\{V^2 - (V-2v)^2\right\},$$

relation qui conduit à la même conséquence pour le *maximum* d'effet. On peut simplifier l'expression de Pv en observant que

$$(V-2v)^2 = V^2 + 4v^2 - 4Vv,$$

ce qui donne

$$V^2 - (V-2v)^2 = V^2 - V^2 - 4v^2 + 4Vv$$
$$= 4Vv - 4v^2 = 4v(V-v),$$

et, par conséquent, $Pv = 2Mv(V-v)$.

On arrivera encore à ce résultat par des considérations géométriques et en construisant $V^2 - (V-2v)^2$. A cet effet, prenez (fig. 512) $AV = V$ et $AV_2 = 2AV = 2V$. Portez de A en v_2 la longueur $Av_2 = 2v$, de sorte que $v^2V = (V-2v)$. Si, du point V comme centre, et d'un rayon $AV = V$, vous décrivez une demi-circonférence qui coupe en z la perpendiculaire v_2z, et que vous joignez V et z par la droite $Vz = V$, vous aurez

$$\overline{v_2z}^2 = \overline{zV}^2 - \overline{v_2V}^2 = V^2 - (V-2v)^2.$$

Mais, d'un autre côté, v_2z est une moyenne proportionnelle à Av_2 et à v_2V_2, c'est-à-dire à $2v$ et à $2V - 2v$; de sorte que

$$\overline{v_2z}^2 = 2v \times (2V - 2v).$$

Égalant entre elles ces deux valeurs de $\overline{v_2z}^2$, on aura

$$V_2 - (V-2v)^2 = 4v(V-v),$$

et de cette manière on sera conduit encore à la dernière valeur de Pv.

144. *Coefficients pratiques de l'effet utile.* — Voici maintenant ce que l'expérience a appris de positif sur ces roues quand elles sont convenablement établies :

1° La vitesse v de la roue qui donne le *maximum* d'effet surpasse un peu la moitié de la vitesse d'arrivée V de l'eau ; elle en est au plus les 0,55 ; mais on peut sans inconvénient, quand l'eau afflue en grande masse sur la roue, la porter à 0,60, ce qni souvent est un avantage pour les machines qui doivent marcher vite.

2° L'effet utile réel est environ les 0,65 de celui que donne le calcul quand la hauteur de chute disponible H, ou $\frac{V^2}{2g}$, surpasse 2 mètres et que l'ouverture de l'orifice est faible, ou de 10 à 12 centimètres par exemple ; il en

est les 0,75 quand la chute est beaucoup au-dessous de deux mètres et que l'ouverture de l'orifice est de 20 à 30 centimètres. Le résultat moyen 0,70 surpasse, comme on voit, le double de ce que donnent les roues à palettes planes les mieux construites.

3° Si l'on entend parler de l'effet *maximum* intégralement transmis par une telle roue construite à une machine, on peut admettre qu'il est moyennement les 0,6 de la quantité de travail absolue et indépendante des pertes de force vive dues à la contraction, au frottement de l'eau, etc., ou du produit du poids de fluide écoulé, multiplié par la chute totale comprise depuis le niveau dans le réservoir jusqu'au-dessous de la roue.

145. *Détails de construction.* — Quant à la construction des couronnes ou des aubes, elle ne présente pas de difficultés particulières. Les aubes pourront se faire en petites planchettes de bois de chêne assemblées, comme les douves de tonneau, dans des rainures circulaires pratiquées aux couronnes; ces mêmes planchettes peuvent encore être clouées contre des rebords ou liteaux fixés aux couronnes. On remplacera le biseau extérieur des aubes par une lame de tôle de 6 à 8 centimètres de largeur, afin d'éviter tout affaiblissement.

Lorsque les couronnes (fig. 513) seront exécutées en bois, on les composera chacune de deux jantes assemblées à mi-bois et à queue d'hironde sur les bras sans tenon et de manière à effleurer la face intérieure verticale de chaque bras. Ces jantes auront deux pouces d'épaisseur sur six à sept pouces de largeur, et on recouvrira, intérieurement à la roue, leur système par des planches d'un pouce à quinze lignes d'épaisseur, lesquelles masqueront les joints des jantes avec les bras, et seront boulonnées de distance en distance contre les bras et les jantes. On remarquera qu'ici le fluide tend peu à écarter les couronnes, et qu'il ne fait que presser les aubes; néanmoins il sera bon de s'opposer à l'écartement des bras et des couronnes en traversant de part en part la roue par des boulons servant à les réunir.

146. *Avantage des roues à aubes cylindriques.* — Nous avons beaucoup insisté sur les roues à aubes courbes mues par dessous, parce qu'elles sont destinées à remplacer désormais les anciennes roues à palettes pour toutes les chutes au-dessous de deux mètres. Il existe déjà un grand nombre de ces roues exécutées en France et dans les pays étrangers. Elles offrent sur toutes les autres l'avantage d'aller très-vite et de pouvoir marcher dans l'eau lors même qu'elles y sont noyées en arrière, lors des crues. Il suffit seulement de donner, dans cette dernière circonstance, la hauteur convenable aux couronnes et aux aubes.

147. *Roues à palettes, mues de côté dans un coursier circulaire.* — On a cherché à remédier à l'inconvénient des roues à palettes ordinaires sous le rapport de la perte d'effet, en emboîtant les aubes dans un coursier circulaire (fig. 514) qui se relève plus ou moins haut du côté de l'orifice, de manière

à rendre la charge du fluide au-dessus du centre de ce dernier beaucoup plus faible. Mais alors la vitesse d'arrivée V de l'eau sur la roue est très-petite, et la perte de force vive à l'entrée est nécessairement amoindrie. On peut d'ailleurs aussi diminuer la vitesse de la roue, de façon que l'eau en la quittant ne conserve que peu de force vive. On pratique ici également un ressaut au coursier sous l'axe de la roue pour le libre dégagement de l'eau. La vanne est disposée de manière à éviter les contractions ; la partie antérieure du coursier est raccordée tangentiellement à la roue ; le jeu est le moindre possible ; les palettes sont un peu inclinées en avant du côté d'amont sur les rayons quand la vitesse de la roue doit être forte ; cette inclinaison diminue la vitesse absolue de sortie de l'eau hors des aubes.

Quand on craint que l'eau ne jaillisse par dessus les aubes vers l'intérieur de la roue, on ferme en partie ce côté par des planches clouées sur les jantes, mais on laisse un vide vers le haut pour que l'air puisse s'échapper.

Le nombre des aubes est réglé comme dans ce qui précède.

148. *Moyens de rendre l'effet le plus près possible de l'effet absolu.* — Passons à la théorie de ces roues. Conservons toujours les mêmes dénominations, et nommons h' la hauteur du point d'arrivée de l'eau sur la roue au-dessus de l'arête B du ressaut qui sert de dégagement à l'eau. La vitesse de sortie étant à peu près celle v de la roue, on aura, d'après le principe des forces vives (3[e] partie, 130),

$$Pv = Mgh' + \frac{1}{2}MV^2 - \frac{1}{2}Mv^2 - \frac{1}{2}M(V-v)^2.$$

$$= Mgh' + \frac{1}{2}M\left\{V^2 - (V-v)^2 - v^2\right\}.$$

On rendra presque nuls les termes soustractifs de cette expression, en faisant la vitesse v de la roue très-petite et en prenant $V = v$; c'est-à-dire en rendant la charge du fluide sur l'orifice aussi très-petite. On y parvient en prenant (fig. 515) l'eau à la surface du réservoir et en la faisant passer au-dessus d'une vanne formant déversoir et qui est très-près de la roue. On calcule la largeur horizontale de cette vanne par la formule du n° 110, relative à la dépense d'un réservoir, de façon que l'épaisseur de la lame d'eau ne surpasse guère 20 centimètres, ce qui exige quelquefois de donner beaucoup de largeur à la roue et à l'orifice quand l'eau est abondante et que la roue doit être puissante. Mais il en résulte que l'eau acquiert au plus la vitesse moyenne de $1^m,50$ à 2^m avant d'atteindre les aubes. Quant à la vitesse v de la roue, l'expérience prouve qu'on ne peut la rendre beaucoup moindre d'un mètre, à cause des fuites dans le coursier dont l'effet croît avec le temps. On comprend donc que ces roues doivent approcher beaucoup du *maximum* d'effet absolu dans les circonstances dont il s'agit, effet absolu qui est ici mesuré par $\frac{1}{2}Mgh' + \frac{1}{2}Mv^2$. Aussi, des expériences faites par M. le

capitaine Morin prouvent-elles que ces roues peuvent rendre au moins les 0,80 environ de cet effet total. Mais si on calcule ce dernier d'après la chute totale ou d'après la hauteur du niveau supérieur du réservoir au-dessus du ressaut, et si on défalque de l'effet utile la résistance des frottements, on trouve un résultat qui est moindre selon les cas, et qu'on évalue moyennement à 0,67. Quoi qu'il en soit, cette disposition n'en est pas moins très-avantageuse pour tous les cas où une grande vitesse de la roue n'est pas indispensable; dans le cas contraire, il faut des rouages intérieurs pour obtenir cette grande vitesse, et l'effet utile est de beaucoup réduit.

149. *Capacité de la roue.* — On doit d'ailleurs proportionner la capacité de la roue de manière à ce qu'elle puisse admettre tout le fluide qui arrive de l'orifice. Soit l la largeur des ailes parallèles à la direction de l'arbre, et K leur hauteur; $K \times l$ sera la surface de chacune, et le volume de l'espace que chaque aube parcourt dans une seconde est évidemment $K \times l \times v$. La dépense de l'orifice, ou D, doit être, au plus, moitié de ce volume. On aura

$$D = \frac{K \times l \times v}{2};$$

d'où

$$l = \frac{2D}{K \times v}.$$

150. *Maximum relatif de l'effet utile.* — Revenons maintenant au cas général où V et v surpassent beaucoup 2^m et 1^m. Si la vitesse v de la roue est obligée, et qu'il n'y ait que la vitesse d'arrivée V de l'eau sur la roue qu'on puisse modifier en faisant varier la position de l'orifice, notre équation ci-dessus montre que $(V - v)^2$ doit être nul ou qu'on aura $V = v$. La perte de travail sera réduite à

$$\frac{1}{2} Mv^2 = \frac{1}{2} MV^2;$$

c'est-à-dire que la chute sera diminuée de la charge du fluide sur l'orifice. Supposons, par exemple, que la vitesse de la roue v soit de 3^m, on prendra une chute de $\frac{3 \times 3}{2g} = 0^m,325$ environ. Si, au contraire, la vitesse de la roue n'était pas encore fixée, et que la position de l'orifice ou V le soit, il faudra rendre $\frac{1}{2} M \left\{ (V - v)^2 + v^2 \right\}$ le plus petit possible, comme pour les roues à palettes mues par dessous, en faisant $v = \frac{1}{2} V$ (3ᵉ partie, 136).

151. *Calcul de l'effet utile pour des vitesses quelconques.* — Si, sur la valeur générale de Pv, on fait les mêmes transformations qu'au nº 138, on aura

$$Pv = Mgh' + Mv (V - v).$$

On prendra les $\frac{6}{10}$ ou les $\frac{2}{3}$ du résultat calculé lorsque $V = \sqrt{2gh}$ est très-

grand, ou si h', hauteur du coursier circulaire, est seulement le tiers ou le quart de la hauteur disponible $h + h'$; et 0,80 si h' en diffère à très-peu de chose près et s'il y a peu de jeu dans le coursier. Dans le premier cas, les roues ne rendront, toute perte comprise, qu'environ 0,40 à 0,50 de l'effet total calculé sur la chute depuis le niveau du réservoir jusqu'au ressaut sous la roue, et que 0,60 à 0,70 dans le second, c'est-à-dire un sixième environ de plus que les roues à aubes courbes dont nous avons parlé ci-dessus.

152. *Roues à augets, recevant l'eau à une certaine hauteur.* — Les roues à augets sont composées de deux couronnes parallèles, ouvertes par le dessus, mais fermées hermétiquement en dedans par un plancher qui empêche l'eau de couler vers l'axe. Les palettes sont remplacées par des planchettes brisées *abc* (fig. 516) ou par des aubes courbes *a'b'c'*. L'intervalle compris entre les palettes, les couronnes et le tambour intérieur forme une espèce d'auge qu'on nomme *auget*. On varie beaucoup sur la meilleure forme des augets; le plus ordinairement *bc* est dans le prolongement du rayon et égal à la moitié de la largeur de chaque couronne. *ba* est tracé de façon que l'angle *bad* que cette droite forme avec la circonférence extérieure soit très-petit. Cependant, il y a une limite; cet angle ne peut être moindre que 30°; ou bien encore *ba* ne peut surpasser deux ou trois fois *bc*.

Quant au nombre des augets, il doit être assez limité pour que, entre la saillie *b* et l'aube suivante, il y ait un intervalle d'au moins 8 à 10 centimètres pour admettre l'eau. Sous ce dernier rapport, les aubes courbes en usage dans les bonnes constructions sont très-avantageuses; elles permettent de donner plus de capacité aux augets.

153. *Dispositions les plus avantageuses de ces roues; leur effet utile.* — La théorie des roues de côté et à palettes est également applicable aux roues à augets, et celles-ci rendent à peu près le même effet dans les mêmes circonstances. Si on veut que l'eau entre aisément dans les augets ou qu'elle ne soit pas rejetée au dehors, et qu'il n'y ait pas choc, il faut encore que l'eau arrive à peu près tangentiellement à la roue (fig. 517) autant qu'il est possible, condition à laquelle on satisfait bien en la faisant arriver vers le sommet par un petit bout de coursier et dans le sens du mouvement. Quand on est forcé de la faire arriver en avant ou de côté, l'eau doit être versée par la surface du réservoir et la roue avoir peu de vitesse, comme dans le cas des roues à palettes à coursier circulaire; ou bien l'eau doit être dirigée sur la roue par une buse adaptée à l'orifice, si la charge d'eau est un peu considérable sur son centre ou si la roue doit marcher vite.

Le calcul des effets de cette roue et les conditions de son meilleur établissement sont absolument les mêmes que pour les roues précédentes. Il paraît qu'elles rendent aussi 0,80 de l'effet théorique quand les vitesses V et v sont faibles, et 0,60 à 0,67 quand elles sont fortes ou que la roue est prise par son côté. On remarquera qu'ici les fuites dues au jeu se trouvent remplacées par

le versement de l'eau hors des augets, qui augmente avec la vitesse à cause de la force centrifuge. C'est par cette raison qu'on donne aux augets une capacité qui est au moins le double du volume de l'eau qui y arrive, ou même le triple si la roue doit marcher très-vite.

Soit n le nombre des augets de la roue, qui varie de 36 à 60 selon le diamètre, R le rayon, $\pi = 3,142$, v la vitesse de la circonférence moyenne ou le chemin parcouru dans une seconde, K le nombre de révolutions dans une minute ;

$$\frac{K.2\pi R}{60} = \frac{\pi.KR}{30} = v.$$

Soit q le volume d'un auget censé plein; le volume de tous les augets qui passeront dans un tour vaut nq; il sera dans une minute $K.nq$, et dans une seconde $\frac{K.nq}{60}$. Il faudra que la dépense de l'orifice dans une seconde soit au plus $\frac{1}{2}\frac{K.nq}{60}$, ou $\frac{K.nq}{120}$; appelant D cette dépense, on aura

$$D = \frac{K.nq}{120}, \text{ ou } q = \frac{120D}{K.n}.$$

Ordinairement on estime, d'après les expériences de Smeaton, que l'effet utile intégral transmis par les roues à augets brisés ordinaires est au *maximum*, les deux tiers du travail dû à la chute totale. Mais quand les augets sont courbes et profonds de manière à se vider tard, que la roue va lentement ou avec une vitesse de 1^m environ, et qu'il y a une petite tête d'eau, on peut compter sur près de 0,80, pourvu que la roue ne soit pas trop lourde.

Les roues à augets ne sont ordinairement employées que pour les fortes chutes de 3^m, et au-dessus; pour les petites chutes, il faudrait donner une trop grande largeur aux augets pour admettre l'eau et pour obtenir un travail un peu grand.

154. *Circonstances où l'on doit employer chaque espèce de roue hydraulique.* —Il est évident, d'après ce qui précède, que les divers roues hydrauliques ne sauraient être, dans tous les cas, employées indistinctement. On remarquera, en effet :

1° Que les roues à aubes planes ou courbes mues par dessous conviennent particulièrement aux chutes des pays de plaines qui excèdent rarement deux mètres à cause des frais qu'occasionneraient des digues plus hautes;

2° Que les roues de côté à coursier circulaire et prenant l'eau à la surface du réservoir conviennent aussi aux mêmes circonstances et à des chutes de trois mètres, pourvu que le mécanisme intérieur de l'usine n'ait pas besoin d'une grande vitesse;

3° Que pour les chutes de trois à huit mètres, les roues à augets recevant l'eau au sommet et se mouvant avec une faible vitesse, peuvent aussi être employées avec avantage; mais elles ne seraient plus guère applicables à des

chutes de douze à vingt mètres, puisqu'elles auraient des dimensions exorbitantes, et que leur arbre supporterait une charge considérable d'eau qui produirait de grands frottements. C'est dans ces dernières circonstances qu'on emploie les chaînes à godets, les chaînes à chapelet, les machines à colonne d'eau. Nous allons successivement examiner les deux premières espèces de ces récepteurs hydrauliques, parce que nous aurons plus loin occasion de parler des machines à colonne d'eau.

155. *Chaînes à godets.* — Les chaînes à godets (fig. 518) sont soumises aux mêmes lois que les roues à godets. Pour se faire une idée de leur système, qu'on imagine deux roues hexagonales ayant leurs centres sur la même verticale, dont l'une est placée à la hauteur du niveau supérieur et l'autre dans le bief inférieur. Si, de plus, ces roues sont enveloppées d'une chaîne sans fin dont les maillons sont égaux à la longueur des côtés des hexagones des roues et qui est armée à chaque maillon d'un godet, on voit que, quand un filet d'eau plus étroit que la largeur des godets vient à tomber successivement dans les godets de la branche de gauche, le poids de cette eau produira sur les deux roues un mouvement de droite à gauche, et que quand ces godets seront parvenus au bas de leur course, ils se videront pour remonter à vide par la branche droite de la chaîne et se remplir de nouveau dès qu'ils se seront présentés à l'écoulement du filet d'eau. Ainsi que nous l'avons dit, il faut que le filet soit plus étroit que la largeur des godets. L'arbre qui communiquera le mouvement à la machine qu'on veut faire mouvoir, peut être indistinctement placé à l'axe de la roue supérieure ou de la roue inférieure. Il est évident que l'eau tombe dans les godets avec une vitesse acquise, et que ceux-ci fuient devant le filet avec une vitesse différente. Il y a donc choc et perte de force vive. Arrivée dans ces godets, l'eau y agit par son poids et n'a plus que la vitesse des roues ou de la chaîne. Cet exposé prouve que le choc à l'arrivée de l'eau devant être le moindre possible, ainsi que sa force vive à sa sortie, il convient que la vitesse des chaînes soit très-faible, ainsi que celle d'arrivée de l'eau; et qu'en même temps ces deux vitesses soient égales. Ces vitesses doivent être, autant que possible, réduites à un mètre. Comme l'eau se vide presque au bas, il y a très-peu de déchet dans la chute pour cette dernière circonstance.

156. *Chaînes à chapelets.* — Dans les chaînes à chapelets (fig. 519), les deux roues sont remplacées par deux étoiles évidées, et les godets par des disques de bois recouverts d'une plaque de cuir dont le diamètre est plus grand. La chaîne sans fin, après avoir traversé le réservoir supérieur, passe dans un tuyau dont le jeu est assez grand, et ensuite dans un autre tuyau inférieur bien alézé et dont le diamètre, plus petit que celui des plaques de cuir, force celles-ci à se relever de manière à retenir l'eau au-dessus de chaque disque. Ici les rondelles n'ont qu'un pied d'intervalle. La quantité de travail du moteur est mesurée par le produit de la vitesse de la chaîne qui multiplie le poids d'une colonne d'eau, dont la base est le diamètre du tuyau le plus

étroit, et dont la banteur est celle du niveau du réservoir supérieur au-dessus du débouché inférieur du tuyau dans lequel la chaîne a pénétré. Ce travail diffère peu de celui qui est transmis à la machine.

157. *Roues à palettes pendantes, mues dans un courant indéfini* — On nomme courant *indéfini* celui dont la largeur et la profondeur sont très-grandes par rapport aux dimensions des ailes des roues qu'on veut y faire mouvoir. Tel est le cas des roues établies sur les grandes rivières. Elles sont montées sur des bateaux accouplés ou sur des pilotis (fig. 520). Les ailes ont une longueur de trois à quatre mètres; leur hauteur est de $0^m,50$ à $0^m,80$, ou plutôt elle est dans le sens du rayon d'un cinquième à un qnart, au plus, de la longueur de ce rayon. Les roues baignent dans le liquide d'un quart ou d'un tiers au plus de leur rayon, de sorte que les aubes sont entièrement plongées dans le courant.

Le nombre des ailes est ordinairement de douze. Bossut a trouvé qu'il était plus avantageux d'augmenter ce nombre, et il le porte de dix-huit à vingt-quatre.

Enfin, les ailes sont supportées chacune par un bras partant de l'arbre, et tous les bras sont reliés entre eux par des cercles de fer près des ailes. Il est bon d'incliner celles-ci un peu en avant sur le rayon, en écartant du côté d'amont leur partie extérieure hors de celui-ci. Nommant ici v la vitesse moyenne de la partie plongée des ailes, V la vitesse du courant à la surface mesurée avec un flotteur, Pv l'effet utile, A la surface d'une seule aube supposée choquée dans sa position verticale en vertu de la vitesse relative $V-v$, on admet que la pression produite par ce choc est proportionnelle au poids d'un prisme de fluide de base A et de hauteur $\frac{(V-v)^2}{2g}$; et, si on se rappelle que le poids dn mètre cube d'eau est de 1000 kilogr., on aura

$$P = K.1000\,A\frac{(V-v)^2}{2g},$$

et

$$Pv = K.1000\,A\frac{(V-v)^2}{2g}.v.$$

K est un coefficient relatif à la résistance absolue du fluide qui choque les aubes (Cours de la 1[re] année, § 199), et qui sert à corriger la formule d'après l'expérience.

158. *Valeur du coefficient de résistance des aubes.* — Il faut distinguer le cas où les aubes sont entièrement plongées dans l'eau de celui où elles n'y sont plongées qu'en partie. Dans ce dernier cas, on ne prend dans le calcul pour A que la partie plongée de la surface de l'aube, mais aussi le fluide forme en avant un remous qui pèse sur l'anbe et doit augmenter la pression (fig. 521). On conçoit alors pourquoi le coefficient K doit être un peu plus fort. D'après les expériences de Bossut et de Boistard sur les aubes plongées

en partie dans un courant, ce coefficient s'élève à tout près de 3. Mais, quand les aubes sont plongées entièrement, le remous n'a plus lieu et K paraît être au-dessous de la valeur précédente, sans cesser d'être supérieur à 2. M. Poncelet a fait, en 1825, sur trois moulins de bateaux établis à Lyon sur le Rhône, des expériences qui confirment que la valeur de K demeure comprise entre 2 et 3 pour le cas des ailes entièrement plongées. Ces ailes avaient moyennement 2 mètres carrés de surface, ou $2^m,60$ à $3^m,20$ de largeur horizontale sur $0^m,65$ à $0^m,75$ de hauteur; leur extrémité inférieure était plongée d'environ $1^m,20$ au-dessous de la surface de l'eau; elles étaient au nombre de douze seulement et montées sur des roues de $4^m,5$ à 6^m de diamètre.

La vitesse mesurée au centre de pression était d'un tiers à la moitié de celle du courant; cette dernière mesurée à la surface étant environ $1^m,30$ à 2^m. On a déterminé l'effet utile en admettant que la mouture d'un kilogramme de blé équivalait à une dépense de travail de $6700^{k.\,m.}$ environ sur la roue hydraulique, résistances comprises; les valeurs du coefficient K sont demeurées comprises entre 2,50 et 3,10, et ont donné pour valeur moyenne $K = 2,80$. On pourra donc adopter ce nombre avec confiance pour les roues à ailes pendantes des moulins établis sur bateaux, en observant qu'ici les ailes se mouvaient entre les corps de deux bateaux qui formaient une sorte de coursier laissant beaucoup de jeu; ce qui a dû augmenter un peu la vitesse générale du courant, ainsi que la valeur de K. Pour des roues se mouvant dans un fluide pour ainsi dire indéfini, il est probable que K ne surpasserait guère 2,50. L'expérience semble prouver d'ailleurs que ce coefficient ne dépend pas de l'étendue absolue de la surface des ailes.

159. *Vitesse de la roue pour le maximum d'effet.* — Quant à la vitesse v la plus avantageuse à leur imprimer, elle paraît devoir être comprise entre le tiers et la moitié de la vitesse V du courant, conformément à ce qui a été observé sur les moulins du Rhône, où une longue pratique a dû conduire au résultat le plus avantageux possible. Cette proportion est aussi justifiée par les résultats des expériences de Bossut et de M. Christian, qui ont trouvé $v = 0,40\ V$, environ, pour la vitesse la plus convenable de la roue à ailes. Il serait facile de prouver d'ailleurs, d'après les formules ci-dessus, que théoriquement elle devrait être $\frac{1}{3}$ V, quantité inférieure à celle que donne l'expérience et qu'on doit réellement adopter dans la pratique.

160. *Roues à rames servant à mouvoir les bateaux.* — Ces roues sont disposées à peu près comme les précédentes sur les flancs du bateau (fig. 522), et sont alors au nombre de deux. Quelquefois aussi on les place à l'arrière ou à la poupe du bateau, mais cette disposition a été reconnue moins avantageuse. Ici le bateau n'est point immobile, et les roues, au lieu de recevoir l'action du courant, sont destinées à faire cheminer le bateau en avant, en frappant le fluide. Le mouvement leur est communiqué par une machine et

par un moteur quelconque, établis dans l'intérieur du bateau. Déjà anciennement on avait appliqué un pareil système aux bateaux servant de bac; le moteur consistait dans un ou plusieurs chevaux faisant tourner un manége. Récemment on y a appliqué les machines à vapeur qui ont permis d'entreprendre, avec le mécanisme des roues à rames, des voyages de long cours sur la mer et sur les fleuves. Avant d'être parvenu au point actuel de perfection, on a fait beaucoup de tentatives qui ont été infructueuses, parce qu'on en ignorait la théorie. Aujourd'hui on est plus avancé sur cette science, grâces aux observations et recherches de MM. Marestier et Navier.

161. *Travail des roues motrices.* — Nommons U la vitesse absolue de rotation des roues à rames au centre des ailes, A l'aire totale des ailes en n'en prenant qu'une pour chaque roue ou deux pour les deux roues ensemble, V la vitesse naturelle du courant, et v la vitesse du bateau par rapport aux rives. Supposons d'abord que le bateau remonte le courant avec cette vitesse v; les ailes, si elles ne tournaient pas, seraient animées de la vitesse v du bateau, et elles seraient choquées par le courant avec la vitesse $V + v$. Mais comme elles fuient en sens contraire de la vitesse v du bateau, en vertu d'un mouvement de rotation qui leur donne la vitesse U, elles choquent le fluide avec l'excès $U - (V + v)$ de leur vitesse propre U et de la vitesse relative $V + v$. On peut encore raisonner en observant que, si le bateau était immobile, les aubes, en tournant avec la vitesse U dans le sens de la vitesse V du courant, choqueraient le fluide avec la vitesse $U - V$. Mais, comme le bateau marche avec la vitesse v contraire à U, c'est comme si le courant était animé de la vitesse $V + v$, le bateau restant immobile.

Maintenant, puisque les ailes choquent le fluide avec la vitesse $U - V - v$, la résistance qu'elles éprouvent de sa part sera mesurée (Cours de la 1re année, §§ 199 et suivants) par une colonne de fluide ayant A pour base et $\frac{(U - V - v)^2}{2g}$ pour hauteur, et dont le poids est $100^k \times A . \frac{(U - V - v)^2}{2g}$.
En multipliant ce poids par un coefficient K que donne l'expérience, et en nommant P la pression exercée par les ailes sur le fluide, on aura

$$P = KA . 1000 . \frac{(U - V - v)^2}{2g} \text{ kilogr.}$$

La réaction contre les aubes, qui provient de l'eau, étant égale et contraire à P, le bateau se trouvera poussé en avant avec cet effort, de même que si un homme agissait avec un bâton ferré. Or, cet effort doit précisément égaler la résistance qu'éprouve le bateau à remonter le courant. Soit donc A' la section transversale la plus grande de la partie plongée du bateau qui remonte le courant avec la vitesse relative $V + v$; il est clair que cette dernière résistance aura pour valeur $K'A' . 1000 . \frac{(V + v)^2}{2g}$, K' étant un coefficient de la ré-

sistance relative à la forme du bateau et plus particulièrement de la proue ; c'est-à-dire qu'on a aussi

$$P = K'.1000\,A'.\frac{(V+v)^2}{2g} = K.1000\,A.\frac{(U-V-v)^2}{2g},$$

ou

$$K'A'(V+v)^2 = KA(U-V-v)^2.$$

On tire $\frac{K'A'}{KA}(V+v)^2 = (U-V-v)^2$.

ou enfin

$$(V+v)\sqrt{\frac{K'A'}{KA}} = U - V - v).$$

Nous représenterons la quantité $\sqrt{\frac{K'A'}{KA}}$ par m. Il sera facile de la calculer dans chaque cas particulier d'après ce que nous dirons plus loin. Ainsi

$$m(V+v) = U - V - v,$$

et, par conséquent,

$$U = (m+1)(V+v,$$

Si on halait le bateau du rivage par des hommes ou par des chevaux, leur travail par seconde serait évidemment

$$Pv = K'.1000\,A'.\frac{(V+v)^2}{2g}v:$$

car le chemin parcouru par le point d'application du halage serait le même que celui qui est parcouru par le bateau par rapport aux rives. Dans la réalité, les hommes dépenseraient un peu plus de travail à cause de l'obliquité du tirage par rapport à la direction du courant, et parce que les traits traînent à terre ou dans l'eau ; mais on peut négliger cette circonstance qui n'augmente probablement pas le travail d'un dixième de sa valeur.

Le même travail serait encore évidemment dépensé par des hommes qui agiraient avec des bâtons ferrés contre le fond de l'eau, de dessus le bateau, ou qui tireraient sur un câble fixé à une ancre. Or, il ne faut pas croire que ce travail est le même que celui que doit dépenser la machine qui met en mouvement les ailes. Car, bien que l'effet à appliquer au centre des aubes soit aussi P, cet effort dans une seconde décrit la vitesse U de la roue, en sorte que le travail à dépenser par la roue sera

$$PU \text{ ou } K'.1000\,A'.\frac{(V+v)^2}{2g}.U;$$

ou bien, à cause de la valeur $U = (m+1)(V+v)$, on aura, pour le travail de la roue,

$$K'.1000A'.\frac{(V+v)^2}{2g}\times(m+1)(V+v)$$
$$= \frac{K'.1000\,A'}{2g}(1+m)(V+v)^3.$$

Ce dernier travail est plus grand que celui du halage dans le rapport de U à v, ou de $(m+1)(V+v$ à w, le facteur P étant le même de part et d'autre.

On voit aussi que le travail de PU de la machine, non compris les frottements, croît comme le cube de la vitesse relative $V+v$ du bateau par rapport au courant que le bateau remonte. Par exemple, dans la mer, sur un lac, ou à l'embouchure des grands fleuves où la vitesse du courant est faible, V peut être censé zéro, $V+v$ se réduit à v, vitesse du bateau, et le travail croît comme v^3 ; tandis que sur une rivière dont la vitesse $V=2v$, ou est le double de celle du bateau, le travail est proportionnel à $(V+v)^3, = 27v^3$, c'est-à-dire vingt-sept fois plus considérable. Ces réflexions serviront à faire entrevoir la différence qu'il y a entre le travail nécessaire à dépenser sur les lacs et sur les rivières rapides, telles que le Rhône, la Moselle.

Si, au lieu de remonter le courant, le bateau le descendait, on trouverait, en répétant tous les raisonnements ci-dessus, que la vitesse relative du fluide et du bateau qui marche plus vite que lui, serait $v-V$ au lieu de $V+v$; quant à celles des ailes qui tournent en sens contraire du mouvement du bateau, elle serait $U+V-v$, au lieu de $U-V-v$. Car si le bateau était immobile, cette vitesse relative des ailes deviendrait $U+V$, et comme il marche, ainsi que les ailes, dans le sens du courant, avec la vitesse v, la première est diminuée de cette dernière, ou devient $U+V-v$. D'après cela, on trouvera, pour le cas dont il s'agit,

$$P = K'.1000\,A'.\frac{(v-V)^2}{2g},$$

$$U = (m+1)(v-V),$$

et $$PU = \frac{K'.1000\,A'(1+m)}{2g}.(v-V)^3,$$

formules daus lesquelles il n'y a de changé que $V+v$ qui est devenu $v-V$.

162. *Valeurs des coefficients K' et K, relatifs à la résistance d'un bateau et des ailes.* — M. Navier, à qui nous empruntons les théories précédentes, estime que la valeur du coefficient K', relatif à la résistance d'un bateau, est comprise entre 0,20 et 0,30 pour les bateaux bien proportionnés dans toutes leurs parties, et qu'elle peut s'élever jusqu'à 0,50 pour les bateaux ordinairement employés sur les rivières à fond plat, et qui sont moins avantageusement disposés que ceux qui naviguent sur la mer et sur les lacs profonds. Pour la Moselle, par exemple, on fera $K'=0,40$ environ.

Quant à la valeur du coefficient K de résistance des ailes, M. Navier la suppose égale à 2,50. D'après des expériences que M. Poncelet a faites, en juin 1826, sur les roues à ailes d'un bateau à vapeur projeté pour la navigation de la Moselle, par M. Sallangre, ancien officier du génie, et où il a mesuré au dynamomètre de Régnier l'effort avec lequel le bateau tendait à

être entraîné par l'action des ailes en mouvement dans une eau tranquille ; dans ces expériences, dis-je, K a varié depuis 2,1 jusqu'à 3,5 et même 3,6 pour des vitesses du centre qui ont varié entre $1^m,25$ et $0^m,85$ par seconde ; la valeur moyenne a été de 3,2. Mais on remarquera qu'ici les choses ne se passaient pas tout à fait comme dans le cas où le bateau eût été entièrement libre ; de plus les ailes, qui avaient environ $0^m,38$ de hauteur sur $3^m,30$ de longueur totale, étaient disposées en arrière du bateau, et il y a lieu de croire que K doit être un peu moindre dans les circonstances ordinaires, ainsi que M. Navier le suppose.

163. *Remarques sur les moyens de diminuer les résistances.* — On remarquera d'ailleurs que ce qui précède suppose les ailes dirigées au centre de la roue, et qu'alors ces ailes choquent le fluide obliquement et le soulèvent en arrière en se retirant. Or, il est aisé de voir qu'une portion du travail qui leur est appliqué, est consommée en pure perte pour l'effet utile ; l'effort exercé dans une direction horizontale, et qui n'est que la composante horizontale des pressions réelles exercées par le fluide, contribue seul à faire marcher le bateau. Pour éviter ces décompositions, on a imaginé de disposer les roues de façon que les ailes restent constamment verticales ou se meuvent parallèlement à elles-mêmes. C'est à quoi on parvient en montant les ailes sur deux jantes excentriques et de même diamètre, dont les plans sont parallèles et dont les centres respectifs sont compris dans un même plan vertical, perpendiculaire à ces deux plans. On conçoit, en effet, que si chaque aile est attachée à deux rayons parallèles de ces jantes, avec deux charnières qui lui permettent de conserver la position que lui affecte cette combinaison géométrique, cette aube, pour des angles égaux décrits par les deux jantes, conservera toujours son parallélisme. Ce système donne d'ailleurs lieu à des frottements énormes.

En examinant la valeur ci-dessus du travail PU dépensé par les roues, on verra que V et v, ainsi que tout ce qui concerne le bateau, c'est-à-dire K' et A' restant les mêmes, on peut réduire cette dépense en diminuant m ou $\sqrt{\frac{K'A'}{KA}}$, ou en augmentant la surface A des aubes. Mais on est limité par l'embarras de les placer commodément sur le bateau. Il faut, d'ailleurs, que leur hauteur soit au plus le quart ou le cinquième du rayon. Quant à la longueur, elle est du double ou triple seulement de la hauteur pour une même roue, afin d'éviter les trop grandes saillies en dehors des flancs du bateau.

XIX.

MOULINS A VENT.

164. *Idées sur les divers moulins mus par le vent.* — On distingue diverses sortes de moulins à vent : les uns tournent autour d'un axe vertical, et les autres autour d'un axe horizontal. Ces derniers, malgré les inconvénients qu'ils offrent à certains égards, sont jusqu'à présent les seuls dont on fasse usage dans la pratique, parce qu'à dimensions égales ils produisent un effet qui est au moins octuple de celui des autres. Cette différence est due à ce que, dans le moulin à axe horizontal, la surface totale des ailes est en prise au vent et l'est d'une manière utile pour l'effet. Dans les moulins à axe vertical, au contraire, il n'y a qu'une aile qui reçoive l'action du vent dans la direction même du mouvement, et si les autres ailes sont à la fois en prise, les actions du vent sur elles occasionnent des résistances qui détruisent une partie de l'effet. Tel est le cas des roues qu'on nomme *panémores* (fig. 523) et dont les ailes sont formées de surfaces coniques qui présentent à l'action du vent tantôt leur concavité et tantôt leur convexité, de telle sorte que la roue ne marche qu'en vertu de l'excès de l'une des actions sur l'autre.

Dans les moulins dits *à la polonaise* (fig. 524), l'axe vertical de la roue est armé de plusieurs ailes rectangulaires qui tournent dans une enveloppe cylindrique dont une partie est supprimée pour permettre l'accès au vent dans la direction la plus convenable.

La disposition la plus ingénieuse dans les moulins à axe vertical est celle qui consiste dans des ailes verticales rectangulaires recevant de l'arbre un mouvement tel qu'elles s'orientent de la manière la plus avantageuse dans leur mouvement de transport autour de l'axe ; mais ce système exige des combinaisons assez compliquées. Il ne sera ici question que des moulins ordinaires à axe horizontal dont l'effet a été étudié par Smeaton et par Coulomb.

165. *Moulin à axe horizontal.* — La roue d'un moulin à axe horizontal (fig. 525), qu'on nomme *volant*, porte quatre bras ou rayons de trente-six pieds de longueur environ, perpendiculaires à l'arbre du mouvement et sur lesquels est une aile plus ou moins inclinée par rapport au plan du mouvement de la roue. Ordinairement, on donne à cette aile la forme d'un rectangle, et au lieu de la composer d'un seul plan, on la construit en surface gauche dont les éléments sont perpendiculaires à la direction du bras correspondant. Ce bras est lui-même à peu près rectiligne, de façon que la surface des voiles appliquées sur les lattes qui représentent les génératrices de cette surface, offre une certaine concavité à l'action du vent. L'arbre doit être

toujours parallèle à la direction du vent, et comme la nature des vents qui soufflent dans les pays de plaines est telle que leur direction fait avec l'horizon un angle de 18°, c'est pour cette raison que l'arbre est aussi tenu incliné sous cet angle. Enfin, les bras sont plus gros près de l'arbre qu'aux extrémités, et les lattes qui reçoivent les voiles sont fixées perpendiculairement à chacun de ces bras.

Si l'arbre doit être toujours dirigé vers le vent, il faut évidemment pouvoir l'orienter. On se sert à cet effet d'un grand levier qui entraîne la charpente supportant la machine autour d'un axe vertical fixe; quelquefois même le moulin porte un voile du côté opposé à l'arbre et qui force la machine, par l'action du vent, à s'orienter d'elle-même. Pour concevoir comment l'action du vent fait tourner la roue, il faut remarquer que cette action se décompose en deux autres, l'une dans le sens de la voile dont l'effet est nulle et l'autre perpendiculaire à la voile; de cette dernière composante, on conclut la pression reçue par la voile. Mais cette pression elle-même se décompose en deux nouvelles actions, dont l'une, parallèle à l'axe, ne peut produire aucun effet, et dont l'autre, située dans le plan du mouvement, fait tourner l'aile. Si deux ailes opposées étaient inclinées dans le même sens par rapport au plan du mouvement, les pressions qu'elles éprouveraient, tendraient à faire tonrner l'arbre dans deux directions contraires, de façon que ce dernier ne pourrait pas se mouvoir : voilà pourquoi ces inclinaisons seront égales, mais contraires, pour deux ailes opposées.

166. *Établissement du moulin à axe horizontal.*— Sans nous livrer à des calculs théoriques, lesquels font voir que l'angle des éléments des ailes avec l'axe de rotation est d'autant plus petit que leur distance à l'axe est elle-même plus petite, nous nous bornerons à ce que les expériences de Smeaton et Coulomb ont appris sur l'établissement des moulins à vent.

1° *Figure des ailes.*— Les ailes étant rectangulaires, la forme la plus avantageuse est celle des ailes dites *à la hollandaise* (fig. 526), qui offrent au vent une surface légèrement concave, et dont les éléments sont disposés ainsi qu'il suit :

Concevons le rayon de l'aile partagé en $6+\frac{4}{6}$ parties, le premier élément à partir du centre à une distance égale aux cinq tiers de l'unité des divisions étant désigné par le n°1, et celui qui répond à l'extrémité de l'aile par le n°6.

TABLEAU des Éléments des ailes du moulin à axe horizontal.

NUMÉRO des ÉLÉMENTS.	ANGLE qu'ils font avec L'AXE.	ANGLE qu'ils font avec le plan du MOUVEMENT.	OBSERVATIONS.
	Degr. sexagésimaux.	Degr. sexagésimaux.	
1	72°	18°	
2	71	19	
3	72	18	Milieu de l'aile.
4	74	16	
5	77 ½	12 ½	
6	83	7	Extrémité.

La largeur de l'aile ne doit pas excéder le quart de sa longueur ; elle en est ordinairement le cinquième ou le sixième. L'expérience a appris qu'on doit plutôt diminuer l'angle des éléments avec le plan du mouvement que l'augmenter. D'après Smeaton, les ailes qui vont en s'élargissant vers leurs extrémités paraissent être plus avantageuses que les autres à dimensions égales. La figure qui réussit le mieux est celle d'un trapèze (fig. 527), formé en plaçant à l'extrémité du rayon un barreau égal au tiers de ce rayon, et partagé au point où il le coupe dans le rapport de 3 à 2. Les inclinaisons des éléments transversaux restent les mêmes que ci-dessus. Ainsi, on a

$$AB = \frac{1}{3}\,CO, \quad BC = \frac{3}{5}\,AB, \quad \text{et} \quad AC = \frac{2}{5}\,AB.$$

2° *Vitesse des ailes par rapport à celle du vent.* — Si on suppose les ailes construites comme ci-dessus, on doit, pour le meilleur effet, maintenir la vitesse de rotation dans un rapport constant avec celle du vent. Cette vitesse de rotation, mesurée à l'extrémité de l'aile, doit être, d'après Smeaton, égale à 2,6 ou 2,7 fois celle du vent ; ce qui s'accorde avec les expériences de Coulomb sur les moulins belges, desquels ont déduit le rapport 2,50 à 2,60.

3° *Travail transmis par les ailes.* — Les ailes étant établies, toujours suivant la méthode hollandaise, et leur vitesse étant dans le rapport 2,60 assigné avec celle du vent, le travail transmis croît comme la surface des ailes. Il croît aussi un peu moins rapidement que le cube de la vitesse du vent, de sorte que celle-ci devenant double, il s'en faut de $\frac{1}{20}$ que le travail transmis ne soit octuple. On peut négliger cette différence, et alors on aura pour le travail transmis dans une seconde, d'après les expériences de Smeaton et de Coulomb,

$$Pv = 2{,}60 \,.\, VP = 0{,}13 \,.\, A \,.\, V^3 \text{ kilogrammètres},$$

formule dans laquelle P est l'effort en kilogrammes à l'extrémit é des ailes et dans le sens du mouvement de rotation de cette extrémité, V la vitesse du vent en mètres, A la snrface d'une *seule* aile en mètres carrés. On n'a pas eu égard dans les expériences, à la variation de densité de l'air selon la température; mais elle modifiera peu les résultats, qui seront toujours suffisamment exacts pour la pratique. D'ailleurs, au moyen des données ci-dessus, on aura tout ce qu'il faut pour faire l'établissement des moulins à vent, quand on connaîtra la vitesse moyenne des vents régnants. La vitesse la plus convenable du vent pour le travail paraît être de 6 à 7 mètres. Si on veut que la machine marche en tout temps, on déterminera la surface A de l'aile pour $V = 2^m$; mais, alors, dans les jours de vents plus considérables, il faudrait replier les voiles en partie. Ces relations concernent d'ailleurs le *maximum* d'effet de la machine.

Smeaton a observé que lorsque les ailes ne sont pas chargées, ou tournent à vide, la vitesse que prennent leurs extrémités est en rapport constant avec celle du vent, de même que pour la charge qui répond au *maximum* d'effet; d'où il conclut un moyen assez simple de mesnrer la vitesse du vent. Ce rapport est 4 pour les ailes hollandaises et élargies; c'est-à-dire que, pour avoir la vitesse du vent, on devra diviser par 4 la vitesse de l'extrémité de l'aile, quand celle-ci tourne à vide.

XX.

MACHINES ALTERNATIVES MUES PAR L'EAU.

167. *Machine à colonne d'eau.* — On a parlé jusqu'à présent des récepteurs à mouvement continu, soit qu'il s'agisse de l'eau ou du vent. Ces mêmes récepteurs ont été également essayés pour la vapenr; mais, comme leur emploi paraît difficile pour ce dernier cas, la vapeur travaille d'ordinaire sur des machines alternatives. Il en est de même pour les fortes chutes d'eau de dix à vingt mètres; leur travail est reçu par une machine à piston, laquelle se nomme *machine à colonne d'eau*, et dont nous allons faire connaître les principales propriétés mécaniques.

La machine à colonne d'eau (fig. 528) consiste dans un corps de pompe A, fermé par le haut et par le bas, et en communication avec un autre corps de pompe BB beaucoup plus petit, par deux ouvertures supérieure et inférieure O et O'. P est le grand piston moteur dont la tige CD, tenue verticale par la combinaison du jen d'un parallélogramme (3e partie, 30), transmet un mouvement circulaire alternatif au balancier EF autour de son axe de rotation G. Ce mouvement circulaire alternatif se transforme, par l'intermédiaire de la

bielle FH et d'une manivelle HI, en un mouvement de rotation continu autour de l'arbre I d'un volant destiné à régulariser l'action alternative du moteur; et cet arbre transmet immédiatement le mouvement à la machine que l'on veut faire marcher. Quand le travail consiste à tirer l'eau du fond d'un puits, le corps de pompe A se trouve placé sur la verticale de ce puits; le piston moteur P porte une tige inférieure LM, armée d'un autre piston, lequel joue dans un corps de pompe U pour aspirer et élever les eaux qu'on veut extraire. On remarquera que les tiges du piston, à l'endroit où elles traversent le fond du corps de pompe, glissent dans ce qu'on nomme *boîte à étoupe* (fig. 529). C'est une espèce de cône creux adapté au fond du corps de pompe, dans lequel se meut la tige du piston, et qui est rempli d'étoupes imbibées d'huile qu'on presse avec des vis, au moyen d'un autre cône qui pénétre le premier.

Revenons à la manière dont le grand piston P reçoit son monvement vertical de va-et-vient. Le petit corps de pompe BB (fig. 528) communique par deux tuyaux de même diamètre N et N′ avec un tuyau vertical ou incliné TS, par lequel l'eau afflue d'un réservoir supérieur où le niveau XY est tenu constant, si la quantité d'eau qui y arrive est égale à celle qui tombe dans le tuyau TS. Cette eau doit arriver tantôt au-dessous du piston P et tantôt au-dessus, selon que ce piston monte ou descend, tandis que celle qui se trouve dans le grand corps de pompe du côté opposé au mouvement doit pouvoir être refoulée dans le corps de pompe BB, et de là s'échapper par un dégorgeoir Z. Ainsi, dans le cas où le piston P monte, l'ouverture inférieure O′ est en communication avec le tuyau TS; et l'ouverture supérieure O communique seulement avec le corps de pompe BB et avec son dégorgeoir. Dans le cas de la descente, c'est au contraire l'ouverture supérieure O qui communique avec le tuyau TS, et l'ouverture inférienre O′ avec le dégorgeoir Z. Il faut donc un système particulier pour que chaque ouverture inférieure ou supérieure soit alternativement en communication tantôt avec le tuyau TS de la chute motrice et tantôt avec le dégorgeoir Z, en même temps que l'autre communique soit avec ce dernier, soit avec le tuyan TS. Tel est l'objet des deux petits pistons *a* et *b* dans le corps de pompe BB, lesquels sont réunis entre eux par une tige commune *cd*. Tandis que le grand piston P monte, les deux petits pistons *a* et *b* occupent une position telle que leur face inférieure arase les parois des ouvertures O et O′; car de cette manière il y a communication immédiate 1° entre l'ean de la chute TS et la partie inférieure du piston P; 2° entre l'eau de la partie supérieure de ce dernier et le dégorgeoir; de plus, la communication entre le tuyau N et la partie supérieure P est fermée par le piston *a*. Lorsque le piston P va descendre, les deux petits pistons doivent prendre les positions ponctuées *a′*, *b′*; dès lors la communication du tuyau TS s'établit par le tuyau N et par l'ouverture O avec la partie supérieure du piston P, ainsi que la communication par l'ouverture O′ de la

partie inférieure du piston P avec le dégorgeoir; mais en même temps le petit piston inférieur dans sa position b' intercepte toute communication entre le bas du grand piston P et le tuyau N′ ou le tuyau de chute TS. On voit que c'est aux époques de la position la plus haute et de la position la plus basse du grand piston P, que doit s'opérer le déplacement simultané des deux petits pistons a et b. L'amplitude de ce déplacement est égal au diamètre de l'une des ouvertures O et O′ qui sont égales, plus l'épaisseur de l'un de ces petits pistons qui sont aussi égaux. Pour produire cet effet, la tige cd des deux petits pistons, tenue verticale par le guide K, est munie d'un renflement évidé dans lequel peut jouer un levier fg à articulation semblable à celui qui a été décrit à la fin du n° 30, et mobile autour de l'axe fixe i. Deux chevilles m et m', attachées à la tige CD du piston P, distantes entre elles d'une quantité égale à sa course, sont destinées à faire baisser, à la fin d'une montée, ou à faire monter à la fin d'une descente, les deux pistons a et b par l'intermédiaire du levier fg, dont ces chevilles rencontrent tour à tour l'extrémité.

168. *Idées sur le calcul du travail des machines à colonne d'eau.* — S'il n'y avait aucune résistance dans la machine, il est évident que le travail transmis à l'arbre du volant serait égal à celui de la chute. Si on désigne par q le poids de l'eau qui tombe par seconde, et par H la hauteur du niveau supérieur XY au-dessus du dégorgeoir Z, qH sera le travail de la chute dans une seconde. Mais il s'en faut que ce travail soit transmis intégralement à l'arbre du volant. Une partie est absorbée par le frottement du piston P, une autre partie par le frottement de l'eau contre les tuyaux, une troisième partie par les pertes de force vive dues aux étranglements et aux contractions, et une quatrième aux coudes. Enfin il y en a une cinquième partie due aux frottements du balancier, des articulations, de la bielle, etc. Examinons principalement les quatre premières espèces de pertes.

1° *Pertes dues au frottement du grand piston* P. — Le frottement d'un piston contre son corps de pompe est évidemment proportionnel à l'action qu'il exerce contre les parois. Celle-ci est non-seulement proportionnelle à la surface enveloppe latérale du piston, mais encore à la différence des pressions par unité de surface, auxquelles le piston est soumis par le haut et par le bas. C'est, en effet, en vertu de cette différence que les fuites de liquide tendent à s'opérer par le jeu ménagé entre le piston et le corps de pompe; il est donc naturel de supposer que cette différence soit aussi la mesure de la résistance que le piston oppose au passage du liquide ou du fluide, par unité de surface. Soient donc p et p' les pressions unitaires exercées sur les deux bases du piston. $p - p'$ sera la réaction par unité de surface qu'il doit au moins exercer contre les parois, et si je nomme R son rayon et e son épaisseur,

$$2\pi Re\,(p - p')$$

exprimera la totalité de ses pressions latérales. Comme les pressions p et p'

varient d'une position à l'autre du piston, on aura soin de considérer la position pour laquelle la différence $p - p'$ est la plus grande. Par exemple, dans le cas qui nous occupe, cette différence sera mesurée par le poids d'une colonne d'eau dont la hauteur est celle du niveau XY au-dessns de la base inférieure du piston P; et il est évident que cette différence sera la plus grande quand le piston occupe la position la plus basse. Si cette hauteur est de 20^{m}, la pression de cette colonne par mètre carré de surface sera 20×1000^{k}, ou $20\ 000^{k}$; de sorte que si $R = 0^{m},30$, et $e = 0^{m},12$, on aura

$$2\pi Re = 2 \cdot 3{,}14 \cdot 0^{m},30 \cdot 0^{m},12 = 0^{m.\,car},23.$$

La pression totale contre les parois ou

$$2\pi Re\,(p - p') = 0{,}23 \times 20000^{k} = 4600^{k}.$$

Connaissant cette pression totale, ainsi que le rapport f du frottement à la pression, rapport qui dépend de la nature des substances en contact, et qui est donné par les tableaux du n° 106, 2e partie,

$$2\pi Ref\,(p - p')$$

mesurera la résistance du frottement du piston. Mais, afin d'obtenir le travail qu'il absorbe dans une seconde, il faudrait connaître le chemin que parcourt ce piston dans cette unité de temps, c'est-à-dire sa vitesse. C'est ici le lieu de remarquer que cette dernière n'est pas constante, et qu'elle varie, comme celle de la manivelle, de manière à devenir nulle aux positions extrêmes, et la plus grande possible vers une position moyenne. Toutefois on peut, pour la pratique, s'en tenir à une vitesse moyenne du piston, en comptant le nombre de courses qu'il fait dans un temps donné, et en divisant le produit de ce nombre et de l'amplitude de chaque course par le nombre de secondes pendant lequel l'observation a duré. Le quotient ne sera autre chose que la vitesse moyenne du piston, vitesse que je nomme V; en sorte que le travail absorbé par son frottement dans nne seconde sera exprimé par

$$2\pi Ref\,(p - p') \times V.$$

2° *Résistance des tuyaux.* — Je supposerai que le tuyau TS, les tuyaux NN′, les ouvertures O et O′ qui amènent l'eau, ainsi que le dégorgeoir, le petit corps de pompe BB, ont même diamètre, en sorte que la vitesse de l'eau dans ces divers tuyaux sera partout constante et égale à v. Si je nomme a l'aire de leur section transversale, A celle du grand piston ou de son corps de pompe, on aura évidemment la relation

$$av = AV, \quad \text{d'où} \quad v = \frac{A}{a} \times V.$$

Cette relation est fondée sur ce qne la quantité d'eau qui arrive dans le grand corps de pompe est la même que celle qui s'éconle dans le tuyau. On a vu, d'ailleurs, que le travail absorbé par la résistance d'un tuyau pendant le temps que s'écoule un poids q de liquide (et ici c'est la seconde) était expri-

mé par $\frac{q}{g}\, n.\frac{\mathrm{CL}}{a}\, v^2$, formule dans laquelle $n = 0{,}9035$, C représente le contour de la section transversale du tuyau, a l'aire de cette dernière, L la longueur développée du tuyau, et v la vitesse dans ce tuyau. Si nous remplaçons v par $\frac{\mathrm{V}}{a} \times \mathrm{V}$, on trouvera, pour le travail que consomme dans une seconde la résistance des tuyaux, cette valeur

$$0{,}0035\,.\,\frac{\mathrm{C}}{a^3}\,.\,\mathrm{A^2LV^3} \times \frac{q}{g}$$

3° *Pertes de force vive dues aux étranglements et à la contraction.* — L'eau, en passant du réservoir supérieur XY dans l'orifice S, se contracte d'abord, et se dilate ensuite dans le tuyau, de sorte que si on nomme m le coefficient de contraction pour l'orifice S, et v la vitesse dans le tuyau, la perte de force vive due à cette contraction sera

$$\frac{q}{g}\left(\frac{1}{m}-1\right)v^2, \quad \text{ou} \quad \frac{q}{g}\left(\frac{1}{m}-1\right)^2\frac{\mathrm{A^2V^2}}{a^2},$$

qui correspond à une perte de travail représentée par

$$\frac{q}{2g}\left(\frac{1}{m}-1\right)^2\frac{\mathrm{A^2V^2}}{a^2}.$$

Lorsque l'eau passe du tuyau d'arrivée, sous le piston P, sa vitesse v dans le tuyau se réduit à V sous le piston, et elle éprouve par seconde une perte de force vive exprimée par

$$\frac{q}{g}(v-\mathrm{V})^2, \quad \text{ou par} \quad \frac{q}{g}\mathrm{V}^2\left(\frac{\mathrm{A}}{a}-1\right)^2,$$

qui correspond à une perte de travail dont la valeur est

$$\frac{q}{2g}\left(\frac{\mathrm{A}}{a}-1\right)^2\mathrm{V}^2.$$

En passant par l'orifice supérieur O, l'eau se contracte encore avant de reprendre la vitesse v; cependant la perte de force vive n'est pas ici assez sensible pour en tenir compte. Arrivée dans le petits corps de pompe BB, où elle conserve la vitesse v, si l'eau s'en échappait par une paroi mince latérale, sa force vive à la sortie serait $\frac{q}{g}\, v^2$. Mais, comme elle s'écoule par un bout de tuyau Z qui consomme un tiers de la force vive, on peut estimer que la perte sera ici

$$0{,}33\,.\,\frac{q}{g}\,.\,v^2, \quad \text{ou} \quad 0{,}33\,.\,\frac{q}{g}\,.\,\frac{\mathrm{A^2}}{a^2}\,.\,\mathrm{V}^2,$$

qui correspond à un travail

$$0{,}33\,.\,\frac{q}{2g}\,.\,\frac{\mathrm{A^2}}{a^2}\,.\,\mathrm{V}^2$$

La perte totale du travail due aux étranglements aura, par conséquent, pour valeur

$$\frac{qV^2}{2g}\left\{\left(\frac{1}{m}-1\right)^2\frac{A^2}{a^2}+\left(\frac{A}{a}-1\right)^2+0,33\cdot\frac{A^2}{a^2}\right\}$$

4° *Perte de travail due aux coudes.* — La perte de force vive occasionnée par un coude, et dans une seconde, est, d'après Dubuat, exprimée par le formule

$$\frac{q}{g}v^2(0,0039+0,0186\cdot r)\frac{s}{r},$$

dans laquelle v est la vitesse dans le coude ou le tuyau, r le rayon moyen de l'arc du coude, et s le développement moyen de l'arc du coude. Si le coude est rectangulaire, on prend pour arc moyen s celui qui, de l'angle rentrant comme centre, est décrit avec un rayon égal à celui du tuyau et qui est tangent aux axes du tuyau, de façon que le rayon moyen du coude est égal au rayon du tuyau. Cette perte de force vive, à cause de $v^2=\frac{A^2}{a^2}\cdot V^2$, correspond à une perte de travail par seconde ayant pour valeur

$$\frac{q}{2g}\cdot V^2\cdot\frac{A^2}{a^2}\ (0,0039+0,0186\cdot r)\ \frac{s}{r},$$

Il est entendu qu'on multipliera cette valeur par le nombre de coudes que l'eau traverse en passant dans les tuyaux, pour avoir la perte totale dont il s'agit.

Nous ne parlerons pas des pertes occasionnées par le frottement des articulations, du balancier, de la bielle, etc., attendu que ces calculs, qui nous conduiraient trop loin, sont fondés sur les principes que nous avons établis à cet égard dans la seconde partie du cours. Ce qui précède suffit pour faire voir toutes les causes qui diminuent le travail q. H de l'eau avant d'arriver à l'arbre du volant. L'effet utile dans les meilleures machines à colonne d'eau ne s'élève pas 0,50 du travail moteur, ou à 0,50 . qH; dans les machines ordinaires de Bélidor il n'excède pas 0,40 . qH.

XXI.

MACHINES A VAPEUR.

169. *Description de l'ensemble des parties d'une machine à vapeur.* — Les machines à vapeur sont organisées à peu près de la même manière que les machines à colonne d'eau; et comme nous avons expliqué, dans notre Cours de la 1re année, le mode d'action de la vapeur alternativement au-dessus et au dessous du piston, avec ou sans détente, ainsi que le rôle du

condensateur, il ne nous reste qu'à donner une idée sur l'ensemble des diverses parties de la machine.

ABDC (fig. 530) est un corps de pompe fermé dans lequel se meut le piston moteur P, qui communique le mouvement au balancier EF, puis à la bielle FG, puis enfin à la manivelle GH, montée sur l'arbre H, qui porte un volant régulateur.

LI représente le tuyau d'admission de la vapeur, partant de la chaudière et se rendant dans la capacité I, nommée *boîte de distribution*, parce que c'est là qne s'opère le jeu des soupapes qui donnent accès à la vapeur alternativement au dessus et au dessous du piston et qui la laissent échapper dans le condensateur X après son action sur ce piston. Ce condensateur est noyé dans une bâche d'eau froide. (Nous renverrons au cours de M. Dupin pour le détail du jeu de ses soupapes.)

Y est nne pompe simplement aspirante, dite *à air*, et mise en mouvement par un piston vertical attaché au parallélogramme du balancier; cette pompe rejette la vapeur et son eau de condensation, ainsi que l'air contenu par cette dernière, dans la bâche Z, d'où elle s'écoule à l'air libre par un canal de trop plein V.

U est une pompe aspirante et foulante qui puise de l'eau chande dans la bâche Z et la refoule dans un tnyau *u*, qui se rend dans la chaudière à vapeur; c'est la pompe *alimentaire* de la chaudière et qui sert à rendre à celle-ci l'eau de la vapeur qui lui est enlevée à chaque instant par le corps de pompe ABDC.

O est un corps de pompe ordinaire qui puise de l'eau froide plus ou moins bas dans le sein de la terre ou dans une rivière, et qui la verse par un tuyau O' dans la bâche enveloppant à la fois le condensatenr X et sa pompe à air Y. Souvent aussi cette pompe, qu'on nomme *pompe à eau froide*, refoule l'eau directement dans l'intérieur du condensateur X et devient *pompe d'injection*. Mais quand il y a nne bâche-enveloppe, ainsi que le suppose le dessin de la figure 530, l'eau froide est injectée par une pompe d'arrosoir *v*, au moyen d'un robinet *x* que manœuvre de haut en bas un levier mobile. Toutes les pompes sont mues par des tiges attachées au balancier. Quand la machine est destinée à puiser de l'eau, la pompe prend des dimensions plus grandes; rien n'est changé, quant au mécanisme. Seulement l'eau froide, dont l'élévation constitue le travail, est refoulée dans un réservoir à air, d'où elle s'élève ensuite par un tuyau d'ascension selon un jet continu, ainsi qu'il a été expliqué au chapitre XIII (*des pompes*).

Enfin, il arrive que dans les épuisements on supprime le volant et la bielle, qui ne serviraient qu'à régulariser le mouvement. Le balancier subsiste toujours, mais on profite de la suppression de la manivelle pour placer à l'extrémité correspondante la tige de la grande pompe O (fig. 532) à épuiser. On met alors le système en équilibre par des contre-poids Q; tout le surplus reste le même.

170. *Détails des chaudières.* — On emploie généralement deux espèces de chaudières, la chaudière *à tombeau* en forte tôle pour les machines à basse pression, et la chaudière en fonte pour les machines à haute pression.

La chaudière *à tombeau* due à Watt, est représentée (fig. 533) par son profil transversal. Elle a la forme d'un cylindre dont les arêtes sont horizontales et dont les bases sont verticales. Le contour de chaque base est convexe et demi-circulaire en dessus; il est concave des deux côtés comme en dessous. E représente la chaudière en tôle, A le cendrier, BB′ la grille. La flamme lèche d'abord le dessous de la chaudière qui est fort longue. Arrivée au bout, elle se partage par le moyen d'un diaphragme GG′; une partie va en C′, et l'antre en C. Ces deux parties reviennent le long des côtés par des tuyaux de conduite, se réunissent de nouveau en avant, et s'échappent par une cheminée générale. Souvent aussi la flamme se rend du foyer par le fond de la chaudière dans un seul conduit C à gauche; de là elle circule dans ce tuyau, passe en avant de la chaudière pour se rendre dans le conduit C′, à l'extrémité duquel se trouve une cheminée pour la recevoir.

La chaudière pour les machines à haute pression, inventée par Woolf, est en fonte ou en tôle forte. Elle consiste dans un cylindre horizontal E (fig. 534), en communication directe, par des tuyaux *aa*, avec deux autres cylindres plus petits GG, plongés dans le foyer et qu'on nomme *bouilleurs*. La flamme, après avoir léché la surface de ces bouilleurs et le dessous de la chaudière, se rend dans le tuyau latéral C, puis dans le tuyau latéral C′, et arrive enfin dans une cheminée placée à l'opposé du foyer.

171. *Usage des ouvertures pratiquées au sommet des chaudières.* — Le haut des chaudières porte plusieurs ouvertures dont il faut connaître l'usage; ce sont :

1° Le *trou d'homme*, espèce d'ellipse de 18 pouces sur 10, ordinairement fermée par une plaque métallique avec boulons, et qui n'est ouverte que pour réparer l'intérieur de la chaudière.

2° Une ouverture pour laisser échapper la vapeur dans un tuyau destiné à la conduire vers le piston moteur de la machine.

3° Une ou deux autres ouvertures *z* (fig. 535), portant la soupape de sûreté *y*, qui bouche l'ouverture hermétiquement au moyen de la pression exercée par un couteau *u* adapté à une romaine *lm* avec contre-poids Q, tournant en *m* sur un boulon fixe. Q est réglé ou posé sur la longueur *lm*, de façon que la soupape s'élève dès que la tension de la vapeur dans la chaudière surpasse une limite assignée. Souvent encore on remplace la sonpape de sûreté par des plaques fusibles à la température qui correspond au *maximum* de tension. Si nous revenons à la soupape de sûreté, nous voyons que le moment de la pression limite contre la base du petit massif retenu par le couteau *u*, serait égal au moment du poids Q, si les frottements n'altéraient cet équilibre. L'adhérence et les frottements deviennent, au bout d'un cer-

tain temps du repos de la soupape, tels que celle-ci peut cesser de s'ouvrir quand la vapeur est parvenue à sa tension limite.

4° Une autre ouverture pour faire arriver la vapeur dans le manomètre, qui sert à mesurer plus exactement la pression, que ne le fait le contre-poids des soupapes de sûreté. La valeur est conduite par un tuyau dans un réservoir à bain de mercure (fig. 536), dans lequel plonge un tuyau rempli d'abord d'une certaine quantité d'air sec. Tant que la vapeur est à la pression atmosphérique, la colonne de mercure dans le tube est au niveau de celui du réservoir. Mais, dès que la vapeur prend une tension plus grande, sa tension est mesurée par la hauteur de la colonne de mercure dans le tube, augmentée de la pression de l'air resserré entre cette colonne et le sommet du tube. Cette dernière tension se mesure au moyen de ce principe de Mariotte, que les pressions de cet air sont en raison inverse des volumes ou des hauteurs comprises entre le sommet du tube et le haut de la colonne.

5° Une ouverture très-petite garnie d'étoupe, servant à laisser passer la tige déliée qui supporte le flotteur F (fig. 537), dont les mouvements accusent la hauteur du niveau *cd* de l'eau dans la chaudière, et mettent en action un levier à contre-poids Q qui ferme ou ouvre le robinet R d'alimentation de la chaudière.

6° Enfin, une ouverture pour un dernier tuyau qui débouche dans l'eau même de la chaudière, au dessous du niveau *cd*, et qui lui apporte l'eau fournie par la pompe alimentaire.

Nous renvoyons pour plus de détails aux traités spéciaux; les notions précédentes suffisent pour se former une idée de l'ensemble et du jeu de la machine.

172. *Idées sur les précautions à prendre.* — Par l'action de la chaleur du foyer, l'eau entre en ébullition, et la vapeur se transforme au dessus du niveau *cd*. Lorsque le robinet, qui permet à volonté d'intercepter le tuyau d'arrivée de la vapeur dans le cylindre où se meut le piston moteur, est fermé la pression et la température de la vapeur dans la chaudière augmentent de plus en plus; mais dès que la vapeur a acquis le degré voulu de tension, ce qu'indique le manomètre, le chauffeur ouvre le robinet, la vapeur arrive alternativement au dessus et au dessous du piston moteur. Ce dernier dans son mouvement entraîne ainsi toute la machine.

Le robinet d'admission de la vapeur est mis en communication avec un régulateur à force centrifuge (3e partie, 47), lequel participe lui-même au mouvement de la machine, et est destiné à fermer ou à ouvrir le robinet d'admission selon que ce mouvement s'accélère ou se ralentit. Mais ce régulateur ne préserve point des dangers de l'élévation de tension qui survient dans la chaudière; la soupape de sûreté est seule chargée de ce soin; elle doit s'ouvrir quand la pression intérieure devient trop forte, et permettre à la vapeur de s'échapper. Cette circonstance arrive quand le chauffeur fait trop de feu.

Quelquefois la soupape de sûreté adhère contre le tuyau ou fonctionne mal ; de là il résulte des accidents. C'est pourquoi il faut que le chauffeur la fasse de temps en temps jouer, pour entretenir la mobilité de ses diverses parties.

Lorsque le flotteur ne marche point, ou qu'il éprouve des résistances accidentelles, il ne suit plus la descente de l'eau, celle-ci baisse dans la chaudière sans qu'on en ait aucun indice, et laisse à nu les parois exposées à la flamme. Ces parois, au lieu de se maintenir à la température de l'eau bouillante, comme cela a lieu tant qu'elles sont couvertes d'eau, passent au rouge sans cependant faire élever beaucoup la température de la vapeur. Mais quand ensuite le jet d'eau d'alimentation arrive sur l'enveloppe, ce jet se vaporise instantanément et développe une action très-énergique qui fait éclater la chaudière (voyez la notice de M. Arago, sur les explosions des machines à vapeur, insérée dans l'Annulaire de 1830 du bureau des longitudes). Beaucoup de soins et un bon chauffeur sont les moyens d'éviter de pareils accidents.

Quand une machine est puissante, on emploie deux ou trois chaudières séparées.

173. *Volumes de l'eau et de la vapeur dans la chaudière.* — Ces observations font voir que le niveau de l'eau dans l'état ordinaire doit s'élever, pour les chaudières, de quelque chose au dessus des conduites de la flamme. Ordinairement elles sont remplies d'eau de la moitié aux $\frac{6}{10}$ de leur hauteur; le surplus de leur capacité forme le réservoir de la vapeur. Ce dernier doit être assez grand pour que la soustraction de la vapeur à chaque coup de piston ne fasse pas trop varier la tension dans la chaudière. Voici comment on déterminera le volume de la partie de la chaudière qui forme réservoir de vapeur, d'après le volume de vapeur qui est introduit sur une machine à double effet et à détente.

Soit A la capacité de la chaudière, affectée à la vapeur; a le volume de vapeur introduit à chaque coup de piston dans le corps de pompe, volume mesuré par la portion de course du piston pendant laquelle la vapenr est reçue à plein sans détente. Soit na le volume de la course totale du piston, de sorte que la vapenr peut être considérée comme admise dans un temps qui est la fraction $\frac{1}{n}$ du temps total de la course. Au commencement de la course du piston, le volume de la vapeur dans la chaudière est A sous la pression p; mais au moment où la chaudière a fourni au piston un volume a de vapeur sous la tension p pendant la n^e partie de sa course, il n'a pu se former dans l'intérieur de la chaudière qu'un volume $\frac{a}{n}$ de nouvelle vapeur sous cette même tension. Ainsi, au moment où l'introduction de la vapeur sous le piston cesse, la vapeur dans la chaudière sous la tension p occuperait un volume $A - a + \frac{a}{n}$. Or, en réalité cette même quantité de vapeur

doit remplir la capacité totale A, et, par conséquent, conserver une tension p' inférieure à la tension première p. Cette tension inférieure p' s'obtient d'après le principe de Mariotte, au moyen de la relation

$$p : p' :: \mathrm{A} : \mathrm{A} - a + \frac{a}{n};$$

d'où on tire

$$p' = p \left\{ \frac{\mathrm{A} - a\left(1 - \frac{1}{n}\right)}{\mathrm{A}} \right\} = p \left\{ 1 - \frac{a}{\mathrm{A}}\left(1 - \frac{1}{n}\right) \right\}$$

$$= p - p \cdot \frac{a}{\mathrm{A}}\left(1 - \frac{1}{n}\right).$$

Donc,

$$p - p' = p \cdot \frac{a}{\mathrm{A}}\left(1 - \frac{1}{n}\right).$$

Si l'on veut que la variation de tension $p - p'$ soit seulement $\frac{1}{30}p$, on aura

$$\frac{1}{30} = \frac{a}{\mathrm{A}}\left(1 - \frac{1}{n}\right), \quad \text{ou} \quad \mathrm{A} = 30 . a\left(1 - \frac{1}{n}\right).$$

S'il n'y a pas de détente, n devient l'unité, et A est zéro. En effet, la vapeur qui, dans ce cas, se forme à l'intérieur, est précisément égale à celle qui s'échappe. Toutefois, comme il y a des intervalles pendant lesquels les robinets ne sont pas ouverts, on prendra, suivant Tredgold, $\mathrm{A} = 3a$, quand il n'y a pas de détente. Si la détente a lieu pour le quart du volume de la course totale du piston, comme dans les machines de Woolf, on fera $n = 4$, et $1 - \frac{1}{n} = \frac{3}{4}$ donc $\mathrm{A} = \frac{3}{4} 30a = 22\frac{1}{2}$ fois a, ou 5 fois environ le volume de la course totale du piston. Si $n = 3$, on trouve $\mathrm{A} = \frac{2}{3} 30a = 20a$, ou environ 6 fois le volume de la course totale. Enfin, si $n = 2$, $\mathrm{A} = 15a$ ou $7\frac{1}{2}$ fois le cylindre total.

174. *Relations entre la densité, la température, et la tension des gaz.* — Pour établir une machine à vapeur, on a différentes choses à calculer, telles que le poids de la vapeur à former, de la houille à brûler, l'effet utile transmis, l'eau nécessaire à l'injection, etc. Déjà nous avons enseigné dans le Cours de la 1re année § 187 et suivants, à évaluer le travail des pistons quand on connaît la tension et le volume de la vapeur introduite dans les corps de pompe, c'est pourquoi nous n'y reviendrons pas.

Qnant au poids de la vapeur formée dans un temps déterminé, il dépend de sa densité, et celle-ci est liée à la pression et à la température de cette vapeur. Mais, afin de faire connaître cette relation, nous commencerons à l'établir pour les gaz permanents, quoique ceux-ci, comme nous le verrons, diffèrent de la vapeur d'eau en quelques points.

Quand on connaît la tension et la température d'un gaz, ainsi que la densité de ce gaz à zéro de température et sous la pression atmosphérique ordinaire, on a fait voir, dans le Cours de la 1[re] année (§ 211), comment il était possible de calculer la densité de ce même gaz pour la tension et la température dont il s'agit. Mais, plns généralement, au lieu de partir de la densité du gaz dans les circonstances ordinaires de zéro de températnre et de la pression atmosphérique, on a besoin de passer de sa densité sous une température et sons nne pression quelconque, à la connaissance de sa densité sous une autre température et sous une autre pression données. Soit, par exemple, ϖ la densité ou le poids d'un mètre cube de gaz lorsque n est sa température et p sa tension par centimètre carré de surfacc, et soient ϖ', n', p' sa densité, sa température et sa pression dans un autre état, je dis qu'on pourra calculer ϖ au moyen de la formule

$$\varpi = \varpi' \frac{1+0,00375 \,.\, n'}{1+0,00375 \,.\, n} \times \frac{p}{p'}.$$

En effet, considérez un mètre cube de ce même gaz à zéro de température, soit p_0 sa pression correspondante, on trouvera, si p_0 correspond à la pression de 76 centimètres de mercure; on trouvera, dis-je, en cet état, son point ϖ_0 dans la table du § 40 du Cours de la 1[re] année. Maintenant, si de zéro la température s'élève de n degrés centigrades, sans que la pression p_0 change, le volume 1 deviendra, en vertu du principe de Gay-Lussac (§ 26, Cours de la 1[re] année) $1 + 0,00375 \,.\, n$. De plus, si la pression p_0 est augmentée et devient p, ce dernier, en vertu de la loi de Mariotte (§ 16, Cours de la 1[re] année), sera réduit à $(1+0,00375 \,.\, n)\frac{p_0}{p}$. Divisant par ce nouveau volume le poids du gaz qui n'en est pas moins tonjours ϖ_0, le quotient sera la densité ϖ de ce gaz, mais à la pression p et à la température centigrade n, en sorte qu'on aura

$$\varpi = \frac{\varpi_0 p}{(1+0,00375 \,.\, n)\, p_0};$$

Enfin, si la pression et la température du gaz, au lieu d'être p et n, étaient p' et n', sa nouvelle densité ϖ' sera telle qu'on aura

$$\varpi' = \frac{\varpi_0 p'}{(1+0,00375 \;\, n')p_0};$$

d'où on tire la proportion

$$\varpi : \varpi' :: \frac{\varpi_0 p}{(1+0,00375 \,.\, n)\, p_0} : \frac{\varpi_0 p'}{(1+0,00375 \,.\, n')p_0},$$

ou bien $$\varpi : \varpi' :: \frac{p}{1+0,00375 \,.\, n} : \frac{p'}{1+0,00375 \,.\, n'};$$

d'où on tire, comme on l'a énoncé plus haut,

$$\pi = \pi' \times \frac{1+0,00375 \, . \, n'}{1+0,00375 \, . \, n} \times \frac{p}{p'}.$$

175. *Caractères distinctifs de la vapeur d'eau. Relations entre sa tension et sa température.* — Revenons à la vapeur d'eau. Elle diffère des gaz permanents en ce qu'elle peut se condenser quand on la comprime ou qu'on la refroidit, et en ce qu'elle se forme dans tout espace en contact avec de l'eau.

Supposez une chaudière ou vase fermé, contenant de l'ean à une certaine température. Le vase étant en outre vide d'air, il se formera, au-dessus du liquide, de la vapeur dont la densité et la tension sont uniquement relatives à la température du vase et de l'ean.

On dit que l'espace est saturé, quand le liqnide ne fournit plus de vapeur dans cet espace sous la température qu'on considère; c'est de la vapeur *à saturation* ou au *maximum* de tension. Car si on imagine qu'on veuille augmenter la tension de la vapeur ainsi formée, en réduisant l'espace avec un piston, il se condensera une certaine portion de vapeur, et la tension de la portion restante demeurera la même, c'est-à-dire telle que le comporte la température qui est supposée n'avoir pas changé.

Si la température vient à baisser, une portion de la vapeur se condense jusqu'à ce que la densité de la portion restante soit réduite à celle qui répond à la nouvelle température et à la nouvelle tension; car la tension diminue, aussi bien qu'elle augmente, avec la température. Ainsi, les vapeurs diffèrent d'un gaz permanent, en ce qu'on n'est pas le maître de faire varier à volonté leur tension et leur température. L'expérience seule peut faire connaître la loi qui, dans ce phénomène, lie la température et la tension de la vapeur saturée. Nous allons, à cet égard, rapporter le tableau des expériences entreprises et publiées en 1829 par l'Académie des sciences.

TABLE des forces élastiques de la vapeur d'eau et des températures correspondantes de 1 à 24 atmosphères, d'après l'observation, et de 24 à 50 atmosphères, par le calcul.

ÉLASTICITÉ de la vapeur exprimée en atmosphères de 0m,76 de mercure.	ÉLASTICITÉ en mètres de mercure à 0 degrés.	TEMPÉRATURE correspondante. [Thermomètre centigrade].	PRESSION sur un centimètre carré.
	m	°	k
1	0,76	100,00	1,033
1 ½	1,14	112,20	1,549
2	1,50	121,40	2,066
2 ½	1,92	128,80	2,582
3	2,28	135,10	3,099
3 ½	2,66	140,60	3,615
4	3,04	145,40	4,132
4 ½	3,42	149,06	4,648
5	3,80	153,08	5,165
5 ½	4,18	156,80	5,681
6	4,56	160,20	6,198
6 ½	4,94	163,48	6,714
7	5,32	166,50	7,231
7 ½	5,70	169,37	7,747
8	6,08	172,10	8,264
9	6,84	177,10	9,297
10	7,60	181,60	10,330
11	8,36	186,03	11,363
12	9,12	190,00	12,396
13	9,88	193,70	13,429
14	10,64	197,19	14,462
15	11,40	200,48	15,495
16	12,16	203,60	16,528
17	12,92	206,57	17,561
18	13,68	209,40	18,594
19	14,44	212,10	19,627
20	15,20	214,70	20,660
21	15,96	217,20	21,693
22	16,72	219,60	22,726
23	17,48	221,90	23,759
24	18,24	224,20	24,792
25	19,00	226,30	25,825
30	22,80	236,20	30,990
35	26,60	244,85	36,155
40	30,40	252,55	41,320
45	34,20	259,52	46,485
50	38,00	265,89	51,650

Dans le tableau précédent, les températnres qui correspondent aux tensions de plus de vingt-quatre atmosphères ont été calculées par la formnle

$$t = \frac{\sqrt[5]{e-1}}{0,7153},$$

où e exprime l'élasticité en atmosphères et t la température à partir de 100°, en prenant l'intervalle de 100° pour unité. On a de fortes raisons pour croire que l'erreur ne serait pas de 1 à cinquante atmosphères.

Souvent ou a besoin de connaître la tension de la vapeur pour des températnres au-dessous de 100°; tel est en particulier le cas des condensateurs. On aura alors recours au tableau suivant.

TABLE des forces élastiques de la vapeur pour des températures correspondantes au-dessous de 100°.

ÉLASTICITÉ en MÈTRES DE MERCURE.	TEMPÉRATURE CORRESPONDANTE. (Thermomètre centigrade).	PRESSION sur UN CENTIMÈTRE CARRÉ.
m.	°	k.
0,00946	10	0,013
0,01731	20	0,023
0,03164	30	0,041
0,05300	40	0,071
0,08874	50	0,121
0,14466	60	0,197
0,22907	70	0,313
0,35208	80	0,479
0,52528	90	0,714
0,76000	100	1,033

176. *Densité de la vapeur dont la tension et la température sont données.*— D'après la tension de la vapeur, on trouve avec les tableaux précédents sa température ; puis, à l'aide de la formule

$$\pi = \pi' \times \frac{1+0,00375.n'}{1+0,00375.n} \times \frac{p}{p'},$$

on détermine sa densité. On sait par expérience qu'à 0° de température, et sous la pression atmosphérique qui est de $1^k,033$, le mètre cube de vapeur pèse $0^k,81$. Si donc on fait $n'=0$, $p'=1^k,033$, et $\pi'=0^k,81$, on aura,

$$\pi = \frac{0,81p}{(1+0,00375.n)\,1,033} = \frac{0,7841}{1+0,00375.n} \times p.$$

Ordinairement, on connaît le nombre d'atmosphères qui mesure la tension de la vapeur, c'est-à-dire le rapport de p à p', et on aura alors recours à cette expression fort simple

$$\pi = \frac{0,81}{1+0,00375.n} \times \frac{p}{p'}.$$

Que, par exemple, la tension de la vapeur soit de quatre atmosphères; le tableau indique que la température correspondante est de 145°,4. Nous ferons, par conséquent,

$$n = 45,4;\ 1 + 0,00375 . n = 1,55,\ \text{et} \frac{p}{p'} = 4;$$

et on trouvera

$$\pi = \frac{0.81}{1,55} \times 4 = 2^{k},09;$$

ce qui indique que la densité de la vapeur à quatre atmosphères est de $2^{k},09$.

On aurait pu arriver à un résultat semblable, si, au lieu de la densité correspondante à zéro de température, on fût parti de celle de la vapeur qui se forme à l'eau bouillante, c'est-à-dire sous 100° et sous une pression de $1^{k},033$. On ferait alors $n' = 100°$ et $p' = 1_{k},033$ dans la formule générale. Quant à π', l'expérience apprend que la densité de la vapeur à 100° est de $0^{k},58955$, c'est-à-dire $\frac{1}{1697}$ de celle de l'eau, ou qu'un mètre cube d'eau peut fournir environ 1700 mètres cubes de vapeur à 100°.

Toutes les fois que la température de la vapeur saturée viendra à augmenter, sans que de nouvelle vapeur se forme, la tension augmentera aussi sans précipitation. Cette tension décroîtra, au contraire, dans le sens où le volume s'agrandirait dans les mêmes circonstances. Dans l'un et dans l'autre cas on admettra que la tension de la vapeur se comportera de la même manière que pour les gaz permanents; en un mot, la vapeur leur est comparable toutes les fois qu'il n'y a ni précipité ni nouvelle vapeur formée, et sa tension suit absolument les lois de Mariotte et de Gay-Lussac.

177. *Quantité de chaleur absolue développée par les différents combustibles. Effets des foyers.* — Les physiciens ont fait des expériences pour déterminer la quantité *absolue* de chaleur des divers combustibles. Par *quantité absolue de chaleur*, on entend celle qui serait accusée au calorimètre; cette quantité est, par conséquent, proportionnelle au poids de la glace à 0° fondue par des poids constants de combustible; et, comme pour fondre un kilogramme de glace à 0°, il faut, d'un autre côté, un kilogramme d'eau à 75°, on voit qu'en prenant pour unité la chaleur nécessaire pour élever un kilogramme d'eau de 0° à la température d'un degré, il sera facile de déterminer le nombre d'unités de chaleur que fournit chaque combustible; ce sera le produit d'un nombre de kilogrammes de glace fondue multiplié par 75. M. Clément, qui nomme *calorie* cette unité de chaleur, a établi la table suivante :

Un kilogramme	d'Hydrogène fournit. . .	22125	unités.	N'importe le bois.
»	Charbon de bois sec. . .	7050	»	Contient $\frac{1}{5}$ de son poids d'eau ou d'humidité.
»	» ordinaire. . .	6000	»	
»	Coke pur.	7050	»	
»	Houille à $\frac{1}{10}$ de cendre. .	6545	»	
»	» à $\frac{1}{40}$ de cendre. .	7050	»	
»	» à $\frac{1}{5}$ de cendre. .	5952	»	

»	Bois séché au feu. . . .	3666	»	N'importe le bois.
»	» à l'air. . . .	2945	»	Moitié environ du charbon et de la houille.
»	Tourbe (la meilleure). .	3000	»	
»	» de qualité inférieure. . .	2000	»	

Ce tableau montre, par exemple, qu'un kilogramme de charbon de bois sec est capable d'élever d'un degré la température de 7050 kilogr. d'eau, ou, ce qui est la même chose, d'élever à 7050° un kilogramme d'eau pris à zéro. D'après cela, on sera à même de calculer le poids d'une espèce déterminée de combustible qui serait capable d'élever à une température donnée un poids donné d'eau. On remarquera, d'ailleurs, qu'à poids égal,

1° Les bois donnent en général la même quantité de chaleur, quelle que soit leur espèce : charme, saule, chêne, etc. ; ce qui tient à ce qu'ils renferment la même proportion d'eau et de charbon ;

2° Que les bois ne donnent que moitié environ de la quantité de chaleur des charbons ;

3° Que la bonne houille, le coke et le charbon de bois donnent à peu près la même quantité de chaleur.

Les résultats qui précèdent ne peuvent être obtenus en pratique. Dans les foyers ordinaires les mieux construits, on compte seulement sur les deux tiers des résultats ci-dessus, et sur la moitié dans les cas des foyers de chaudières à vapeur, parce que, dans ce dernier cas, l'enveloppe du foyer se refroidit, ou perd sans cesse de la chaleur, et que la fumée en enlève elle-même. Les briques ordinaires, le charbon pilé peu carburé, l'air, ont la propriété d'être mauvais conducteurs ou de retenir la chaleur dans le foyer ; mais ils en laissent toujours passer un peu. On a, de plus, observé qu'un kilogramme de charbon exige, pour être brûlé, dix mètres cubes d'air atmosphérique à la température et à la pression moyennes, mais qu'en pratique il faut compter sur vingt mètres cubes, et même sur trente, pour que la combustion soit complète ; que le volume des gaz, qui sont les résidus de la combustion, reste le même que celui de l'air fourni, à la différence près apportée par la température de la cheminée ; qu'enfin la chaleur développée par les combustibles est la même dans une combustion lente que dans une combustion rapide. Il résulte aussi des expériences de MM. Clément et Desormes, que la capacité de l'air pour la chaleur est 0,25 de celle de l'eau ; ainsi, l'unité de chaleur pourra élever 4 kilogr. d'air d'un degré, ou un kilogramme d'air de 4 degrés. Ces données supposent qu'à poids constants, les capacités de l'air et de l'eau, pour le calorique, restent les mêmes dans les divers degrés de température ; ce qui est sensiblement vrai.

178. *Quantité de chaleur contenue dans un poids donné de vapeur à une certaine température.* — M. Clément, en France, Southern et autres, en Angleterre, ont reconnu qu'un kilogramme de vapeur d'eau à 100° et sous la pression atmosphérique, est susceptible de lever à 100° la température

de 5k,50 d'eau à 0°. Le mélange contenant à 5k,50 un kilogramme d'eau, cela fait 6k,50 à 100°, ou 650 calories contenues dans un kilogramme de vapeur à 100°. Si la vapeur était à 120°, elle contiendrait par kilogramme . . . .
550 + 120 = 670 calories, et en général 550 + n, n étant la température de la vapeur à saturation. Donc, si le poids total de vapeur est égal à $\tilde{u}$, le nombre d'unités de chaleur contenues sera $\tilde{u}$ (550 + n).

179. *Poids de l'eau froide pour condenser la vapeur.* — Ces principes nous permettent de calculer l'eau froide nécessaire pour abaisser la température d'un kilogramme de la vapeur à un degré donné. Soit, en effet, n'' la température de cette eau froide, $\tilde{u}'$ son poids, n' la température à laquelle on veut que soit abaissée celle du kilogramme de vapeur qui, dans son état actuel de saturation, se trouve à la température n degrés. Ce kilogramme de vapeur contient 550 + n, et l'eau d'injection en contient $\tilde{u}'n''$. Ainsi, le mélange en contiendra $550 + n + \tilde{u}'n''$. Mais le poids du mélange est $1^k + \tilde{u}'$, et il est de plus à la température n', ou bien enfin il contiendra (1 + ') n' unités de chaleur. On aura donc

$$(1 + \tilde{u})\, n' = 550 + n + \tilde{u}'\, n'',$$

et, par suite,

$$\tilde{u}' = \frac{550 + \tilde{u} - n'}{n' - n''}.$$

Tel sera le poids d'eau froide d'injection pour condenser un kilogramme de vapeur, et si le poids total de cette dernière est encore $\tilde{u}$, le poids d'eau froide pour la condenser sera $\tilde{u} \times \frac{550 + n - n'}{n' - n''}$. Que, par exemple, la vapeur à condenser soit de 140° de température, que la température de l'eau froide soit de 12°, et que celle du mélange doive être de 40°, ainsi que cela a lieu ordinairement dans les condensateurs, on fera, dans les formules précédentes, $n = 140°$, $n' = 40°$, et $n'' = 12°$, ce qui donne

$$\tilde{u}' = \frac{550 + n - n'}{n' - n''} = \frac{650}{28} = 23^k{,}22,$$

et qui nous apprend que, pour condenser un kilogramme de vapeur de 140° de température, il faut 23k,22 d'eau froide à 12°, ou qu'en général une telle vapeur, pour être condensée convenablement, exige 23,22 fois son propre poids en eau froide.

180. *Poids du combustible pour former une certaine quantité de vapeur donnée.* — On peut aisément calculer aussi le nombre d'unités de chaleur à dépenser pour réduire en vapeur un poids $\tilde{u}$ de liquide dont la température n' est donnée. Car si n est la température que la vapeur doit obtenir, il est évident que le liquide contient déjà $\tilde{u}n'$ calories, et que la vapeur devra en posséder $\tilde{u}$ (550 + n) : donc, il faudra seulement en dépenser ou lui en fournir $\tilde{u}$ (550 + $n - n'$). D'après cela, on déduit le poids du charbon nécessaire pour former la vapeur dans les chaudières des machines. Car, par

exemple, un kilogramme de houille donnant environ 7050 calories sans perte (3ᵉ partie, 177), ou $\frac{1}{2}$ 7050 = 3500 environ, avec les pertes dues au foyer, à la cheminée, etc., le poids $\tilde{u}$ ci-dessus de vapeur exigera évidemment.

$$\tilde{u} \frac{(550 + n - n')}{3500} \text{ kilogr. de houille.}$$

Réciproquement, si on veut trouver le poids de vapeur à la température n que peut former un kilogramme de houille, il suffira de diviser le poids $\tilde{u}$ précédent de vapeur, par le nombre $\tilde{u} \frac{(550 + n - n')}{3500}$ de kilogrammes de houille qui peuvent le former, en sorte qu'un kilogramme de houille fournira $\frac{3500}{550 + n - n'}$ kilogr. de vapeur.

Comme il est toujours possible d'évaluer dans les machines le volume de vapeur introduit dans un temps déterminé, d'après le nombre des coups de piston et d'après le volume de course du piston, on peut déduire encore la quantité de combustible d'après ce volume. Car la densité π de cette vapeur s'obtient (3ᵉ partie, 176) au moyen de la formule

$$\pi = \frac{0,81}{1 + 0,00375 \,.\, n} \times \frac{p}{1^k,033},$$

et si a est le volume de la vapeur que doit fournir la quantité cherchée de combustible, on aura $\tilde{u} = \pi a$. Donc, le poids du combustible employé à la formation du volume a de vapeur sera également

$$\pi \,.\, \frac{a\,(550 + n - n')}{3500}$$

Si la machine est bien organisée, elle ne dépensera pas plus de combustible; si elle en dépense davantage, ce sera un signe que le foyer est mal disposé, ou qu'il y a des fuites dans le cylindre, etc.

181. *Plus grand travail d'un kilogramme de combustible, et sa comparaison avec le travail obtenu dans la pratique.* — Nous sommes maintenant en état de trouver intégralement le travail d'un kilogramme de combustible, en ne supposant aucune perte. Car, si le cylindre du corps de pompe reste échauffé, si la température de la vapeur ne baisse pas, non-seulement il n'y aura pas de précipité, mais encore la détente s'effectuera, comme pour l'air, d'après la loi de Mariotte, et le calcul du travail s'opérera, comme on va le voir, avec facilité. Nous avons vu que, pratiquement, un kilogramme de houille donnait $\frac{3500}{550 + n - n'}$ kilogr. de vapeur, et que, théoriquement, il pourrait en fournir $\frac{7050}{550 + n - n'}$; si nous divisons ce dernier poids par la densité π de la vapeur, c'est-à-dire par le poids d'un mètre cube, il est évi-

dent que le quotient $\frac{7050}{\pi(550+n-n')}$ représentera le volume b de la vapeur à n degrés centigrades formée par un kilogramme de charbon. Désignons d'ailleurs par p la tension de la vapeur correspondante à la température n et donnée par la table du n° 175. Or, la recherche du travail que peut produire un kilogramme de charbon revient à celle du travail que peut produire le volume b de la vapeur dont p est la tension, n la température, pendant qu'elle se détend le plus possible, ou qu'elle prend un volume dix fois, cent fois plus grand que son volume primitif. J'appelle k le travail que fournit un mètre cube de vapeur sous la pression atmosphérique, ou de $1^k,033$ par centimètre carré, dont le volume se détend de la même manière que le volume b de la vapeur dont la tension est p. Ce travail k se trouve immédiatement donné au moyen de la table du § 196 du Cours de la première année. Pour avoir celui du volume b de vapeur qu'on considère, on se rappellera que les quantités de travail de la même détente de deux gaz dont les volumes primitifs et les tensions sont différentes, sont entre elles, § 186 du Cours de la première année, comme les produits de ces tensions et de ces volumes. Désignant donc par x le travail cherché, on aura

$$x : k :: b \times p : 1^{\text{mcub}} \times 1{,}033;$$

d'où on tire
$$x = k \times b \times \frac{p}{1^k{,}033}.$$

Tel sera, par conséquent, le travail d'un kilogramme de charbon pour une certaine détente déterminée. Il nous reste, cependant, à modifier cette expression, en remplaçant la valeur de b par $\frac{7050}{\pi(550+n-n')}$; ce qui donne

$$x = \frac{7050 \times k}{(550+n-n')\,\pi} \times \frac{p}{1^k{,}033}.$$

Mais observons que la densité π de la vapeur (3e partie, 176) est égale à $\frac{0{,}81}{1+0{,}00375.n} \times \frac{p}{1^k{,}033}$. D'où on tire

$$\frac{p}{\pi \times 1^k{,}033} = \frac{1+0{,}00375.n}{0{,}81};$$

en sorte que la valeur du travail produit par un kilogramme de charbon devient

$$x = \frac{7050\,(1+0{,}00375.n)}{0{,}81\,(550+n-n')} \times k.$$

Cette expression, dans laquelle k ne dépend que du rapport du volume primitif au volume de la détente, et où la tension p de la vapeur n'entre plus, prouve qu'il n'y a pas un très-grand avantage à augmenter la tension p dans la chaudière, si la détente reste la même. Car si le numérateur $1+0{,}00375$, n augmente un peu, attendu que la température n croît avec la pression, le dénominateur $550+n-n'$ augmente très-rapidement. C'est donc bien à

tort que certaines personnes espèrent obtenir un très-grand travail de la vapeur à haute pression ; elles ne font pas attention que la dépense de vapeur en poids augmente proportionnellement à la quantité de calorique ou de combustible. D'ailleurs, les foyers perdent plus de chaleur ; les fuites sont plus abondantes autour des pistons, de sorte que passé quatre atmosphères l'avantage est presque nul. Pour appliquer la formule précédente, nous supposerons que le charbon doive former de la vapeur dont la tension soit de quatre atmosphères ; que l'eau qui la produit soit d'ailleurs de 40°, comme celle qui provient du condensateur, et que la détente de la vapeur soit poussée à dix fois son volume primitif. Une tension de quatre atmosphères, d'après le tableau du n° 175, correspond à une température de 145°,4 ; d'où $n = 145,4$. La température de l'eau ou $n' = 40°$. Quant à la valeur de k, elle représente ici le travail de la détente d'un mètre cube de vapeur sous une pression atmosphérique qui prend dix fois son volume primitif, et d'après le tableau du § 196 du Cours de la 1re année, on aura $k = 34116^{\text{k.m}}$. Faisant ces substitutions dans la formule

$$x = \frac{7050(1+0,00375.n)}{0,81(550+n-n')} \times k,$$

$$x = \frac{7050(1+0,00375.145°,4}{0,81(550+145,4-40)} \times 34116^{\text{k.m}}.$$

$$= 7050 \cdot \frac{1,55}{530,87}.34116 = 7050 \times 0,0029 \times 34116^{\text{k.m}}$$

$$= 20,45 \times 34116 = 697672^{\text{k.m}}.$$

Ainsi, un kilogramme de houille serait capable de produire un travail de $697672^{\text{k.m}}$; et cependant les meilleurs machines de Woolf, travaillant à quatre atmosphères et où la détente est de quatre fois le volume primitif, ne donnent qu'un cheval-vapeur pour 2k,50 de houille brûlée par heure, c'est-à-dire $3600'' \times 75^{\text{k.m}} = 270000^{\text{k.m}}$. Donc, dans ces machines un kilogramme de houille fournira un travail égal à

$$\frac{270000}{2.5} = \frac{540000}{5} = 108000^{\text{k.m}}.$$

Ce n'est pas le sixième de la quantité ci-dessus. Ce même résultat ne serait pas le dixième du travail théorique du charbon dans le cas où on aurait supposé la détente prolongée jusqu'à 0k,014 de pression seulement. Mais on ne doit nullement s'étonner de ces différences. La détente n'a lieu qu'à quatre fois dans les machines de Woolf, parce que les frottements du piston rendent une trop grande détente nuisible pour l'effet utile (Cours de la 1re année, (§ 195). Le vide parfait n'existe pas dans le condensateur, il y reste toujours de l'eau à une température d'au moins 40° qui sature l'espace en avant du piston, d'une vapeur dont la tension est de 0k,071. A cette tension l'air contenu dans l'eau de condensation ajoute souvent une pression de 0k,05 et même davantage. La pression totale qui provient du condensateur est donc de 0k,12 environ par centimètre carré, et occasionne une perte de travail

contre le piston. Enfin, les résistances, les frottements, les fuites), etc., absorbent souvent plus de moitié du travail restant. C'est ce qu'il est facile de reconnaître en faisant le calcul précédent du travail que produit un kilogramme de charbon pour 3 atmosphères et demie de tension et en tenant compte de la perte due au condenseur, on trouve effectivement environ le double de 108000k.

Nous avons dit, à l'occasion des machines à colonne d'eau, comment il est possible de calculer les frottements des pistons qui, parmi toutes les résistances, sont celles qui exercent sur les machines à mouvement alternatif le plus d'influence. On peut juger d'après cela, que les machines puissantes, dont les pistons ont une grande surface et qui travaillent sous les mêmes conditions que les petites machines, doivent éprouver moins de déchet de travail proportionnellement que ces dernières. Nous n'insisterons pas sur cet objet, non plus que sur la manière d'estimer le travail pour une machine donnée et le déchet qu'elle éprouve; nous renverrons au Cours de la première année.

182. *Proportions des chaudières, foyers, grilles, cheminées, etc.* — Après ces différentes considérations théoriques sur la constitution de la vapeur et sur le travail absolu de son combustible, nous allons passer aux conditions mêmes de l'établissement des machines que la vapeur fait mouvoir.

Chaudières et foyers. — Déjà nous avons donné (3e partie, 170) la disposition des chaudières, ainsi que celle du foyer, et des circuits de la flamme et de la fumée. Nous avons dit que la chaudière devait être remplie d'eau jusqu'au dessus de ces conduits, et que le vide pour la vapeur devait être au moins (3e partie, 173) trois fois le volume du cylindre qui reçoit immédiatement de la chaudière la vapeur *en plein;* mais, dans la pratique, on donne à ce vide jusqu'à dix fois et quinze fois ce volume, afin d'éviter les variations de tension dans la chaudière. Il nous reste encore beaucoup de choses à dire sur la proportion des chaudières et foyers.

Surface de chauffe. — Le liquide ne s'échauffe que par l'intermédiaire des parois qui sont exposées directement à l'action du foyer ou de la flamme. La surface de ces parois exposée immédiatement à la flamme se nomme *surface de chauffe*. Elle est à peu près la moitié de la surface totale de la chaudière dans les chaudières à tombeau de Watt, et un peu plus forte dans celles de Woolf avec bouilleurs. La quantité de chaleur transmise dans un temps donné et à surface égale de chauffe dépend de la conductibilité de la matière de l'enveloppe et de son épaisseur. C'est pourquoi les chaudières épaisses en fonte de ce dernier système exigent plus de surface de chauffe que celles de tôle du premier.

D'après M. Clément, une chaudière en fonte avec bouilleurs laisse passer, par mètre carré de surface de chauffe, 20 000 à 25 000 unités de chaleur par heure. Or, un kilogramme de vapeur exige un peu plus de 650 unités

(3ᵉ partie, 178) de chaleur ; ainsi, un mètre carré de surface de chauffe fournira $\frac{2000}{650}$, ou $\frac{2500}{65}$, ou 30 à 38 kilogr. de vapeur par heure. On doit compter au plus sur 30 kilogr. Dans les chaudières en tôle de Watt, on compte sur environ 36 kilogr. de vapeur par mètre carré et par heure.

Grille, cheminée, cendrier. — Selon M. Clément, on ne doit pas charger la grille du foyer de plus de 6 centimètres d'épaisseur de combustible. Pour brûler 20 kilogr. de houille par heure, il faut une surface de grille de cinq pieds carrés, ou $0^{m\,car},50$(1). Les parois du foyer et celles du fond de la première conduite de la fumée ne doivent pas être levées de plus de $0^m,10$ au-dessus de la grille. On évalue la surface des vides de la grille du quart au tiers de sa surface totale. La grille a en projection horizontale une longueur égale à peu près au tiers de la longueur de la chaudière, et une largeur égale à celle de cette dernière. La surface supérieure de cette grille se trouve à environ 50 centimètres au-dessous des bouilleurs ou du fond de la chaudière. Ordinairement la longueur totale de la chaudière est au moins égale à trois fois sa plus grande largeur quand elle est cylindrique, et seulement deux fois et demie quand elle est à tombeau ou rectangulaire ; la hauteur de celle-ci surpasse un peu sa largeur. D'où l'on voit qu'une fois la surface du fond de la chaudière fixée, on conclut celle de la grille. C'est de cette dernière qu'on déduit l'aire de la section de la cheminée ou des circuits de chaleur, laquelle doit être égale partout entre le sixième et le quart de la surface de la grille. Quand les cheminées sont fort hautes ou de 33 mètres, on peut se borner à un sixième.

La surface de section du cendrier par laquelle l'air arrive sous la grille doit, suivant Tredgold, être un peu moindre que celle de la cheminée. Enfin, Tredgold estime que la longueur utile de la surface de chauffe des circuits n'excède pas quatre fois l'aire de la grille ; ce nombre est trop faible, et on peut le porter à six ou sept fois.

183. *Quantité de vapeur formée par un kilogramme de combustible dans les chaudières de Watt et de Woolf.* — Watt estimait que dans ses chaudières la combustion d'un kilogramme de bonne houille donne 6 kilogr. de vapeur. Ici la vapeur est à basse pression, ou à la température moyenne de 105° ; et elle est formée avec de l'eau dont la température, égale à celle du condenseur, est de 40°. Ainsi, un kilogramme de vapeur exigerait théoriquement dans cette chaudière (3ᵉ partie, 180) $\frac{1^k \times (550 + 105^\circ - 40^\circ)}{7500} = 0^k,082$ de houille ; partant un kilogramme de combustible donnera $\frac{1}{0,082}$,

(1) Suivant Tredgold, il faut environ $0^{m\,car},09$, ou $(0^m,30)^2$, de surface de grille, pour brûler par heure 5 kilogr. de houille : ce qui s'accorde avec la taxe.

ou $12^k,2$ de vapeur. Donc, les chaudières de Watt qui sont bien disposées, ainsi que leur foyer, ne donnent pas la moitié de la chaleur intégrale : ce qui est conforme à ce qui a été déjà dit.

Selon Woolf, ses chaudières à bouilleurs en fonte pourraient fournir 8 kilogrammes de vapeur pour un kilogramme de houille. Mais ce résultat est exagéré, puisqu'il y a ici les mêmes causes de perte et un peu plus de dépense théorique. La température étant environ de 145° pour une tension de quatre atmosphères, un kilogramme de houille donnerait intégralement $\frac{7500}{550 + 145 - 40} = \frac{7500}{655} = 11^k,45$ de vapeur seulement. Réduisant toujours à moitié, on obtiendra encore 6 kilogr. de vapeur au plus.

Il n'y a qu'un bon chauffeur, ou un système de grille tournante et toutes les précautions possibles, qui puissent faire obtenir au plus les deux tiers de la quantité théorique de vapeur, c'est-à-dire 8 ou 9 kilogr. par kilogr. de houille ou de charbon de première qualité. Mais on ne doit pas compter sur un tel avantage dans l'établissement des machines à vapeur de l'industrie.

184. *Dimensions des chaudières et des foyers de Watt et de Woolf par force de cheval.* — En adoptant toutes les données ci-dessus, et en supposant que les machines de Watt à basse pression dépensent 6 kilogr. de houille par cheval-vapeur ($75^{k.m}$) et par heure, 6 kilogr. de houille donneraient 6×6 ou 36 kilogr. de vapeur ; ce qui est à peu près ce que fournit dans le même temps un mètre carré de surface de chauffe. Ainsi, il faudra par cheval de force un mètre carré de surface de chauffe, $0^{m\,car},1$ à $0^{m\,car},12$ de surface de grille, $0^{m\,car},04$ à $0^{m\,car},05$ de section de cheminée et de conduits.

Pour les machines de Woolf travaillant de trois à quatre atmosphères, un cheval exige 3 kilogr. de houille par heure, qui produisent 3×6 ou 18 à 20 kilogr. de vapeur ; un mètre carré de surface de chauffe donnant par heure 30 kilogr. de vapeur, il faudra environ deux tiers de mètre carré de surface par cheval.

Pour une machine de Woolf de 20 chevaux, le gros cylindre de la chaudière a une longueur de 4 mètres, un diamètre de $1^m,10$. L'épaisseur de la fonte de ce même cylindre est de 45 millimètres. Les deux bouilleurs ont chacun 4 mètres de longueur, 38 centimètres de diamètre, et 40 millimètres d'épaisseur. La surface de chauffe est de 12 à 14 mètres carrés, ou les deux tiers de 20.

185. *Cylindres à vapeur, des corps de pompe.* — Il est d'usage de ne donner au plus au piston moteur qu'une vitesse moyenne d'un mètre par seconde, la raison en est toute simple. Le travail développé par les frottements croît comme la vitesse, et à travail moteur égal, il sera plus sensible pour une grande que pour une petite vitesse. S'il y a détente, comme dans les machines de Woolf, il ne faudra pas qu'elle surpasse quatre ou cinq fois le volume primitif (Cours de la 1re année, § 195). C'est par cette raison que le

diamètre du plus petit piston dans ces machines sera un peu plus de moitié de celui du grand. On suppose que la vapeur ne se détende pas au-dessus du petit piston, de sorte que le volume du corps de pompe de ce dernier sera la mesure du volume de vapeur introduit à chaque coup. Connaissant le nombre de chevaux de force que doit avoir la machine, on saura que la vapeur doit développer près du double de ce travail utile à cause des résistances, d'après quoi on calculera le volume de vapeur à fournir pour la chaudière dans une seconde, puis le diamètre du piston du plus petit corps de pompe, puis celui du grand, etc.

186. *Application numérique à l'établissement d'une machine particulière à vapeur.* — Ces idées générales vont s'éclaircir par un exemple particulier. Supposons qu'il s'agisse d'établir une machine de Woolf de la force de vingt chevaux, que la détente y soit quatre fois le volume primitif a de la vapeur fournie dans une seconde, que la tension primitive dans la chaudière soit de 3,5 atmosphères.

Volume de vapeur introduit par seconde. — Il est visible que la quantité absolue de travail produite par la détente du volume a de vapeur fourni dans une seconde sera (3e partie, 181) . . . .

$a \times k \times \frac{p}{1\ '033}$, ou $3{,}5 \,.\, a \times k$, expression dans laquelle k est le travail développé par un mètre cube de vapeur sous une atmosphère de pression pour une détente de quatre fois son volume; ce travail k, d'après la table du § 196 du Cours de la 1re année, est égal à 24650k.m. Donc, le travail que produira le volume a de vapeur à la tension de 3,5 atmosphères pour faire mouvoir la machine sera $3{,}5 \times 24650 \times a$, ou $a \times 86275$k.m. Mais ce travail est contrarié par la réaction qui provient du condenseur contre le piston du grand cylindre. Nous avons vu (3e partie, 181) que cette réaction était produite, 1° par la tension de la vapeur qui dans le condenseur est de 0k,07 par centimètre carré; 2° par la pression de l'air contenu dans l'eau de condensation, pression évaluée à 0k,05 ou même davantage, de sorte que la réaction totale est moyennement de 0k,12 par centimètre carré de surface, c'est-à-dire enfin de 1200 kilogr. par mètre carré. La pression totale contre la face du grand piston en communication avec le condensateur sera égale au produit de sa surface multipliée par 1200 kilogr. Quant à la quantité de travail qu'elle absorbe dans une seconde, ce sera le produit de 1200 kilogr. multiplié par la surface du grand piston et par son chemin dans une seconde; ou bien encore ce sera le produit de 1200 kilogr. multiplié par le volume que parcourt le grand piston dans une seconde, volume qui est quadruple de la même course pour le petit piston ou qui est égal à $4a$. Donc le travail résultant produit par la vapeur dans une seconde sera, en définitive,

$$(a \times 86275) - (1200 \times 4 \,.\, a) = a(86275 - 4 \,.\, 1200)$$

$$= a\,(86275 - 4800) = a\,.\,81475^{\text{k.m}}.$$

Ce travail devant être double du travail utile de la machine, qui est de 20 chevaux ou de $20 \times 75^{\text{k.m}}$ par seconde, ou de $1500^{\text{k.m}}$, on aura

$$a\,.\,81475 = 2\,.\,1500\text{, ou } a \times 81475 = 3000\,;$$

d'où on tire

$$a = \frac{3000}{81475} = 0^{\text{m cub}},0368.$$

Tel sera le volume de vapeur introduit par seconde sous le piston.

Rayons du petit et du grand piston. — Nous savons que la vitesse du petit piston égale au plus 1^{m}, ou $0^{\text{m}},9$; c'est le chemin décrit en une seconde. Si r est le rayon du petit piston, πr^2 sera sa surface. Le volume cylindrique qu'il décrira dans une seconde est au plus $0,9\pi r^2$; d'ailleurs, comme les soupapes ne s'ouvrent point ou ne se ferment point instantanément, et qu'il y a un peu de fuite de vapeur, on fera bien de supposer le volume de vapeur introduit par seconde moindre que la course cylindrique précédente, et de le réduire à $0,8\,.\,\pi r^2$. Donc, on aura

$$0^{\text{m cub}},0368 = 0,8 \times 3,1416\,.\,r^2 = 2,512\,.\,r^2\,;$$

d'où

$$r^2 = \frac{0,0368}{2,512} = 0,01465,$$

et

$$r = \sqrt{0,01465} = 0^{\text{m}},121.$$

Le diamètre du petit piston sera, par conséquent, de $0^{\text{m}},242$, et, comme celui du grand doit être réglé de façon que la détente soit de 4, ce dernier aura, par conséquent, un diamètre double, savoir, $0^{\text{m}},484$.

Course du petit piston. — Cette course dépendra du nombre des oscillations du volant. Supposons que ces oscillations soient de 28 par minute, et nommons c l'amplitude d'une course à raison de 2 par oscillation. Puisque la vitesse est de 1^{m} par seconde, on aura

$$\frac{28 \times 2c}{60} = 1^{\text{m}};$$

d'où

$$c = \frac{60^{\text{m}}}{56} = \frac{15}{14} = 1^{\text{m}}.07.$$

Poids de vapeur fourni par seconde. — Nous avons vu que le poids de vapeur fourni par la chaudière au petit piston dans une seconde était de $0^{\text{m cub}},0368$. Pour en conclure le poids, il faudra multiplier ce volume par la densité π qui, d'après le n° 176, est égal à

$$\frac{0,81}{1 + 0,00375\,.\,n} \times \frac{p}{1^{\text{k}},033} = \frac{0,81}{1 + 0,00375\,.\,n} \times 3,5.$$

Or, la table du n° 175 nous apprend que la température n de la vapeur à 3,5 atmosphères de tension est de $140°,6$. La densité précédente devient

$$\frac{0,81 \times 3,5}{1 + 0,00375\,.\,140,6} = \frac{2,84}{1,53} = 1^{\text{k}},85.$$

Partant, le poids de vapeur fourni au petit piston dans une seconde sera le produit 1,85 $\times$ 0,0368 = 0k,0681.

Poids d'eau d'injection par seconde. — Ce poids se calcule au moyen de la formule du n° 179, qui nous apprend que pour condenser de la vapeur de 140° de température avec de l'eau à 12° et pour ramener le mélange à la température de 40°, il faut que le poids de l'eau d'injection soit de 23,22 fois le poids de la vapeur. Or ce dernier a été trouvé de 0k,0681. Ainsi, le poids d'eau d'injection par seconde sera 23,22 $\times$ 0k,0681, ou 1k,58.

Dimensions de la pompe à air. — La pompe à air doit élever par seconde le mélange de vapeur et d'eau, c'est-à-dire 1k,58, 0k,0681, ou 1k,65. Comme cette pompe est simplement aspirante et qu'elle donne 28 coups par minute, elle enlèvera un poids d'eau, par coup, égal à $\frac{60 \times 1,65}{28} = \frac{99}{28} =$ 3k,54. D'ailleurs, un kilogramme d'eau équivant à la capacité d'un litre. Tel devrait être le volume de la course du piston de la pompe à air; ou bien encore il sera représenté par 0m cub,0035. L'amplitude de l'oscillation du piston est réglé par la position du point de suspension de la tige sur le balancier. En admettant que cette oscillation soit de 0m,50, la surface du piston sera $\frac{0^{m\,cub},0035}{0^{m},50} = 0^{m\,car},007$. Son rayon r' sera donné par la formule $\pi r'^2 = 0,007$, et sera encore de 4 centimè.,7. Mais comme cette pompe doit aussi enlever l'air qui arrive avec la vapeur, on donnera à son piston un plus grand rayon.

Dimensions du condenseur. — Le condenseur ne doit pas seulement contenir l'eau d'injection et l'eau de condensation de la vapeur qui arrivent à chaque oscillation, il faut encore qu'il soit suffisamment étendu pour que l'air contenu dans l'une et l'autre s'y dilate de façon que sa tension n'y soit pas très-considérable. Car cette tension s'ajoute à celle de la vapeur qui correspond à la température 40° du condenseur pour contrarier le mouvement du piston moteur. Nous supposerons, comme nous l'avons déjà dit (3e partie, 181, et précédemment), que la tension de cet air dilaté doive être dans le condenseur de 0k,05 par centimètre carré de surface, et nous rappellerons en outre que de l'eau à l'extérieur ou à l'air libre contient toujours un volume d'air égal au vingtième du sien propre, sous une tension de 1k.003. Cela posé, nous avons vu que la somme des quantités de vapeur et d'eau d'injection qui arrivaient à chaque oscillation était égale à 3k,54, ou que le volume en était de 3 ,54, qui, étant supposés venir du dehors, contiendront en air ordinaire $\frac{1}{20} \times 3^{li},54$, ou $\frac{3^{li},54}{20}$, ou enfin $0^{li},16$. Ce volume d'air venant du dehors est censé être à la tension de 1k,033 et à la température de 12°; et en arrivant dans le condenseur il doit à la fois passer à la température de 40° et réduire sa tension à 0k,05.

D'après cela, nous pouvons conclure le volume de cet air dans le condenseur. Si nous faisons d'abord abstraction du changement de température, il est évident que, sous la pression de 0k,05, l'air en question devra occuper dans le condenseur un volume de $0^{li},16 \times \frac{1k,033}{0,05} = 0,16 \times 20,6 = 3^{li},30$.

Mais, comme la température s'élève de 12° à 40° dans le condenseur, l'espace de l'air contenu dans le mélange de l'eau d'injection et de la vapeur s'augmentera dans le rapport de 1+0,00375 . 12, ou 1,045, à 1+0,00375. 40, ou 1,15, c'est-à dire dans le rapport environ de 1 à 1,1. Donc, l'espace occupé par l'air dans le condenseur = 3,30 × 1,1 = 3,63, ou est égal à peu près au volume 3,54 de l'eau mélangée. Enfin, puisqu'il est nécessaire que la pompe à air puisse vider à chaque coup au moins la capacité du réservoir, on voit que le volume cylindrique de la pompe à air devra être le même que celui du réservoir ou condenseur, et, par conséquent, être double de la quantité d'eau mélangée que cette pompe doit élever dans un coup. Donc, le rayon du piston de cette pompe, au lieu de 4 centimè.,7 comme nous l'avons trouvé tout à l'heure, doit être de 9 centimè.,4.

Pompe à eau froide et pompe alimentaire. — La pompe à eau froide doit se calculer de manière qu'elle fournisse par seconde 1k,58 d'eau, ou $\frac{60 \times 1,58}{28} = 3^{li},37$, par coup si elle est à simple effet, ou seulement $1^{li},69$ si elle est à double effet. Le volume cylindrique de la course doit être augmenté de $\frac{1}{10}$ à $\frac{1}{15}$, à cause des pertes et fuites.

Quant à la pompe alimentaire, prenant une partie de l'eau de la pompe à air à 40° pour la faire passer dans la chaudière, elle devra enlever $0^{k},0681$ d'eau par seconde, ou $\frac{60 \times 0,07}{28}$, ou $\frac{4,2}{28}$, ou $0^{li},15$, à chaque coup, puisqu'elle est à simple effet.

Travail des diverses pompes. — Si l'on veut évaluer le travail de ces pompes, on prendra, pour tenir compte des frottements, les quatre tiers du produit de l'eau qu'elles élèvent par seconde, et de la hauteur à laquelle cette eau est élevée. Cette hauteur, pour la pompe d'injection, est celle du dégorgeoir au-dessus du niveau du puisard dont l'eau est extraite. Pour la pompe alimentaire, cette hauteur est due à la différence des pressions dans la chaudière et à l'extérieur, c'est-à-dire ici à $3^{atm},5 - 1$, ou $2^{atm},5$; en un mot, cette hauteur sera $2,5 \times 10^{m},33$, ou $25^{m},83$.

Enfin, on remarquera que, pour la pompe à air, le piston est pressé de haut en bas par une pression atmosphérique ou par une pression de 1k,033, et de bas en haut par une pression intérieure de 0k,12, de sorte que la pression résultante est de $0^{k},913$, qui équivaut à une hauteur de $9^{m},13$. L'eau est, en outre, élevée dans la bâche, qui n'est pas à plus d'un mètre de hauteur, de sorte que 10 mètres représenteront la hauteur à laquelle l'eau est élevée par la pompe à air.

187. *Diamètres des conduits de vapeur et des soupapes.* — Il nous reste à calculer le diamètre de conduite de la vapeur, et des orifices des soupapes. Ordinairement on dit que les tuyaux de la vapeur n'ont pas besoin d'un grand diamètre, parce que la vapeur tend à prendre une grande vitesse, et on a assigné, par exemple, un à deux centimètres de diamètre au tuyau qui conduit la vapeur sur une machine de huit chevaux ; mais cela est fautif. Car la vapeur ne chemine dans les conduits et orifices qu'en vertu de la différence des tensions aux extrémités. Par exemple, dans le passage de la chaudière aux cylindres, cette différence ne peut pas excéder sans inconvénient le vingtième de la tension dans la chaudière. Elle est ainsi pour une machine de Woolf de $0^{atm},175$, et elle répond à une hauteur de colonne de vapeur facile à calculer, et qui donnera la vitesse avec laquelle la vapeur s'échappe de la chaudière ; d'après quoi, connaissant la dépense, on conclura le diamètre du tuyau. On remarquera, en outre, que la vapeur, en arrivant sous le piston, perd toute la force vive qu'elle a acquise par la différence de tension dans la chaudière et le cylindre. D'où l'on doit l'avantage de diminuer cette différence le plus possible en agrandissant les tuyaux. Cette détermination des tuyaux repose tout à fait sur les principes exposés relativement à l'écoulement des gaz.

XXII.

DES MOTEURS ANIMÉS.

188. *Définition du travail mécanique des moteurs animés.* — Les moteurs animés diffèrent des moteurs uniquement soumis aux lois de la physique, en ce qu'ils ne peuvent agir d'une manière continue, qu'ils sont susceptibles de se fatiguer au bout d'un certain temps de travail, et forcés de prendre un repos plus ou moins long. La quantité de travail mécanique qu'ils peuvent livrer journellement varie suivant le mode de leur emploi et selon les circonstances ; mais elle est, dans chaque cas, susceptible d'un *maximum* comme pour les autres moteurs à égalité de *fatigue journalière ;* en un mot il existe une vitesse du point d'application, un effort et une durée de travail qui sont les plus convenables pour l'effet utile (Cours de la 1re année, § 148).

Nommons, en général, V la vitesse moyenne en mètres du point d'application du moteur, ou le chemin censé décrit uniformément dans chaque seconde, P l'effort moyen en kilogrammes qu'il exerce et estimé dans le sens de ce chemin, enfin T la durée totale en secondes de l'action journalière, qui peut être ou continue, ou coupée par des repos plus ou moins fréquents nommés *relais* ou *haltes*, dont la durée n'est pas comprise dans T. La quantité de travail mécanique développée par le moteur aura évidemment pour

mesure le produit $PVT^{k.m}$. A cet égard il est nécessaire de rappeler que, d'après les principes jusqu'ici exposés, le travail mécanique peut se mesurer en un point quelconque de la transmission du mouvement, pourvu que l'effort soit estimé dans le sens de ce mouvement ou que le chemin décrit soit dans le sens de l'effort, et pourvu encore que le travail des résistances passives entre le point où on estime le travail et celui où le moteur opère réellement, puisse être négligé vis-à-vis du premier, ainsi qu'il arrive dans beaucoup de circonstances.

189. *Conditions pour lesquelles ce travail est le plus avantageux.* — Cela posé, le produit $PVT^{k.m}$, qu'on nomme *quantité de travail journalière*, est, comme nous l'avons dit, susceptible d'un *maximum* à égalité de fatigue journalière, en donnant à P, à V et à T des valeurs qu'une longue expérience indique comme convenables. Dans aucun cas on ne peut faire travailler le moteur sous un effort et une vitesse qui excèdent les limites données également par l'expérience, et il n'est pas non plus possible d'augmenter la durée T du travail journalier au delà d'un certain terme, quelque faible que soit d'ailleurs le travail PV, livré dans chaque seconde. Cette durée limite paraît être de dix-huit heures au plus par jour, ou environ le double de la durée ordinaire et la plus avantageuse du travail.

Quant à la limite de l'effort, il varie entre le triple et le quintuple de l'effort qui convient au *maximum* d'effet, selon les circonstances ou la durée plus ou moins prolongée de cet effort. Enfin, la vitesse limite paraît varier aussi en raison de la durée totale du mouvement, et être comprise entre quatre fois et dix fois la vitesse la plus convenable au travail. Du reste, entre ces limites extrêmes, les moteurs animés ont la faculté de faire varier, pour ainsi dire arbitrairement, leur effort et leur vitesse, pourvu que, quand l'un augmente l'autre diminue, et que si l'un et l'autre excèdent l'effort et la vitesse les plus convenables, la durée T du travail journalier soit moindre. En effet, le produit $PVT^{k.m}$, dans de telles circonstances, ne peut jamais atteindre sa valeur *maximum* sans que la fatigue journalière de l'animal ne soit augmentée, et sans que sa santé ne soit compromise si ce travail doit être renouvelé plusieurs jours de suite. Cette faculté qu'ont les animaux de pouvoir accroître jusqu'à un certain point la quantité de travail PV qu'ils livrent dans chaque seconde, est souvent précieuse dans l'industrie manufacturière. Mais il ne faut pas oublier que la durée entière du travail doit être coupée par de fréquents repos, et qu'enfin l'effet utile journalier PVT, qu'on pourra espérer d'un semblable emploi du moteur, sera moindre que celui qu'on obtiendrait d'un travail mieux réglé.

190. *Avantages du mode continu d'action des moteurs animés sur le mode d'action intermittente.* — Quelques auteurs il est vrai, et Coulomb entre autres, pensent que, dans certains genres de travaux, tels que celui qui consiste à battre des pieux, à sonner une cloche, etc., le mode intermittent dont il s'agit présente des avantages particuliers, et est susceptible d'un effet utile

journalier plus considérable que si le moteur agissait avec plus de continuité et sous de moindres efforts ou vitesses. Mais, quoique ce mode d'opérer soit souvent nécessité par des circonstances particulières où l'on tient à accélérer le travail tout en diminuant le nombre des moteurs qui y sont à la fois appliqués, l'augmentation du travail journalier n'en paraît pas moins douteuse. Il y a tout lieu de croire, par exemple, que les hommes qui sont appliqués à une *sonnette*, en exerçant un effort de 18 kilogr., et dont le travail est interrompu par de fréquents repos, développent un effet utile journalier sensiblement moindre que les *scieurs de long* qui agissent avec un effort égal au plus à 10 kilogr. M. Hubert, célèbre ingénieur de la marine, correspondant de l'Académie des sciences, a fait à l'arsenal de Rochefort des expériences très-suivies qui ont appris que les quantités de travail journalières développées par des forgerons qui frappent jusqu'à 2560 coups avec des marteaux de $7^{k},065$ mus en avant, s'élevaient environ à $67{,}000^{k\cdot m}$; ce qui est un peu moins que le travail du *sonneur*, parce que la vitesse imprimée au marteau est très-grande. Or, il résulte d'autres observations de M. Marestier, que le travail augmente sensiblement à mesure que le poids du marteau diminue, et il pense que le martean des cloutiers est celui qui permet le plus de travail journalier à égalité de fatigue. C'est qu'en effet ici l'action est plus continue, et le travail par seconde moindre. On peut admettre, sans risque de se tromper, que, dans cette dernière circonstance, comme dans celle du sciage dit *de long*, le travail journalier fourni par des hommes exercés peut s'élever à $160\,000^{k.m}$, ou plus du double du travail ci-dessus, sans qu'il en résulte un excès de fatigue.

191. *Valeurs du travail mécanique des moteurs animés.* — Ce résultat est consigné dans le tableau ci-après, que nous avons emprunté à M. Navier (*Architecture hydraulique* de Bélidor, pages 394 et suivantes), et auquel nous avons fait plusieurs additions propres à le compléter et à en faciliter l'application dans quelques cas particuliers. Nous ferons remarquer avec M. Navier, que les données de ce tableau concernent les valeurs de la vitesse, de l'effort ou du temps qni paraissent les plus avantageux dans chaque cas spécial, et que les résultats ne doivent être regardés que comme des termes moyens qui peuvent s'écarter, en plus ou en moins, du quart au tiers du travail effectif, suivant l'âge, la viguenr des individus, leur genre de nonrriture et le climat qn'ils habitent. Ces observations appartiennent d'ailleurs à divers auteurs, et notamment à Coulomb.

Il faut aussi observer que, d'après ce qui précède, on peut, sans craindre une diminution sensible de l'effet utile journalier, faire varier de quelque chose la vitesse et l'effort indiqués au tablean, pourvu que leur produit ne soit pas trop changé et que la durée journalière du travail soit établie en conséquence.

TABLEAU des quantités de travail mécanique que peuvent fourn[illegible]*nant l'homme et les animaux dans différentes circonstances.*

NUMÉROS D'ORDRE.	NATURE DU TRAVAIL.	…DS ÉLEVÉ, ou …ORT MOYEN exercé.	VITESSE ou CHEMIN par seconde.	TRAVAIL par SECONDE.	DURÉE du TRAVAIL journalier.	QUANTITÉ de TRAVAIL journalier.
	1° ÉLÉVATION VERTICALE DES POIDS.	k.	m.	k. m.	h.	k. m.
1.	Un homme montant une rampe douce ou un escalier, sans fardeau, son travail consistant dans l'élévation du poids de son corps.	65	0,15	9,75	8	280 800
2.	Un manœuvre élevant des poids avec une corde et une poulie, ce qui l'oblige à faire descendre la corde à vide	18	0,20	3,60	6	77 760
3.	Un manœuvre élevant des poids en les soulevant avec la main.	20	0,17	3,40	6	73 440
4.	Un manœuvre élevant des poids et les portant sur son dos au haut d'une rampe douce ou d'un escalier, et revenant à vide.	65	0,04	2,60	6	56 160
5.	Un manœuvre élevant des matériaux avec une brouette et montant une rampe au $\frac{1}{12}$, et revenant à vide. .	60	0,02	1,20	10	43 200
6.	Un manœuvre élevant des terres à la pelle à la hauteur moyenne de $1^m,60$. . . . . , . . .	2,7	0,40	1,08	10	38 880
	2° ACTION SUR LES MACHINES.					
	Un manœuvre agissant sur une roue à chevilles ou à tambour :					
1.	1° Au niveau de l'axe de la roue.	60	0,15	9,00	8	259 200
2.	2° Vers le bas de la roue, ou à 24°	12	0,70	8,40	8	251 120
3.	Un manœuvre marchant et poussant ou tirant horizontalement	12	0,60	7,20	8	207 360
4.	» agissant sur une manivelle. . .	8	0,75	6,00	8	172 800
5.	» exercé, poussant et tirant alternativement dans le sens vertical.	5	1,10	5,50	8	158 400
6.	Un cheval attelé à une voiture ordinaire et allant au pas	70	0,90	63,00	10	2 168 000
7.	» attelé à un manége et allant au pas. .	45	0,90	40,50	8	1 166 400
8.	» » et allant au trot .	30	2,00	60,00	4 ½	972 400
9.	Un bœuf attelé à un manége et allant au pas. .	65	0,60	39,00	8	1 123 200
10.	Un mulet » »	30	0,90	27,00	8	777 600
11.	Un âne » »	14	0,80	11,60	8	334 080

XXIII.

TRANSPORT HORIZONTAL DES FARDEAUX.

192. *Différence entre le travail des transports horizontaux et le travail mécanique des moteurs.* — Des observateurs habiles, en tête desquels nous devons placer Coulomb, ont fait aussi des expériences sur ce genre de travail, qui, ainsi que nous l'avons déjà remarqué dans le Cours de la première année, § 92 et suivants, ne doit pas être confondu avec le travail mécanique véritable. L'unité qui a été adoptée pour la mesure de l'utilité du transport horizontal, quoique analogue à celle du travail mécanique, en est dans le fond fort différente, puisqu'il ne s'agit pas ici d'effort exercé ou de résistance vaincue dans le sens propre du chemin parcouru. Sans aucun doute, le transport horizontal, tout au moins de la part du moteur, est un travail mécanique intérieurement développé, d'où résulte un degré plus ou moins grand de fatigue ; mais comme on substitue ici, dans la mesure de l'effet utile, le poids propre du fardeau à la résistance que ce fardeau oppose au mouvement, et que cette résistance non-seulement varie dans chaque cas, mais encore peut en quelque sorte devenir aussi petite qu'on veut sans que l'effet utile soit amoindri, il est évident qu'on ne doit pas attacher la même idée à la mesure de cet effet utile et à celle du travail mécanique qui, dans certains cas, serait employé à le produire, comme, par exemple, quand le fardeau est posé sur une voiture, sur un bateau, ou quand il est simplement traîné à terre ou porté sur un traîneau.

193. *Manière d'estimer le travail du transport horizontal.* — A cela près, il est aisé de s'apercevoir que si on considère un même mode de transport, la fatigue, ou la quantité de travail effectivement développée, doit croître proportionnellement au poids du fardeau et à la distance parcourue, ou au produit du nombre de kilogrammes que pèse le fardeau, multiplié par le nombre de mètres de chemin parcouru; ce qui revient à prendre pour unité propre à mesurer l'utilité du transport, l'unité de poids transporté à l'unité de distance. Mais on remarquera que, si la circonstance du transport, ou si seulement la viabilité de la route parcourue, ou même encore la vitesse viennent à changer, l'effet utile restant le même, le travail mécanique ou le degré de fatigue que ce transport suppose, peut être très-différent. Il en est ici à peu près comme du travail du *sonneur*, et du *scieur de long*, pour lesquels une même quantité d'ouvrage ou d'effet utile peut représenter des quantités très-variables de travail mécanique selon la nature de l'outil, la dureté de la matière, etc.

194. *Changements occasionnés dans le travail des transports horizontaux, par la différence des communications.* — A ce sujet, nous ferons observer que les transports inscrits dans le tableau suivant, et qui sont effectués avec des

voitures, des brouettes, etc.; supposent des chemins d'une viabilité ordinaire, et que, pour des routes parfaitement unies, l'effet utile augmenterait à égalité de travail mécanique, comme il diminuerait par des routes en mauvais état. Voici, au reste, quelques-uns des résultats que l'expérience a fait connaître à l'égard des voitures ordinaires.

Pour un terrain horizontal ferme et uni, ou pour les chaussées pavées, la force du tirage des chevaux allant au pas est d'un vingtième ou d'un trentième de la charge totale, voiture comprise, ou moyennement d'un *vingt-cinquième*. Elle est d'un *quatorzième* de la charge pour une voiture suspendue allant au grand trot sur une chaussée pavée, c'est-à-dire que pour le pavé la traction croît avec la vitesse. Enfin, elle est le *huitième* de la charge totale pour un terrain sablonneux ou sur des cailloux nouvellement placés, soit au pas, soit au trot. Quant aux chemins en fer à ornières saillantes, l'effort du tirage varie depuis un *quatre-vingtième* jusqu'à un *centième* de la charge totale.

Nous ne parlerons pas du transport par bateaux, dont le tirage pourra toujours être apprécié d'après ce qui a été dit au § 212 de notre Cours de la première année.

TABLEAU des effets utiles que peuvent produire l'homme et les animaux, dans le transport horizontal des fardeaux considéré en diverses circonstances.

NUMÉROS D'ORDRE.	NATURE DU TRANSPORT.	POIDS TRANSPORTÉ.	VITESSE ou CHEMIN par seconde.	EFFET UTILE par seconde exprimé en kilogrammes TRANSPORTÉS à un mètre.	DURÉE de L'ACTION journalière.	EFFET UTILE par jour.
		k.	m	k. m.	h.	k. m.
1.	Un homme marchant sur un chemin horizontal sans fardeau, son travail consistant dans le transport du poids de son corps.	65	1,50	97,5	10	3 510 000
2.	Un manœuvre transportant des matériaux dans une petite charrette ou camion à deux roues, et revenant à vide.	100	0,50	50	10	1 800 000
3.	Un manœuvre transportant des matériaux dans une brouette, et revenant à vide chercher de nouvelles charges	60	0,50	30	10	1 080 000
4.	Un homme voyageant, emportant des fardeaux sur le dos.	40	0,75	30	7	756 000
5.	Un manœuvre transportant des matériaux sur le dos, et revenant à vide chercher de nouvelles charges.	65	0,50	32,5	6	702 000
6.	Un manœuvre transportant des fardeaux sur une civière, et revenant à vide chercher de nouvelles charges	50	0,33	16,5	10	594 000
7.	Un cheval transportant des matériaux sur une charrette, et marchant au pas, continuellement chargé.	700	1,10	770	10	27 720 000
8.	Un cheval attelé à une voiture, et marchant au trot. continuellement chargé.	350	2,20	770	$4\frac{1}{2}$	12 474 000
9.	Un cheval transportant des fardeaux sur une charrette, et revenant à vide chercher de nouvelles charges	700	0,60	420	10	15 120 000
10.	Un cheval chargé sur le dos, et allant au pas. . .	120	1,10	132	10	4 752 000
11.	» » et allant au trot. . .	80	2,20	176	7	4 435 000

TROISIÈME PARTIE.

DES MACHINES ET DES MOTEURS.

I. — INTRODUCTION. — RÉSUMÉ DES PRINCIPES EXPOSÉS DANS LES DEUX PREMIÈRES PARTIES DU COURS.

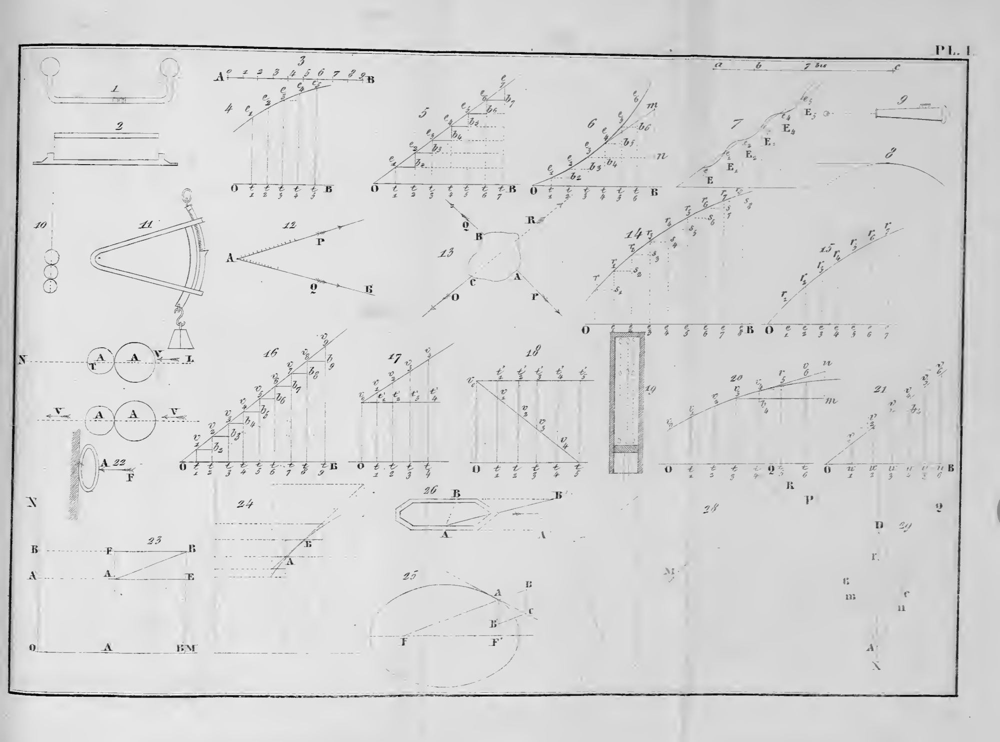
II. — CONSIDÉRATIONS GÉNÉRALES SUR LES MACHINES.

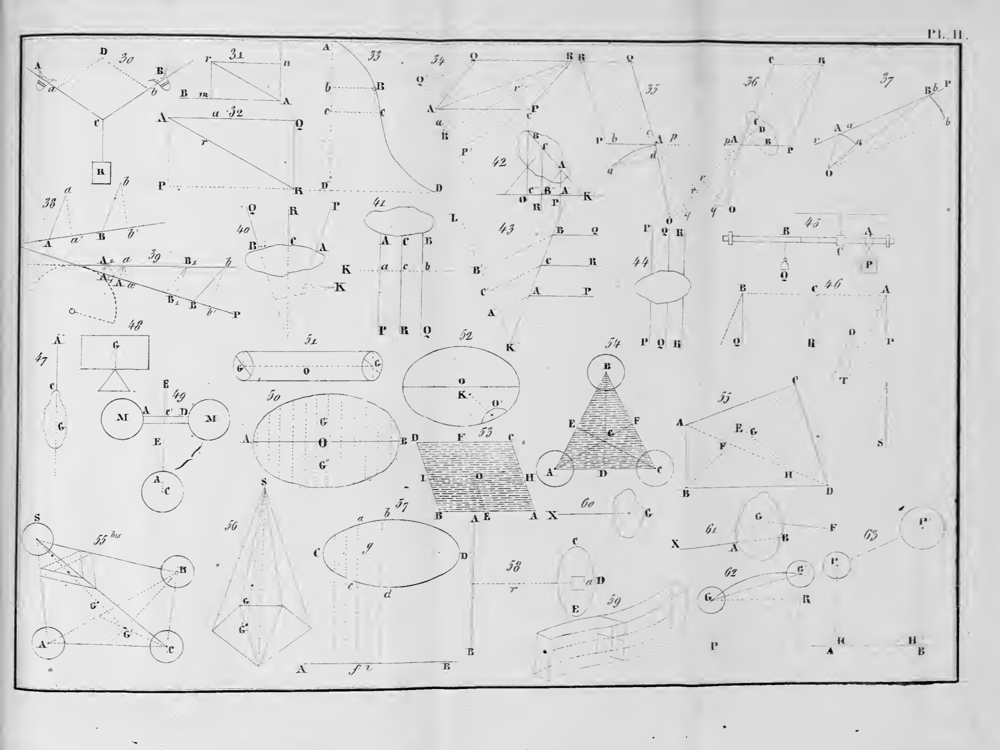
III. — DES COMMUNICATEURS DU MOUVEMENT.

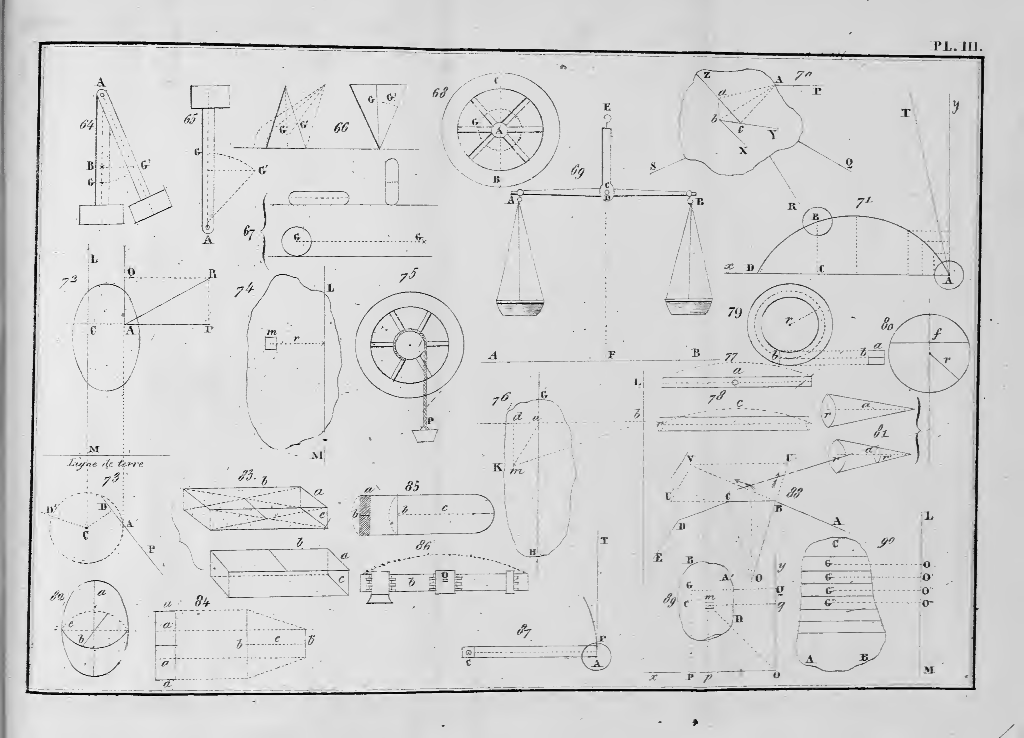
IV. — DES MODIFICATEURS INSTANTANÉS DU MOUVEMENT.

V. — DES MODÉRATEURS ET DES RÉGULATEURS.

FIN DE LA TABLE DU 3me VOLUME.


PL. I.




PL. III.
64
65
66
67
68
69
70
71
72
73
74
75
76
77
78
79
80
81
82
83
84
85
86
87
88
89
90
Ligne de terre

91 92 93 94 95 96 97 98 99 100 101 102 103 104 105 106 107 108 109 110 111 112 113 114 115 116

117 118 119 120 121

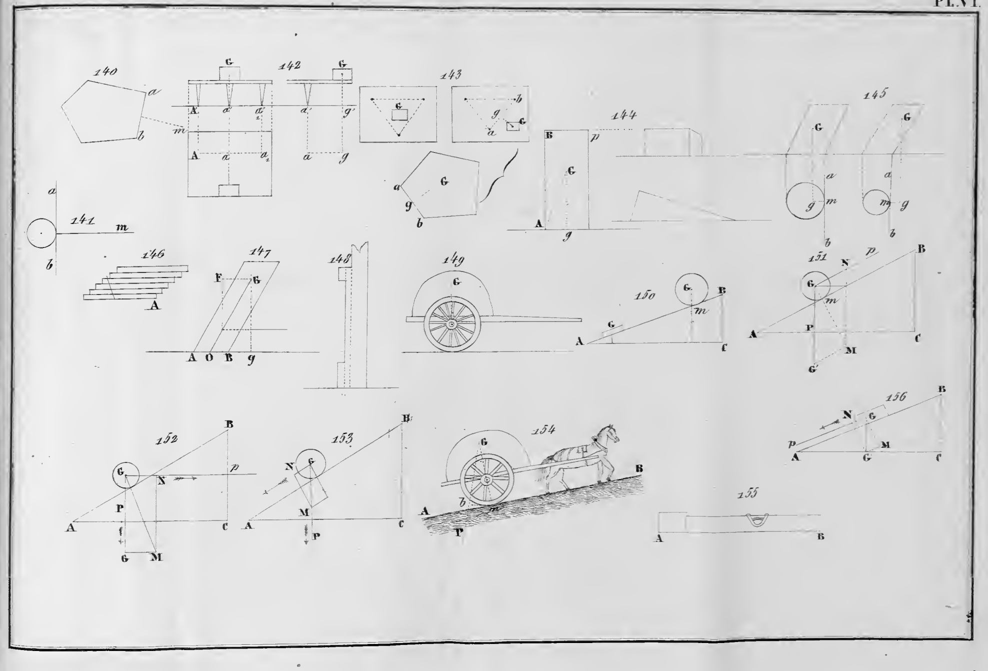
122 123 124 125

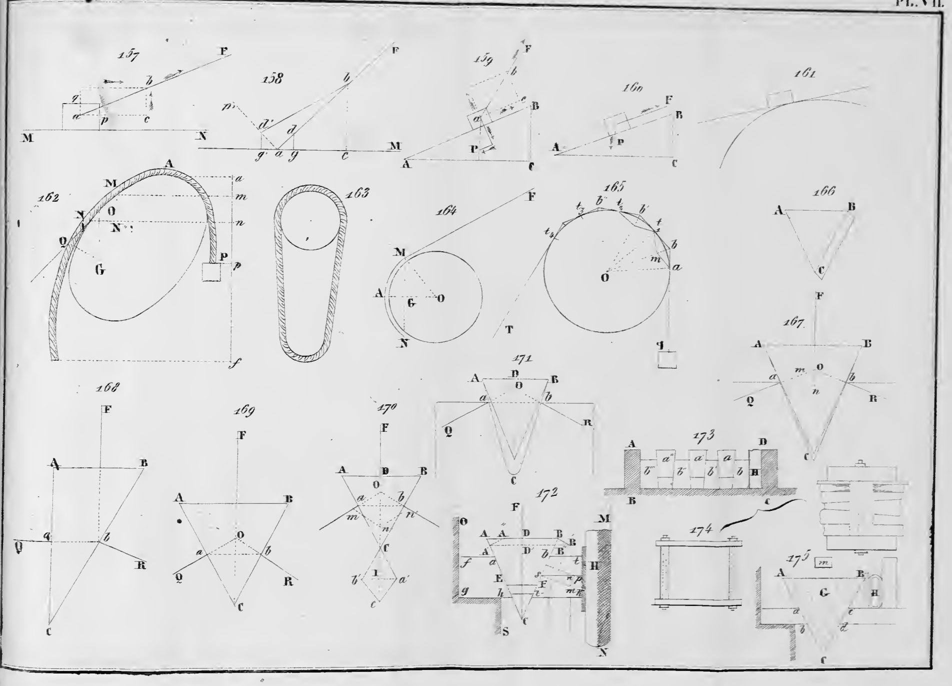
126 127 128

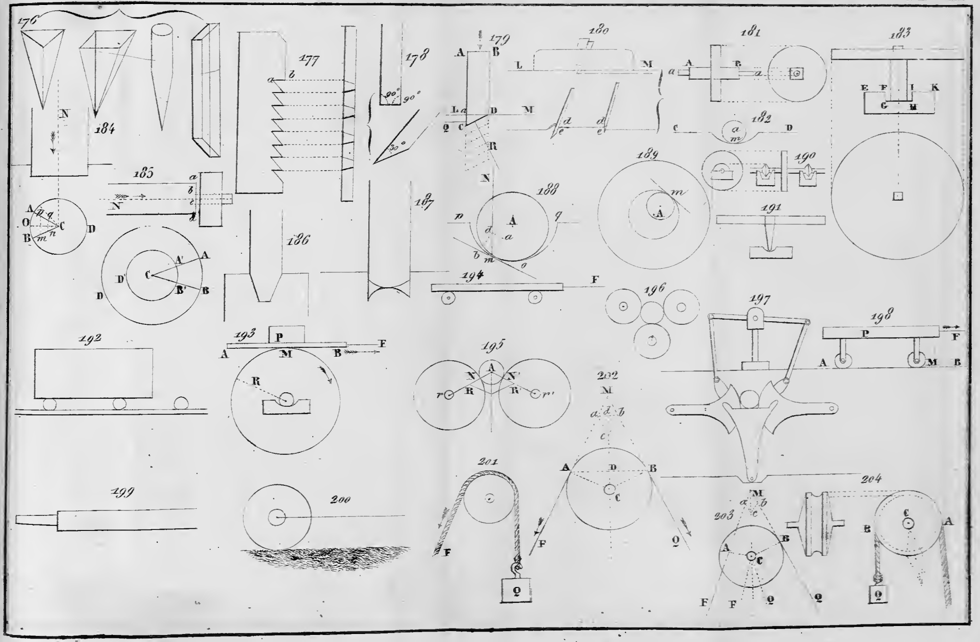
129 130

131 132 133

134 135 136 137 138 139


140
141
142
143
144
145
146
147
148
149
150
151
152
153
154
155
156





PL. VIII.
176
177
178
179
180
181
182
183
184
185
186
187
188
189
190
191
192
193
194
195
196
197
198
199
200
201
202
203
204

205.

206.

207.

208.

209

210

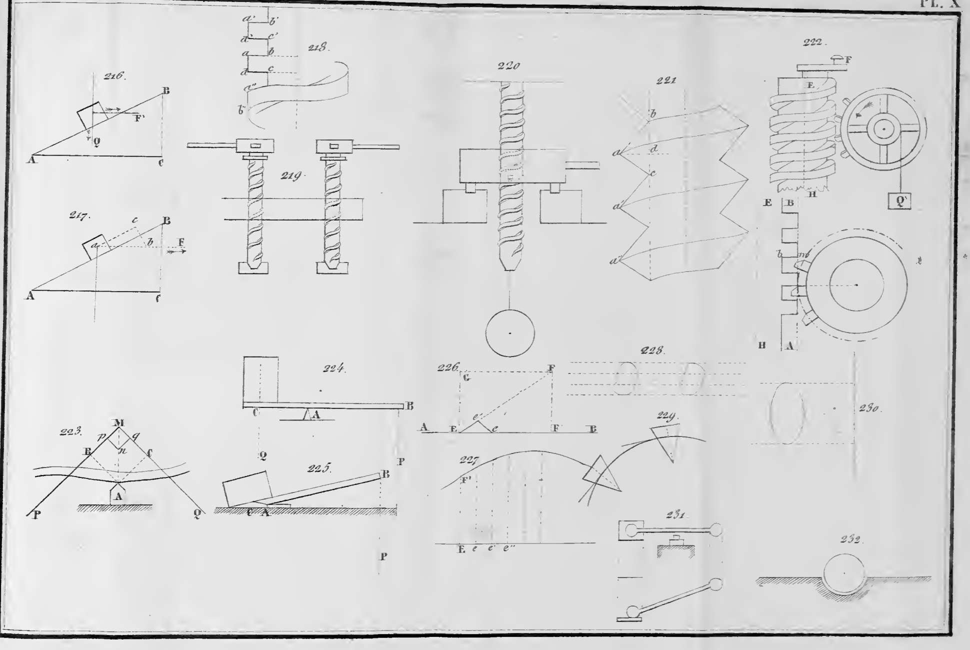
211.

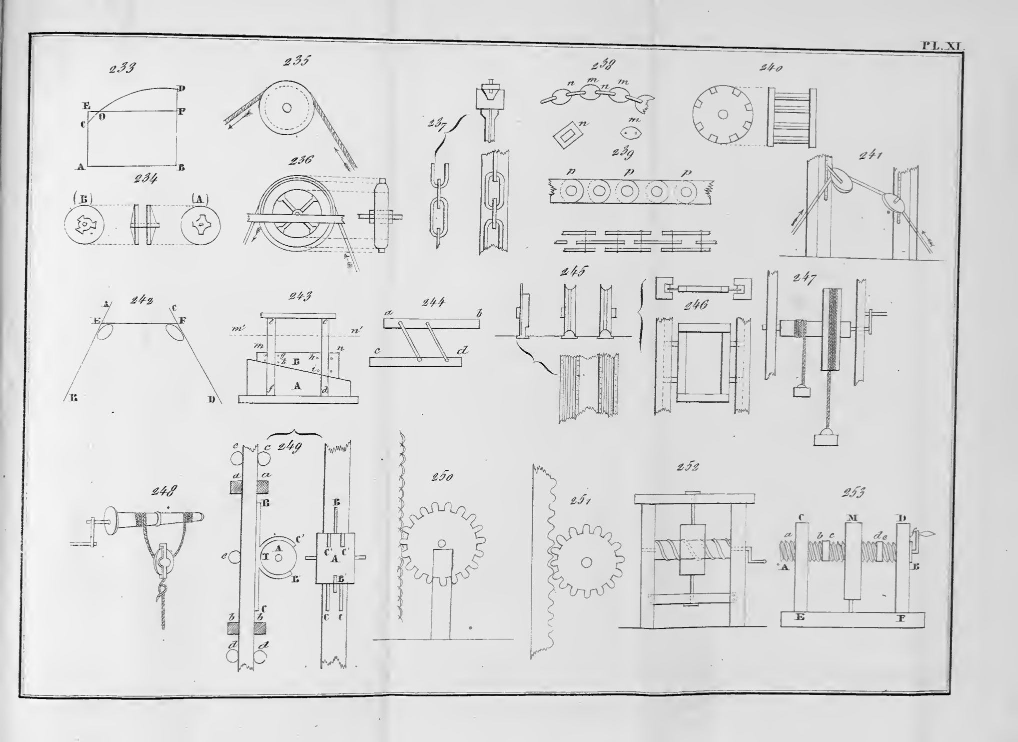
212.

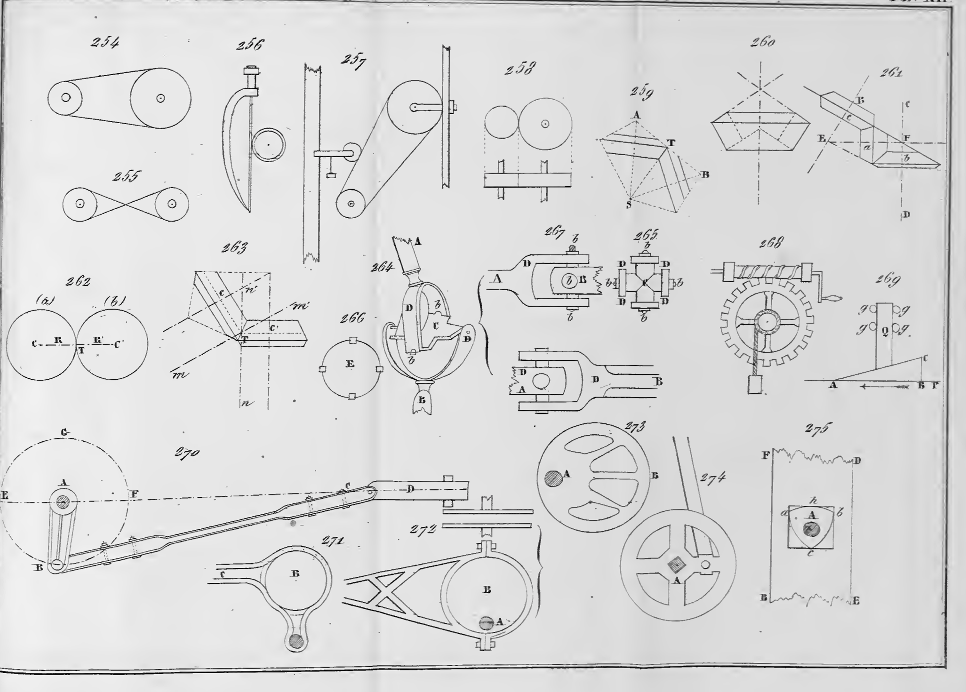
213.

214.

215.


216.
B
F'
Q
A
C
217.
c
B
a
b
F
A
C
218.
a'
b'
d'
c'
a
b
d
c
a''
b''
219.
220
221
b
d
c
222.
F
E
H
Q'
E
B
b
m
H
A
223.
M
p
q
n
B
C
A
P
Q
224.
C
A
B
Q
225.
B
P
C
A
P
226.
G
F
e'
A
E
e
F
B
227.
F'
E
e
e'
e''
228.
229.
230.
231.
232.


233
E
F
D
C
O
A
B
234
(B)
(A)
235
236
237
238
n m n m
n
m
239
p p p
240
241
242
A
C
E
F
B
D
243
m' n'
m n
l c
g h
h
i
E
A
f d
244
a b
c d
245
246
247
248
249
c c
a a
B
e
C'
T
A
B'
B
C' C'
A
B'
C
b b
C C
d d
250
251
252
253
a b c
M
C
D
d e
A
B
E
F



276. M g g N Q A P

277. 1 2 3 4 5 6 Q A P

278. d d D E b a c A

279. E b a E b E

280. B A C

281.

282. C A D M E B F G p p

283. K A B F O I

284. M A T m

285.

286. A C

287. D a a' O C B b A M

288. A C B c d F E

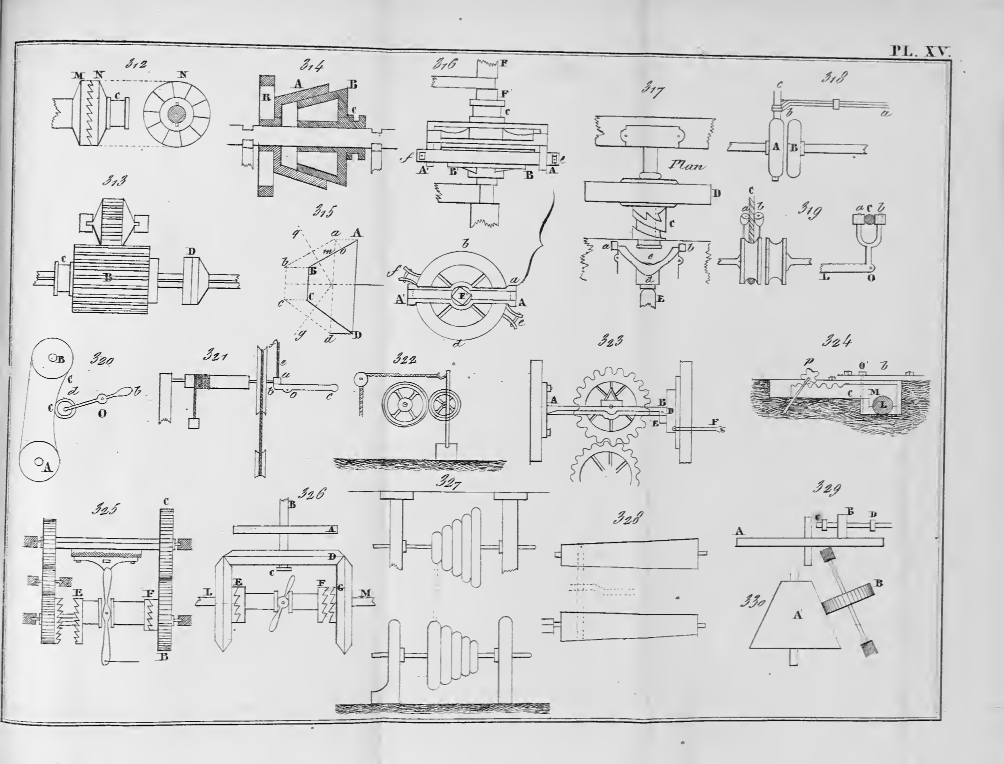
289. D E C P A F B Q

PL. XIV.

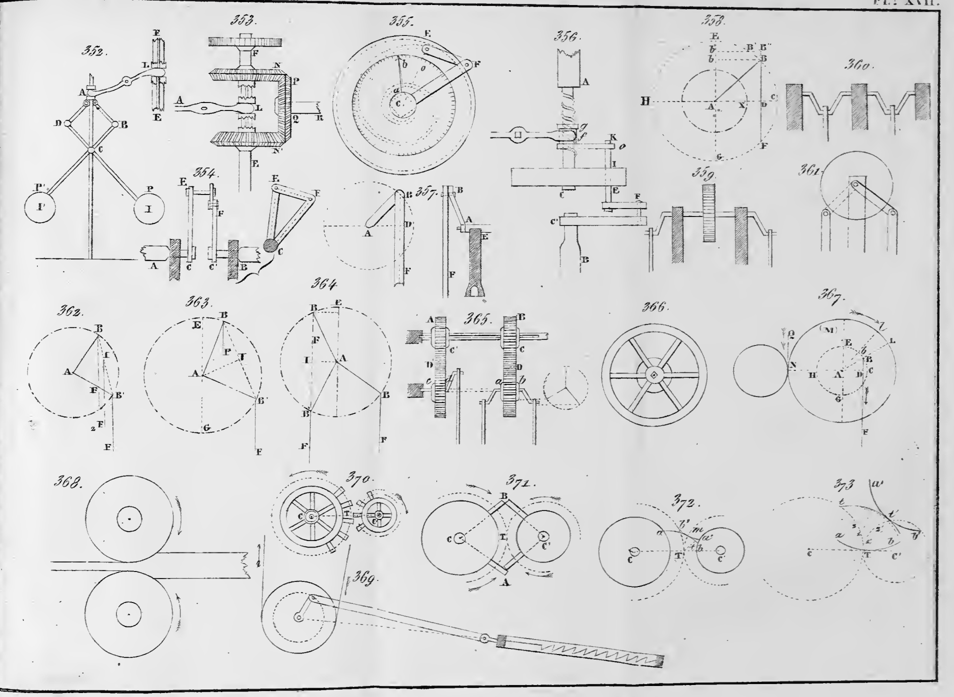
290 291 292 294 296 299

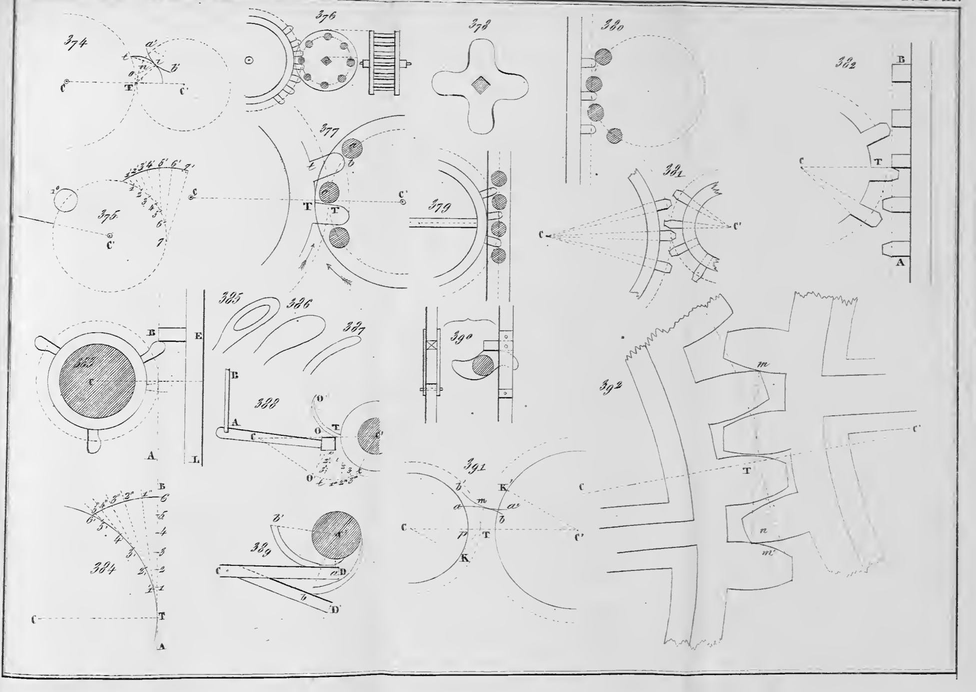
293 295 297 298

300 301 302 303 304 305 306 307 308 309 310 311

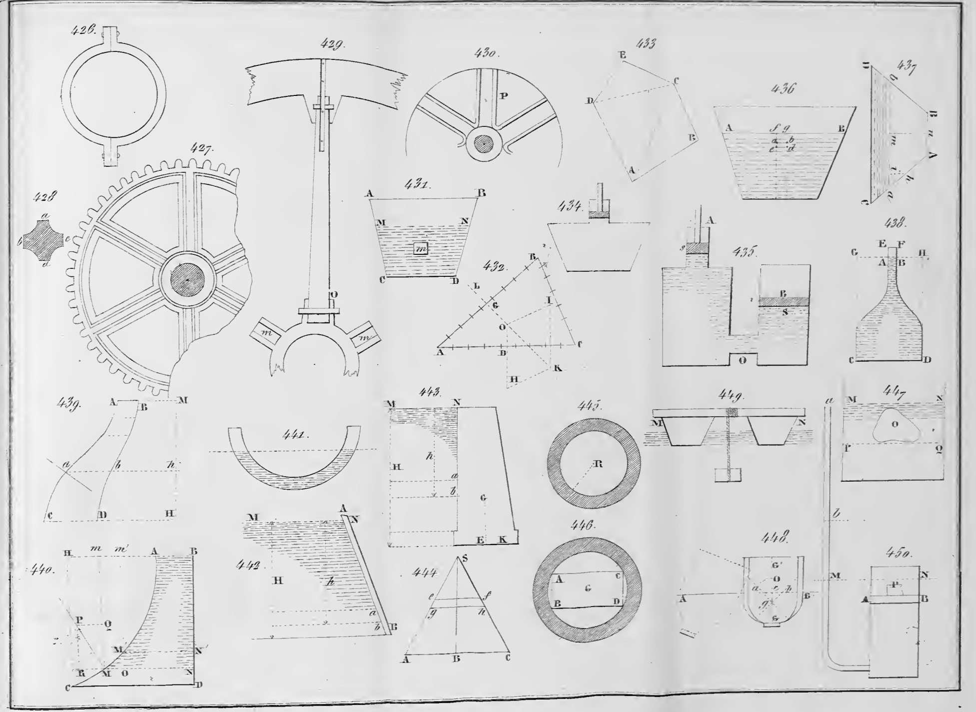

312
313
314
315
316
317
Plan
318
319
320
321
322
323
324
325
326
327
328
329
330

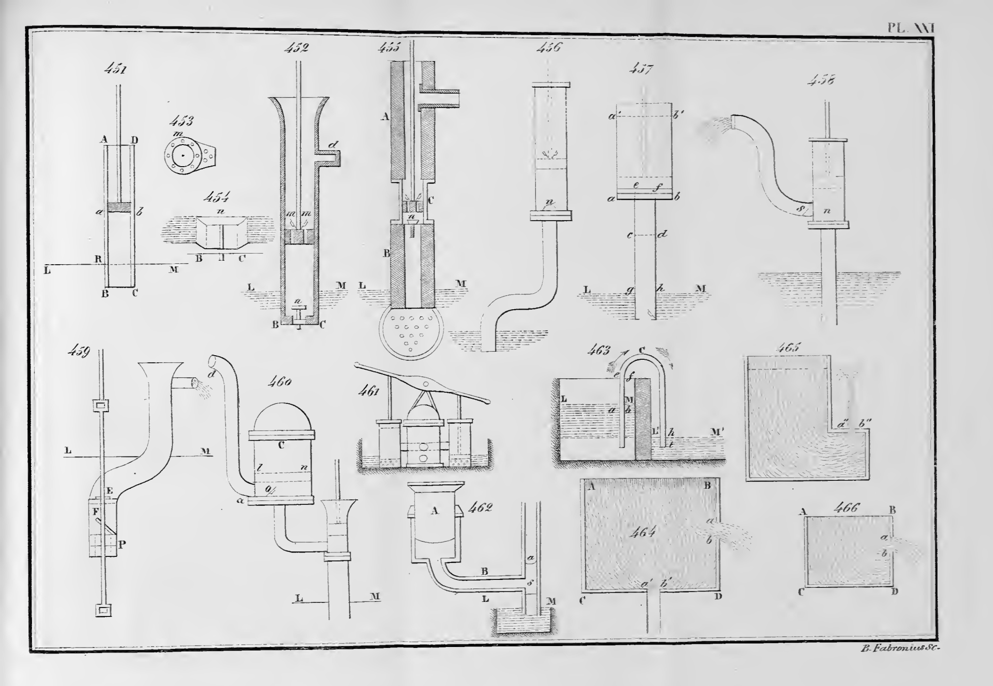
PL. XVI.

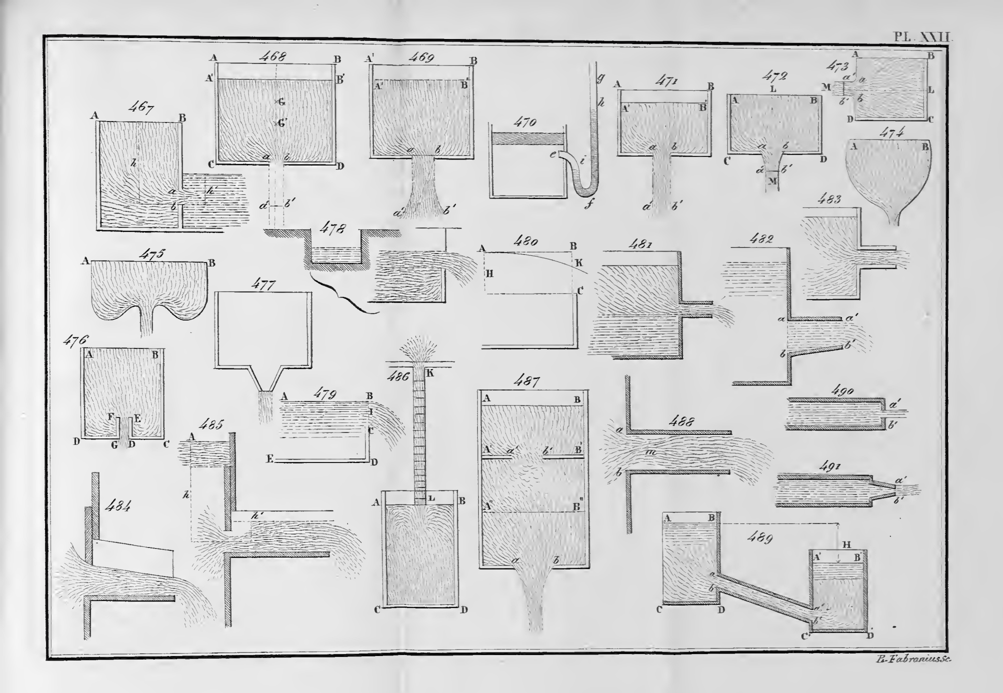

352.
353.
354.
355.
356.
357.
358.
359.
360.
361.
362.
363.
364
365.
366.
367.
368.
369.
370.
371.
372.
373

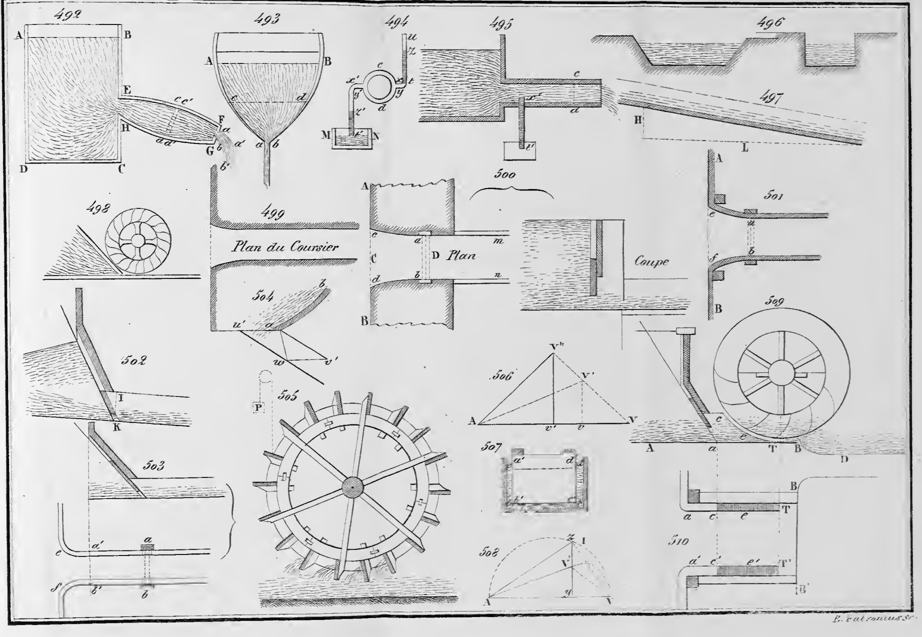

374
375
376
377
378
379
380
381
382
383
384
385
386
387
388
389
390
391
392

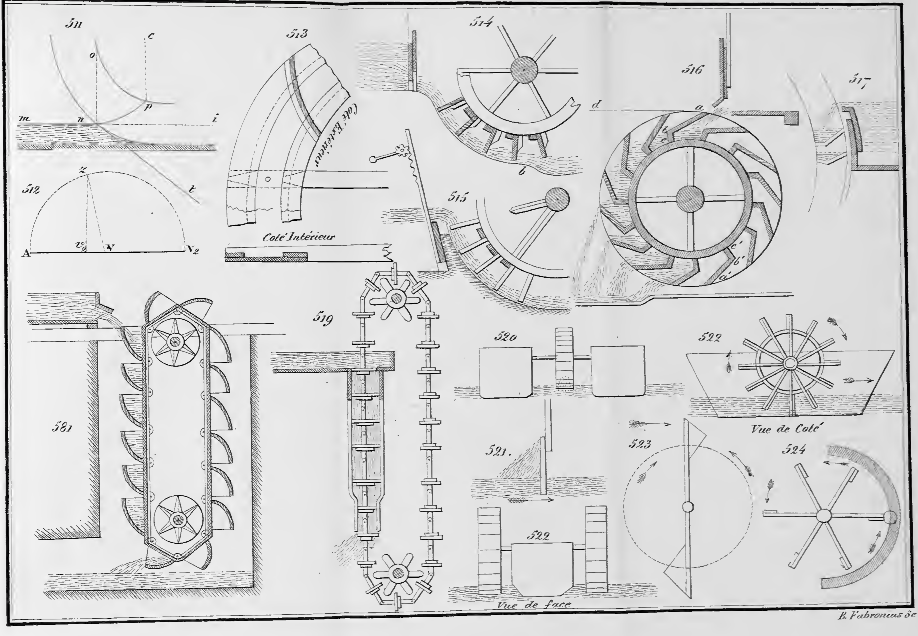
393 394 395 396 397 398 399 400 401 402 403 404 405 406 407 408 409 410 411 412 413 414 415 416 417 418 419 420 421 422 423 424 425


426.
427.
428.
429.
430.
431.
432.
433
434.
435.
436
437
438.
439.
440.
441.
442.
443.
444
445.
446.
447
448.
449.
450.

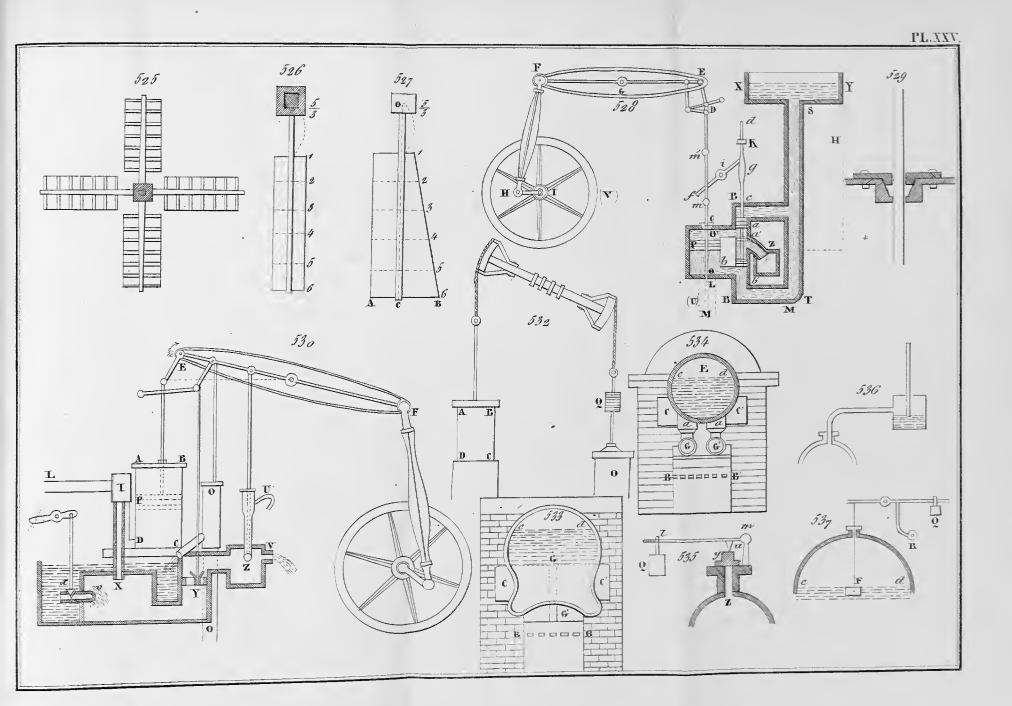

451
453
454
452
455
456
457
458
459
460
461
463
465
462
464
466
B. Fabronius Sc.


PL. XXII.
467
468
469
470
471
472
473
474
475
476
477
478
479
480
481
482
483
484
485
486
487
488
489
490
491
B. Fabronius sc.


492
493
494
495
496
497
498
499
Plan du Coursier
500
Plan
Coupe
501
502
503
504
505
506
507
508
509
510



B. Fabronius Sc


PL. XXV.
525
526
527
528
529
530
532
533
534
535
536
537